大學用書

材料力學

原著者　S. P. Timoshenko
James M. Gere
譯述者　王　樅　張伯烈　趙國華

（SI 版）

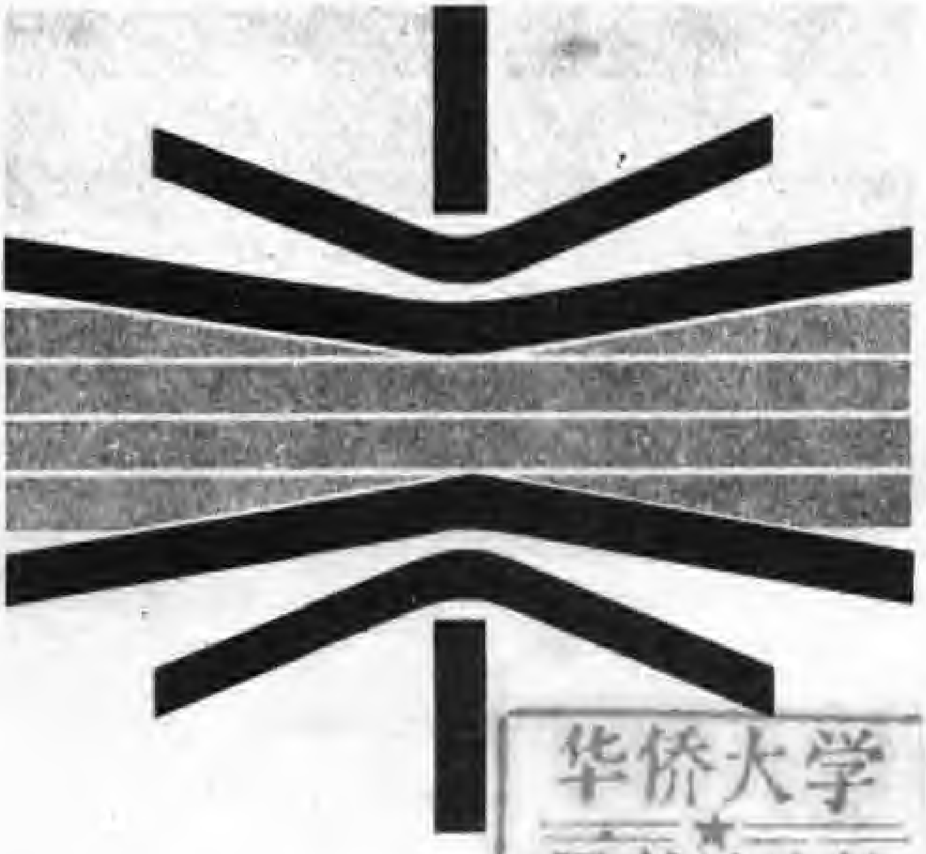
發行者　科技圖書股份有限公司

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

材料力學

MECHANICS OF MATERIALS



华侨大学
图书馆藏书
A0401498

Stephen P. Timoshenko

James M. Gere

251310

六十一年十月　初　　版
六十六年四月　修訂六版
六十六年六月　國際制單位版初版
六十八年二月　國際制單位版三版

本公司經新聞局核准登記
登記證局版臺業字第1123號

書　　名：材料力學 (SI 版)
原 著 者：Timoshenko and Gere
譯 述 者：王　樅　張伯烈　趙國華
發 行 人：趙　國　華
發 行 者：科技圖書股份有限公司
臺北市博愛路185號二樓
電　話：3110953
郵政劃撥15697號
特價新臺幣90元

國際制單位版刊印說明

本書自六十二年一月刊印以來在短短四年內已再版六次，足見該書受到國內外讀者們之歡迎與重視。茲爲便利讀者起見，將原用的英制單位全部改爲國際制單位，重行排版印行。稱爲國際制單位版，但原印的英制版仍繼續發行。在國際單位版中除保留原譯本的細緻譯文作風外，並另增參考資料與發展簡史、以及國際制單位的習題答案，總共頁數達 612 頁，較英制版本多出 38 頁。

本版的國際單位制資料係根據蘇格蘭，鄧第大學土木工程系教授柯孫（A. R. Cusens）與愛斯登尼洛（R. A. Estanero）博士的講義本改譯，故無割裂不完整之弊，尤其習題與答案能正確符合，習者在做習題時可隨時參考答案以測驗其瞭解程度，此爲本書的特點。在此國際制單位通行全球的今日，學術界得此新版本，實爲不可多得的良機，希讀者注意並多多利用。

科技圖書公司編輯部　謹誌

六十六年六月十日

原　序

爲了大學生們的需要，不論他們在大學裏初次學習，或已畢業而當了工程師的，作爲參考引用而編寫的一本「材料力學」教科書，應是一件可以辦到的工作。作者們寫成這本書，自認爲已能符合這些目標。

我們首先，將能施教的和易學易懂的，分別列出理論和方法，並供給足夠的討論與例題，使初學者能迅速的抓住基本要點。這樣，這本教科書便要超越了初級階段，而將更高深與更專門的資料也包容在內。因之，工程師們，不問他已在做設計或參與研究，或是發展主動研究所需要的，在本書內可找到不少新的資料，供他們很高興的去引用。

一眼瞥見這本書首列的目錄，便知道本書所包涵的內容。這些章節中包括了桿件受軸載重、扭力和彎曲，以及其他各種材料力學的基本觀念，如應變能、應力與應變的變換，非彈性體的形態等等。對工程師們認爲有興趣的特別項目，包括了熱效應、非錐體梁、大撓度梁、不對稱梁等的彎曲、剪力中心、以及其他。最後一章，包含了單一載重法、逆定理、韌性與剛性方法、應變能定理、位能定理、瑞里夫 - 李玆法、餘能原理等。這一章對讀者提供了學習近代結構理論的結實基礎。

本書的內容，對一個初習的大學生確是過多，因之要請每位教師相機選擇認爲最基本或最重要的資料向學生講解。教師們一定會賞識這幾百個新習題（一共超過 600 題），供作課外作業，或作課堂討論資料。

在本書後面，收集了很多的參考資料，有些寫出材料力學的發展歷史，和課題有關的原始資料。爲了增進讀者興趣，在參考資料內，列入發現者的平生與他的小傳。

這本書具有「新」的感覺，因爲書中列有簇新而公認爲最具興趣性的材料力學題材。但另一方面，感覺到是「古」的。因爲這本書是根據有名的二大本「材料强度學」（鐵馬與歌著）發展而成的。「材料强度學」曾在 1955 年改訂 1956 年出版第三版，第二版是在 1941 改版印行的，最初一版是 1930 年出版。若再上溯，最初的第一版是根據若干最早在俄國出版的教科書，一直要追溯到 1908 年。（詳見 Timoshenko 著 " As I remember" 1968 ）。作者等希望這本書將和以後編寫的「高等材料力學」成爲

Hn1024 D

連串的最新教科書。

要將編寫這本書的當時與此發生關係的人們致其謝忱，實爲一不可能的事，但對D.H. Young 教授的細讀全書，提供有價值的指教，則感荷良深。另一同僚 William Weaver, Jr. 教授，對「結構分析與能法」一章的貢獻，則表示感謝。另一部分的感激是屬於歷年來爲數極多的學生們，從他們在校學習時的表現，使作者們能體會到如何去編寫一本好的教科書。自然，沒有一本書在編寫中能缺少秘書的幫忙。這幾位如M F. Nelson 夫人，J Markenzie 小姐，R E. Platt 夫人，和S Bennett 小姐等，作者對她們表示由衷的感激。

鐵馬興歌

奇爾

於加州司丹福　1971 年 6 月

鐵馬興歌傳略

鐵馬興歌（Stephen P. Timoshenko） 教授 1878 年 12 月 22 日生於烏克蘭尼亞的小村。1889 年攷入龍尼城的鐵路學堂，於 1896 年畢業，同年攷入交通工程學院，1901年畢業經一年軍訓後即入該院的力學實驗室任研究員。1902 年轉入聖彼得堡工學院任職，1906 年獲得基輔工學院之教授職位，1907 年開始擔任教授材料力學課程，他以由簡入深的教材非常成功的建立這種教授法而受到學生們的歡迎與敬仰。根據三年來編寫的講義在 1911 年出版「材料力學」一書。同年他以兼任土木系主任而突被解職，以致生計發生困頓，但他仍繼續不倦致力於研究工作，於 1913 年出版「彈性力學理論」一書。1914年大戰爆發，俄境動亂不安，在此數年中，他與其家人共渡艱苦歲月凡六年，但他對力學的研究仍楔而不捨，1918年寫成一本「不用微積分之材料力學」。其後俄國大革命起，全境混亂異常，1920年七月携眷離俄而抵南斯拉夫，首在沙瑞工學院任教二年。1922年6月22日渡美。1923年入西屋研究實驗室之力學研究小組任研究工程師，利用晚上時間爲公司同仁開設進修班講授材料力學，並一手促成美國機械工程學會力學組之建立，1928 年轉入密歇根大學任教，除任課外，埋首寫作，先後出版「材料力學」、「工程震動學」、「彈性穩定理論」、「工程力學」、「彈性力學」等書，由於內容都屬權威性，不但可作標準教科書用，且可作爲職業工程師及學生們的重要參考來源，因而風靡全國，傳譯全球。1936 年氏由密大轉至史丹福大學任教，在任內又出版了「平板及曲板理論」、「結構理論」與「高等動力學」等書。1944 年以年屆 65 歲由史大正式退休，遷居德國與其親生女團敍共度餘年。但每年仍爲史大開授有關「材料力學史」及「材料物理性」等課，直至75 歲始止。他著作等身，除上述的各種權威性著作外，在1959 年曾出版一本「俄國工程教育」，1963 年他用俄文寫其「自傳」先在法國出版，1967年的美譯本在美國發行。1971 年與其高足 Gere 氏合著“mechanics of materials”即本書的原本，由 D. von Nostrand 書局出版，他雖親見此書之完成，但不幸於 1972 年 5 月 29 日逝世，享年九十有三，相隔不過半年耳。故本書可謂其最後遺作，因而彌足珍貴。我們深深哀悼他的逝世，也將永遠珍惜他爲我們播下了許多的種子。

爲了飲水思源，吾們將這位傑出的力學大師的生平，作上述的傳略以供讀者之景仰。

科技圖書公司編輯部　謹誌

六十六年六月

符號一覽表

A	面積，作用（力或力偶），常數
a，b，c	尺寸，距離，常數
C	積分常數，形心
c	自樑之中性軸至其最外表面之距離
D	變位，運動學之未知數
d	直徑，尺寸，距離
E	彈性模數，第二種橢圓積分
E_r	已降低之彈性模數
e	偏心距，尺寸，常數
F	力，第一種橢圓積分，韌性系數
f	剪力流，塑性彎曲之形狀因數
f_s	剪力之形狀因數
G	剪力之彈性模數
g	重力，加速度
H	距離，力，反力，馬力
h	高度，尺寸
I	一個平面面積之慣性力矩（或第二力矩）
I_x，I_y，I_z	對 x，y 及 z 軸之慣性力矩
I_1，I_2	主慣性力矩
I_{xy}	一個平面面積對 x 及 y 軸慣性力矩之積
J	極慣性力矩，扭力常數
K	體積彈性模數，柱之有效長度因數
k	$\sqrt{P/EI}$ 之符號
L	長度，跨度
M	彎曲力距，反力偶

M_p	樑之塑性力矩
M_y	樑之屈伏力矩
N	軸向力
n	安全因數，數目，比值，整數，每分鐘之轉數
O	座標之原點
P	集中力，載重，軸向力
P_{cr}	柱之臨界載重
P_u	極限載重
P_w	工作載重或容許載重
P_y	屈伏載重
p	壓力
Q	集中力，一個平面面積之第一力矩（或靜力矩）
q	分佈載重之強度（每單位距離內之載重）
q_u	極限載重
q_y	屈伏載重
R	反力，半徑
r	半徑，距離，旋轉半徑（$r=\sqrt{I/A}$）
S	力，樑之斷面模數，剪力中心，勁性係數
s	距離，沿曲線之長度
T	溫度，扭曲力偶或轉距
T_u	極限轉矩
T_y	屈伏轉矩
t	厚度
U	應變能
u	單位體積之應變能
U^*	餘能
u^*	單位體積之餘能
V	剪力，體積
v	撓度，速度
v', v'', etc	dv/dx，d^2v/dx^2 等
W	重量，功
W^*	餘功

X	靜贅力
x, y, z	矩形座標，距離
x, y, z	形心之座標
Z	樑之塑性模數
α	角度，熱膨脹係數，比值
α_s	剪力係數
β	角度
γ	剪力應變，單位體積之重量
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	在 xy，yz，zx 各平面內之剪力應變
γ_θ	傾斜軸之剪力應變
δ，Δ	撓度，變位，伸長
ϵ，ϵ	正交應變
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	在 x，y 及 z 方向之正交應變
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	主正交應變
ϵ_y	屈伏應變
ϵ_θ	傾斜軸之正交應變
θ	角度，單位長度內之扭曲角度，樑軸之旋轉角度
θ_p	與主平面或主軸線所成之角度
θ_s	與最大剪應力平面所成之角度
κ	曲度（$\kappa = 1/\rho$）
κ_y	屈伏曲度
λ	距離
ρ	半徑，曲度半徑，在極座標內之徑向距離
ν	卜桑氏（Poisson's）比值
σ	正交應力
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	在垂直於 x，y 及 z 各軸線之平面上之正交應力
σ_θ	傾斜平面上之正交應力
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主應力
σ_{cr}	柱之臨界應力（$\sigma_{cr} = P_{cr}/A$）
σ_r	殘餘應力
σ_u	極限應力

σ_w	工位應力或容許應力
σ_y	屈伏應力
τ ，τ	剪應力
τ_{xy} ，τ_{yz} ，τ_{zx}	在垂直於 x，y 及 z 各軸線之平面上與 x，y 及 z 各軸線平行之剪應力
τ_θ	斜面上之剪應力
τ_u	極限剪應力
τ_w	工作剪應力或容許剪應力
τ_y	屈伏剪應力
ϕ	角度，扭曲角度
ϕ	無尺寸之因數
ω	角速度

希臘字母表

字　母		讀　音	字　母		讀　音	字　母		讀　音
A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ ς	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Υ	υ	upsilon
E	ε	epsilon	N	ν	nu	Φ	ϕ φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

目　錄

原著者序

目錄

符號一覽表

第一章　拉力、壓力及剪力

1 - 1　緒言 ………… 1
1 - 2　應力及應變 ………… 2
1 - 3　拉力試驗 ………… 3
1 - 4　直線型彈性及胡克氏定律 ………… 7
1 - 5　軸向載荷桿之撓曲 ………… 10
1 - 6　靜不定結構 ………… 12
1 - 7　溫度及預加應變之影響 ………… 22
1 - 8　非線性行態 ………… 24
1 - 9　剪應力及剪應變 ………… 29
1 -10　應變能 ………… 31
習　題 ………… 38

第二章　應力與應變之分析

2 - 1　斜面上之應力 ………… 51
2 - 2　雙軸應力 ………… 55
2 - 3　純剪力 ………… 59
2 - 4　雙軸應力之摩爾氏圓 ………… 61
2 - 5　平面應力 ………… 64
2 - 6　平面應力之摩爾氏圓 ………… 68
2 - 7　三軸應力 ………… 71
2 - 8　平面應變 ………… 74
習　題 ………… 80

第三章　扭　力

3 - 1　圓桿之扭力 ………… 84
3 - 2　空心圓桿之扭力 ………… 90
3 - 3　扭力應變能 ………… 92

3 - 4 薄壁管 94
3 - 5 圓桿之非彈性扭力 100
習 題 103

第四章 剪力及彎曲力矩

4 - 1 樑之各種型式 108
4 - 2 樑內之應力合力 110
4 - 3 介在載重、剪力及彎曲力矩間之關係 113
4 - 4 剪力圖及彎曲力矩圖 116
習 題 124

第五章 樑內之應力

5 - 1 樑內正交應力 130
5 - 2 樑之設計 137
5 - 3 樑內之剪應力 141
5 - 4 圓形截面樑之剪應力 148
5 - 5 構成梁 150
5 - 6 樑內主應力 153
5 - 7 非等截面樑內之應力(近似理論) 156
5 - 8 合成樑 163
5 - 9 彎曲與扭轉之結合 170
5 -10 彎曲與軸載重之結合 172
習 題 177

第六章 樑之撓度

6 - 1 撓度曲線之微分方程式 190
6 - 2 簡支樑 193
6 - 3 懸臂樑 198
6 - 4 力矩 - 面積法 200
6 - 5 重疊法 205
6 - 6 非等截面之樑 211
6 - 7 差分法 214
6 - 8 彎曲之應變能 218
6 - 9 與撓度成正比例之載重 222

6 -10　熱之影響 ………………………………………… 225
6 -11　剪力變形之影響 ………………………………… 227
6 -12　巨大撓度之樑 …………………………………… 234
習　題 ………………………………………………… 239

第七章　靜不定樑

7 - 1　靜不定樑 ………………………………………… 249
7 - 2　撓度曲線之微分方程式 ………………………… 251
7 - 3　重疊法 …………………………………………… 254
7 - 4　力矩面積法 ……………………………………… 263
7 - 5　差分法 …………………………………………… 267
7 - 6　連續樑 …………………………………………… 268
7 - 7　熱影響 …………………………………………… 275
7 - 8　樑端之水平變位 ………………………………… 277
習　題 ………………………………………………… 280

第八章　不對稱彎曲

8 - 1　負斜載重之對稱樑 ……………………………… 289
8 - 2　不對稱樑之純彎曲 ……………………………… 291
8 - 3　不對稱樑受橫向載重之彎曲 …………………… 297
8 - 4　開放型薄壁橫截面樑內之剪應力 ……………… 300
8 - 5　開放型薄壁橫截面之剪力中心 ………………… 307
8 - 6　向非主軸彎曲之樑內剪應力 …………………… 313
習　題 ………………………………………………… 320

第九章　非彈性彎曲

9 - 1　緒論 ……………………………………………… 327
9 - 2　非彈性彎曲之方程式 …………………………… 327
9 - 3　塑性彎曲 ………………………………………… 329
9 - 4　塑性鉸 …………………………………………… 334
9 - 5　樑之塑性分析 …………………………………… 338
9 - 6　撓度 ……………………………………………… 347
9 - 7　非彈性彎曲 ……………………………………… 351

9-8　殘餘應力 …………………………………… 358
習　題 ………………………………………… 360

第十章　立　柱

10-1　負偏心載重之立柱 ……………………… 368
10-2　立柱之臨界載重 ………………………… 373
10-3　立柱內之應力 …………………………… 380
10-4　立柱之正割公式 ………………………… 382
10-5　立柱之缺點 ……………………………… 385
10-6　立柱設計公式 …………………………… 388
習　題 ………………………………………… 392

第十一章　結構分析與能法

11-1　緒言 ……………………………………… 397
11-2　虛功原理 ………………………………… 398
11-3　用單位-載重法計算變位 ………………… 403
11-4　樑之剪力撓度 …………………………… 418
11-5　互換定理 ………………………………… 423
11-6　韌性法 …………………………………… 430
11-7　勁性法 …………………………………… 443
11-8　應變能及餘能 …………………………… 457
11-9　應變能法 ………………………………… 467
11-10　位能法 ………………………………… 477
11-11　瑞萊-李滋二氏法 ……………………… 480
11-12　餘能原理 ……………………………… 492
11-13　力法 …………………………………… 499
11-14　卡氏第二定理 ………………………… 502
11-15　應變能與韌性法 ……………………… 505
11-16　其他各種結構分析法 ………………… 507
習　題 ………………………………………… 508

參考資料與發展簡史 523

附錄A　平面面積諸性質

A - 1　面積之形心 540
A - 2　組合面積之形心 542
A - 3　面積之慣性力矩 544
A - 4　極慣性力矩 546
A - 5　平行軸定理 548
A - 6　慣性積 550
A - 7　軸之旋轉 552
A - 8　主軸 554
習　題 556

附錄B　平面面積諸性質表　561

附錄C　結構用鋼截面性質（摘要）　564

附錄D　梁之撓度與傾斜度　570

習題答案　576

人名索引　599

名詞索引　601

第一章 拉力、壓力及剪力

1·1 緒 言

材料力學（ mechanics of materials ）爲應用力學之一部門，討論固體物體承受各種型式載重之行態。爲具有各種名稱而命名之研究領域，包括"材料強度"（ strength of materials ）及"變形物體力學"（ mechanics of deformable bodies ）等。在本書內被考慮之物體，包括軸向載重之桿、軸、樑及柱以及由此類組件構成之結構。通常我們分析之目的將爲確定應力、應變及由載重所產生之變形；若對於從一般載重一直到失敗載重所有一切載重之值，均能求得。則我們即已獲得，該物體力學之完整行態。

理論分析及試驗結果，在材料力學之研究中，具有相等之重要任務。在許多機會中，我們將作合理之誘導以獲取公式或方程式，用以預示力學行態；但在同時我們必須認識清楚，這些公式，除非該材料之某些性質爲已知者，即不能在實際上加以利用。若干性質祇有在試驗室內作過適宜之試驗後，始對於我們有用。另外在工程方面的許多重要問題，也不能用理論的方法有效地加以處理，而試驗的計量方法乃成爲在實行上所必需者。材料力學在過去之進展，理論與試驗二者成爲一項迷人之混淆，在若干實例中，試驗已指陳其結果，將爲有用之途徑，而在其他若干實例中，理論亦復如是。著名人物如達文西（ Leonardo da Vinci 1452 − 1519 ）及伽里略（ Galileo Galilei 1564 − 1642 ），曾作過若干試驗以決定線、桿及樑之強度，雖然彼等並未發展出來任何適當的理論（按現在的標準）以解釋彼等之試驗結果。與此正好相反，有名的數學家尤勒（ Leonhard Euler 1707 − 1783 ）在1744年曾發展成功柱之數學理論，並算出柱之臨界載重，在有任何試驗的證據存在，足以表示尤勒氏結果之重大意義之前，尤勒氏之理論結果，被擱置未予採用達若干年，雖然現在這些理論尚構成長柱理論之根據垂二百三十年之久。*

將理論之誘導與由試驗所決定的各項材料性質，合併在一起的重要性

* 有關材料力學的歷史，由達文西及伽里略，見參考書 1-1,1-2 及 1-3 。

，當我們進行關於此一門學科之研究時，將愈益顯明。在本章內我們將開始討論若干基本概念，如應力與應變，並在其後研究簡單之結構元件之承受拉力、壓力及剪力等。

1·2 應力及應變

應力及應變之概念，可由考慮一根等截面桿（ bar ）（見圖 1 − 1 a ），這種基本的辦法，予以說明。一根等截面桿是一根在其整個長度內具有固定不變之橫截面及直的軸線之桿。在此插圖內，桿係被假想為在其兩端承受軸向力 P 者，軸向力 P 將使該桿產生均勻之拉長或拉力（ tension ）。在與軸線成直角之方向內，作成一個人為的切口（截面 m m ）通過該桿，我們可將該桿之一部分隔離，使其成為一個隔體（ free body ）（見圖 1 − 1 b ）。在其右端，施加拉力 P，在其另一端，將有若干力存在，代表該桿被移去部分施加於剩餘部分上之作用。此若干力將繼續分佈於該

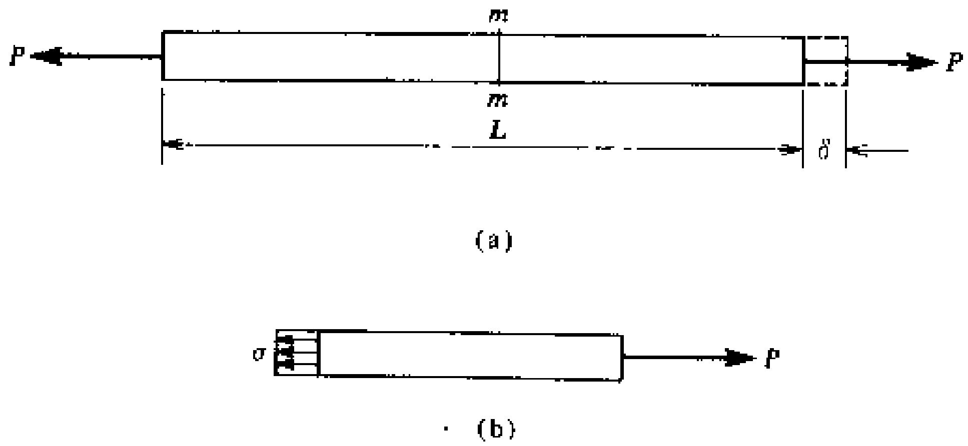


圖 1 · 1 受拉力之等截面桿

截面上，與靜水壓力繼續分佈於一個浸於水中之面上相類似。力之強度，即在每個單位面積上之力，則被稱為應力（ stress ）通常採用希臘字母 σ 表示之。假設應力係在該截面作均勻分佈者（見圖 1 − 1 b ），我們可以很容易看出其合力等於強度 σ 乘以該桿橫截面之面積 A 。此外，如在圖 1 − 1 b 內所示該物體之平衡狀況，我們也可以看出此一合力其大小必需等於力 P 而方向相反。因此，我們即得到

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1-1}$$

式，作為在一個等截面桿內均佈應力之方程式。此一方程式表示應力為力之若干單位除以面積——例如，每平方吋若干磅（psi）或每平方毫米若干牛頓（N/mm^2）。在該桿件被力 P 拉長時，如圖中所示，其結果所

得到之應力為拉應力（ tensile stress ）；若此等力之方向反轉，將使該桿被壓縮短，則此等力將被稱為壓應力（ compressive stresses ）。

關於方程式（ 1 － 1 ）為正確無誤之必要條件，為應力 σ 必須均勻分佈於桿之截面上。若該軸向力 P 於經過該截面之重心處起作用，則此項條件可以實現；此項事實可用靜力學證明之（見習題 1 · 2 － 1 ）。當載重 P 不在重心上作用時，其結果該桿將呈彎曲，而需要一種比較繁複之分析工作（見第 5 · 10 節）。此書全部均假設所有一切之軸向力，一律在截面之重心處施加，除非特別聲明與此正好相反。除另外聲明者外，通常假定物體本身之重量可以略去不計，如在討論圖 1 － 1 內之桿時所作過的假定。一根負荷軸向力之桿，其全部伸長量將用希臘字母 δ 表示之（見附圖 1 － 1 a ），而在每個單位長度內之伸長量，稱為應變（ strain ），於是可用方程式

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{1-2}$$

決定之。其中 L 為桿之全長。應注意者，應變 ϵ 為一個無次元數量（ non-dimensional quantity ）。只要應變係在桿之整個長度內均勻一致者，則一律均可從方程式（ 1 － 2 ）內精確獲得其結果。若桿所受者為拉力，則該應變為拉應變（ tensile strain ）代表該材料之伸長或拉長；若桿所受者為壓力，則該應變為壓應變（ compressive strain ），意指該桿內相鄰接之各截面相互移得更為靠近。

1 · 3 拉力試驗

在某種特殊材料內，應力與應變之關係，均用拉力試驗（ tensile test ）加以決定。該項材料之樣品，通常係採用正圓形桿，被安置於一座材料試驗機之內，使其受到拉力。在增加載重時，測量在桿上所受之力及桿之拉長量。在桿內之應力，係用桿之截面面積除其所受之力求得。而應變係用發生該項拉長量之長度除產生之拉長量求得。照這樣去做，即可求得該材料一個完整的應力－應變圖（ stress-strain diagram ）。

結構鋼（ structural steel ）之應力－應變圖的典型形狀，示於圖 1 － 2 a 內，圖中軸向之應變點，繪在水平面上，而與其相當的應力，則由曲線 *OABCDE* 之縱標表出。從 *O* 到 *A* 點，應力與應變互成正比，該圖成直線形的（ linear ）。在 A 點以後，介於應力與應變間之直線形的關係不再存在；因此在 *A* 點之應力被稱為比例極限（ proportional limit）。如為低炭鋼（ low-carbon steel ）（即結構鋼），此項比例極限通常

介於200N/mm² 與250N/mm² 之間，若屬高強度鋼（high-strength steel）材，可能比此值大出很多。在載重繼續增加時，應變將比應力增加迅速，一直到B點，拉力雖無些許增加，但有相當大之伸長發生。此種現象稱爲該材料之屈伏（yielding）。在B點之應力稱爲屈伏點（yield point）或屈伏應力（yield stress）。在BC這一段區間，該項

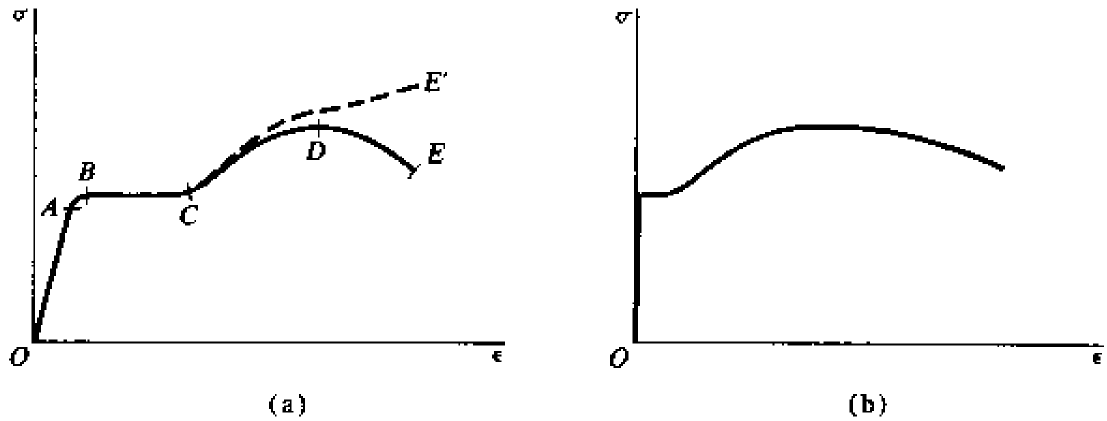
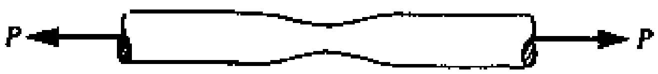


圖1．2　結構鋼之典型應力－應變曲線，(a)示意圖（未按比例），(b)按比例尺繪出

材料稱爲已變成塑性（plastic），而該桿可能產生實際塑性伸長之總額，約爲出現比例極限時爲止的伸長量之10倍至15倍。在C點該項材料開始應變硬化（strain harden），並對載重之增加呈現另外增加的抵抗力。像這樣，應力將隨更進一步的伸長而增加，並在D點應力將達到其最大値或其極限應力（ultimate stress）。在此點以外，載重減少，桿繼續更拉長些，最後試樣將在圖之E點處發生碎裂縫。

在該桿伸長時，同時將發生橫向的收縮，其結果爲該桿截面面積之減小。此種現象一直到C點爲止，對於應力－應變圖並無影響，但在此C點之外，由於截面面積之減小，對於應力之計算值，將有顯著影響。該桿顯著之頸縮現象（necking）必將出現，（見圖1－3）。若採用頸縮部分



Fi圖1．3　一根受拉力桿之頸縮

狹小之截面面積來計算σ時，則將發現實在的應力－應變（true stress-strain）曲線將會順着虛線CE'。其實在達到極限應力DE積之後，該桿能負的全部載重，確實將爲減少。此項減少係由於面積之減小，而非

材料本身損失其強度之故。該項材料在實際上係抵抗應力，逐漸增加一直到失敗點爲止。但對於大多數實際應用爲目的，根據該試樣原來的截面面積而繪就之常用應力 - 應變曲線（conventional stress-strain curve）$OABCDE$，對於設計用途，可提供良好的資料。

在圖 1 － 2 a 內所示，係表示鋼材應力 - 應變曲線之一般性的特點而繪就者。但其比例則不是眞實的，因爲在以前已經提到過，在 B 點至 C 點間所發生的應變，可能大到發生於從 O 點至 A 點者的 15 倍。另外從 C 點至 E 點之應變，甚至可能更大於比從 B 點至 C 點的應變。一幅按適當比例繪就之圖，示於圖 1 － 2 b 內。在此圖內，從 O 至 A 的應變，如與從 A 至 E 的應變作一比較，因其過小，以致看不出來，而該圖之直線形部分，却顯得像一條垂直線。

在一個很明顯的屈狀點之後，跟著便是很大的塑性應變，其存在有多少是屬於鋼材之獨特性質。鋼材爲目下最普遍使用的結構金屬。鋁合金在

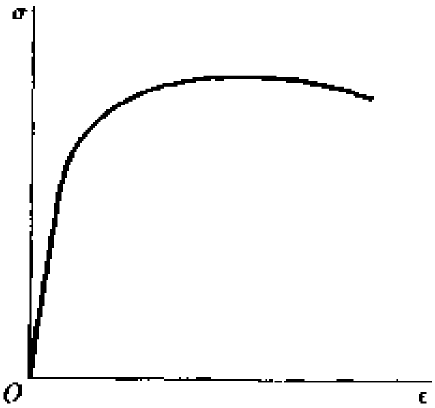


圖 1 · 4　結構用鋁合金之典型的應力 - 應變曲線

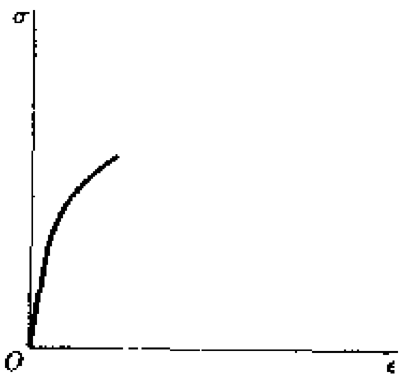


圖 1 · 5　脆性材料之典型的應力 - 應變曲線

從直線形至非直線形區域之間，呈現一種比較更爲漸進的轉換，如圖 1 － 4 內所示的應力 - 應變曲線。鋼材與許多鋁合金在破壞之前，將經過很大的應變，而被列在具延展性（ductile）的一類。在另一方面，材料之易於脆碎者，將在比較低微的應變値（見圖 1 － 5）下破壞。脆性（bri - ttle）材料包括陶器、鑄鐵、混凝土、某些金屬之合金及玻璃等。

對於各種受壓力的材料，亦可以獲得與這些受拉力者類似的應力 - 應變圖，且諸如此類之應力如比例極限、屈伏點、及極限應力等均可以確定。關於鋼材，經發見其比例極限及屈伏應力在受拉力及壓力者均將一律相同。當然，關於許多脆而易於破碎的材料，其受壓力時的各種特性應力，將比受拉力者大得很多。

彈性（ elasticity ）

圖 1－2、1－4及1－5中所示的各應力－應變圖，說明載重而受有拉力時各種材料的行態。在該項材料試樣上的載重被卸去時，即載重逐漸減少至等於零時，在載重時所顯現出的伸長，將有一部分或者全部消失。一種材料的性質，由於此種性質以致該項材料在卸去其載重時，有恢復至其原來形狀的傾向者稱爲彈性（ elasticity ）。若桿完全恢復至其原來形狀，則此桿稱爲完全彈性的（ perfectly elastic ）；若桿僅能部分恢復其原來形狀，則稱爲部分彈性的（ partially elastic ）。在後一種情形中，當載重被移去之後，仍遺留在桿內的伸長，稱爲永留變形（permanent set ）。

當作某種材料的拉力試驗時，載重可使其停在某一選就之值（較小之值），並在其後移去。若沒有永留變形，亦即在桿內的應變回到零，則該材料一直到選就之載重值所代表的應力爲止是彈性的。此種加施載重及卸去載重的過程，可以挨次對於較高之載重值重覆再作若干次。最後終將達到某一應力，並非全部應變均能在卸去載重時立即恢復。照這樣代表彈性區上限界的應力即可決定；此項應力稱爲彈性限（ elastic limit ）。關於鋼，和若干其他金屬一樣，彈性極限與比例極限幾乎相互重合。但在一種如橡皮一類材料，其彈性性質將在比例極限以外仍能繼續下去很遠。

容許應力（ allowable stress ）

在設計一座結構時，必須確保在使用的狀況下，該結構能充分履行其原爲此項作用而修建者。從該結構負荷各項載重之觀點看來，在該結構內之最大應力必須經常保持在比例極限之下，因爲只有如此，在加上此項載重之後再將其移去，纔不會有永留變形。爲了酌量留出該結構偶然的超載，修建時可能不太精確，以及在該結構之分析內可能有未知因素等，一併加於其內。通常係由選用一個在比例極限以下的容許應力（或工作應力）（ working stress ）以提供一個安全因數（ factor of safety ）。例如在結構鋼之設計中，對於鋼材之屈伏點爲 250N/mm² 者，常採用165 N/mm² 爲其容許拉應力。因此，其對屈伏之安全因數爲 1.52 。另有其他情形，其工作應力係對照極限應力，採用一個安全因數而確定者。通常對於容易破碎的材料如混凝土之類係如此辦理，至於材料如木料之類，亦復如此。一般說來，在用容許應力爲根據來設計時，可採用下列兩個方程式中之一，以獲得工作應力 σ_w

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n_1} \quad 或 \quad \sigma_w = \frac{\sigma_u}{n_2} \tag{1-3}$$

其中 σ_y 及 σ_u 分別代表屈伏點及極限應力，而 n_1 及 n_2 分別爲其安全因數。決定適當之安全因數爲一件很艱難之事情，因其有賴於所採用材料

之型式及該結構之使用情況。在載重爲動載重（或爲突然施加之載重或爲在數量上有變動者）時，例如發生於機械配件、飛機、橋樑等之上者，將比同樣結構而僅有靜載重者，需要一個較大的安全因數，蓋因顧及疲勞失敗可能性之故。

代替採用容許應力之另一個辦法，爲採用一個防止全部坍毀之安全因數以設計該結構。載重量（或若干個載重量）將使該結構坍毀者必須先行決定，最後，用一個選擇適當的載重因數（ load factor ），以除極限載重（ ultimate load）以確定其容許載重（ allowable load ）（或工作載重 working load ），此種設計方法稱爲極限載重設計（ ultimate load design ），並可以看出在此種情況下，在結構內實際應力之數量於決定工作載重時，並無直接的任務。在設計金屬結構時，工作應力方法及極限載重方法兩者一律通用。關於若干簡單結構極限載重之決定將在以後第1・8及9・5各節內討論。

1・4 線型彈性及胡克氏定律

大多數結構材料，在其應力－應變圖上均有一段開始的區間，在此區間內，該項材料的行態，將爲彈性的且又爲直線形的。在鋼的應力－應變圖上，從O至A這一區間，即爲一個實例；其他各例，如圖1－4及1－5內各曲線在此例極限以下的區間。若一種材料之行態爲彈性的，且在應力與應變間也呈現線形的關係，則該項材料稱爲線型彈性（ linearly elastic ）。此爲許多固體材料一種非常重要性質，包括多數金屬、塑膠、木料、混凝土及陶器在內。一根受拉力桿，介於其應力與應變間的線型關係，可用下列的簡單公式表示

$$\sigma = E\epsilon \tag{1-4}$$

其中E爲一比例常數，稱爲該材料的彈性模數（ modulus of elasticity ）。彈性模數，可以看出來是在應力－應變圖內線型彈性區間的傾斜度。各種材料均不相同。在表1－1內，列有若干代表性的E值。（注意E與應力的單位相同）有許多種材料其受壓力的彈性模數與受拉力的彈性模數相同。在計算時，拉應力及應變通常均被認作正號，壓應力及應變則作爲負號。彈性模數有時稱爲楊氏模數（ Young's modulus ），係因英國科學家楊氏（ Thomas Young 1773－1829 ）曾經研究過桿的彈性行態之故。方程式（1－4）通常稱爲胡克氏定律（ Hooke's law ），係因另一英國科學家胡克氏（ Robert Hooke 1635～1703 ），首先用試驗確定載重與伸長間的線型關係。（見參考書1－7與1－8）

附表 1－1　各種材料之典型力學性質

材料	密度 (tonnes/m³)	彈性模數 E (kN/mm²)	剪力彈性模數 G (kN/mm²)	屈伏應力 σ_y (N/mm²)	極限應力 σ_u (N/mm²)
鋁	2.68	70	28	140	210
鋁合金	2.75–8	70	28	100–350	140–400
黃銅	8.30	97	39	100–400	275–520
青銅	8.30	97	39	70–380	200–400
混凝土（壓力）	2.35	15–30			15–70
銅	8.86	103	41	70–300	200–400
鑄鐵	7.75	103	41	40–275	110–400
鎂	1.77	40	16	80–120	140–210
軟鋼	7.83	200–207	75–82	200–400	350–700
高強度鋼	7.83	200–207	75–82	350–1100	700–2000
鎢	18.80	345	138		4100
結構用木料（壓力）	0.3–0.8	7–15			28–70

*附註：這些性質中的若干項，其變化很大，視材料的成分、熱處理、冷作等而異。除另行聲明者外，表列諸性質係指拉力而言。

桿件受單純拉力時（見圖 1－1 a），其軸向應力爲 $\sigma = P/A$，軸向應變爲 $\epsilon = \delta/L$，一如以前由方程式（1－1）及（1－2）所提供者。將此項結果與胡克氏定律（$\sigma = E\epsilon$）合併，則桿的伸長，可由下列之方程式推得

$$\delta = \frac{PL}{EA} \tag{1-5}$$

此方程式表示一根線型彈性桿的伸長，將與所受載重及桿長成正比，並與其彈性模數及桿的截面面積成反比。乘積 EA 稱爲該桿的軸向剛度（axial rigidity）。

在圖 1－1 a 內桿件的韌性（flexibility）被解釋爲，由於單位載重所致的撓度（deflection）；因此可從方程式（1－5）看出，桿件的韌性爲 L/EA。與此類似的情形，桿件的勁性（stiffness）可以解釋爲產生單位撓度所需之力；因此，勁性等於 EA/L，亦即爲韌性的倒數。此韌性及勁性，在各種結構分析工作中，佔有頗爲重要的任務，以後將在第 11 章內說明之。

卜桑氏比（Poisson's ratio）

桿件受拉力時，其軸向伸長常伴隨橫向的收縮，即桿之寬度，在其長度增加時將會變小。橫向應變對軸向應變之比值，在彈性範圍內為一常數，稱為卜桑氏比（Poisson's ratio ν）。即

$$\nu = \frac{\text{橫向應變}}{\text{軸向應變}} \tag{1-6}$$

此一常數，係用法國名數學家卜桑（S.D.Poisson 1781－1840）氏而命名者，氏曾試圖用材料的分子理論以計算此一比值。如在一切方向內均具同一彈性的材料，稱為均等性材料（isotropic materials），卜桑氏曾求得此種材料的 $\nu = 0.25$。實際將金屬所作的試驗求 ν 值，常在 0.25 至 0.35 範圍內。

若已知一根受拉力桿的卜桑氏比及其彈性模數，則其體積變化便可算出。體積變化如圖1－6所示，此圖表示一微小的材料元體，係從受拉力

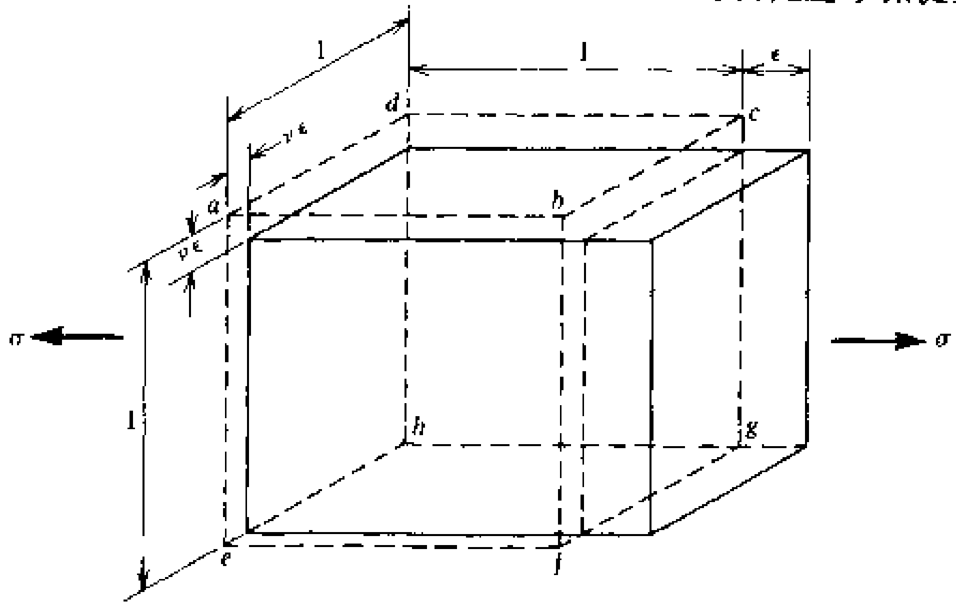


圖1．6 受拉力單位立方體之體積變化

桿切下。元體原來的形狀如立方體 $abcdefgh$，假設各邊均為單位長度。軸向力之方向已在圖內由表示應力 σ 而被指定。在載重方向內，單位立方體的伸長為 ϵ（等於 σ/E），而在兩個側面方向內，立方體側面各邊的縮短皆為 $\nu\epsilon$。因此，該立方體的截面面積業已依比值（$1-\nu\epsilon$）^{2}：1而減小，而體積則依比值（$1+\epsilon$）×（$1-\nu\epsilon$）^{2}：1而增加。將此最後比值左側的乘積展開，並將式內包含 ϵ 的平方及立方各項，因 ϵ 為一種微小數量而捨去不計，則此比值即可簡化成（$1+\epsilon-2\nu\epsilon$）：1

。該立方體體積變化等於最後體積減去最初體積，或 ϵ (1 － 2ν)。此一數量，稱爲單位體積變化（ unit volume change ），並可將其表示成下式：

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\nu) \tag{1-7}$$

在此方程式內，$\Delta V/V$ 代表體積變化 ΔV，對原來體積 V 之比値。此一方程式可用以計算受拉力桿的體積變化，若該桿的軸向應變 ϵ 及卜桑氏比値 ν 爲已知時。

因任何一種材料，在其受拉力時將減小其體積，似乎不甚合理。我們可從方程式（ 1 － 7 ）下一結論，即 ν 必須永遠小於 0.5 。橡膠及石臘爲兩種在受拉力時幾乎沒有體積改變的材料。因此這一類材料的 ν 値將接近 0.5的限界値。在另一方面，軟木的 ν 値幾乎等於零。至於混凝土，其 ν 値大致爲 0.1 。

以上關於受拉力時所出現的橫向收縮之討論。除縱向壓力將伴隨發生橫向膨脹外，亦可應用於受壓力情形。以實用爲目的，不論該項材料係受拉力或受壓力，ν 値均爲相同。

1．5 軸向載重桿之撓曲

有種種不同實例，其中包含軸向受力桿，其撓曲可用方程式（ 1 － 5 ）求得。例如，不但在其兩端，且在其中間受一個或多於一個點上力之桿，例如圖 1 － 7 之桿，其撓曲可很容易決定。決定該桿撓曲的步驟，第一步

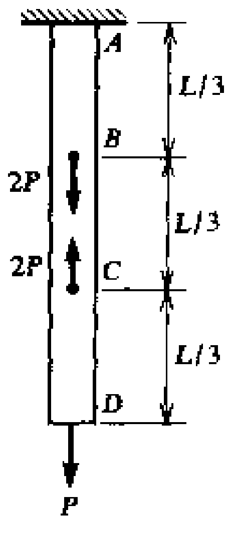


圖1．7 中間有軸向載重之桿

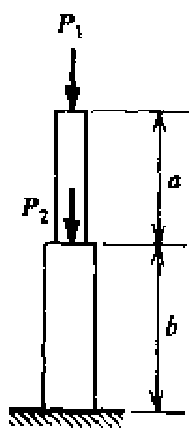


圖1.8 截面有改變之桿

爲獲得在該桿每一部分上所受的軸向力，即在 AB，BC及CD各部分上之力，並在其後分開計算每一部分的伸長（或縮短）。於是再將這些在長度方面之變化依代數學的方法加在一起，以求出全桿在長度方面的總變化。與此相同方法，也可適用於由幾個截面面積不同的各部分所組成之桿，如圖1－8所舉之例。因此我們即可看出，就一般情形而言，由幾個部分具不同軸向力，或不同截面面積所構成之桿，其全部伸長 δ 可從下列方程式求得

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \tag{1-8}$$

式中之註脚 i 爲一個指示標，用以認明桿的各部分，而 n 則爲部分的總數。

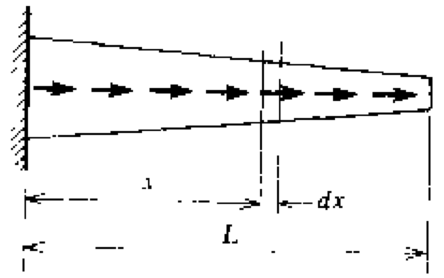


圖1．9 截面及軸向力均有改變之桿

在軸向力或截面面積順沿着桿的軸線連續改變時，則方程式（1－8）即不再適用。代之者，爲桿的伸長可考慮桿的一個微分元體，爲其伸長獲得一個式子，並再求桿全長的積分。此一想法舉例說明於圖1－9內，假設漸細之桿承受連續分佈的軸向載重，其結果桿內的軸向力不斷改變。其長度爲 dx 的一個元體，可自桿上切下，元體距桿左端的距離爲 x。在該元體上起作用的軸向力 P_x 及該元體截面面積 A_x，兩者均須用一個 x 函數表示之。該元體伸長的方程式成爲

$$d\delta = \frac{P_x\,dx}{EA_x}$$

該桿的全部伸長爲

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x\,dx}{EA_x} \tag{1-9}$$

在那些實例中，方程式（1－9）內積分符號後面的式子，若不能很容易在一種封閉形式中求得其積分，則可採用一種數字方法以估計該積分。並且方程式（1－9）只能在桿的各邊間之角度很小時始能為漸細的桿提供準確之結果。例如一個特殊例，我們可以注意到假設各邊間的角度為20°，則在計算垂直應力用 $\sigma = P/A$ 式時所起的最大誤差僅為3%。如為較小角度，則誤差將更小。若桿漸細的情形很大，即需要更準確的分析。

<u>桁架的撓曲</u>（deflections of trusses）

若簡支桁架的每根單獨桿件長度變化為已知，則該桁架各接頭的撓度可用幾何學決定之。各桿長的變化則用業已敘述的方法求得。為舉例說明求桁架撓曲的幾何學方法起見，讓我們試定如圖1－10a 內桁架接頭B的變位。在該桁架內兩桿件的兩力 F_{ab} 及 F_{bc} 為

$$F_{ab} = P\cot\theta \qquad F_{bc} = P\csc\theta$$

其中 F_{ab} 為拉力，而 F_{bc} 為壓力。兩桿的長度變化為

$$\delta_{ab} = \frac{PL_{ab}\cot\theta}{EA_{ab}} \qquad \delta_{bc} = \frac{PL_{bc}\csc\theta}{EA_{bc}}$$

決定接頭 B 的變位，我們開始假設桿件 AB 的伸長量為 δ_{ab}（見圖1－10b）因此其末端係在 B_1 點上。於是以 A 為圓心 AB_1 距離為半徑繪一圓弧。因 B 點的變位很小，此一圓弧可用一條通過 B_1 點且與 AB 軸線成垂直之線代替。與此相似，桿件 BC 係假設將縮短之量為 δ_{bc}，將其末端 B 帶至 B_2 點。於是繪就另外一個圓弧，其中心在 C 點而其半徑等於距離 CB_2。此一圓弧用垂直於 BC 並通過 B_2 點之線代替。此二垂直線交於 B' 點，此點即為接頭 B 的最後位置。於是從 B 點至 B' 點的矢量（

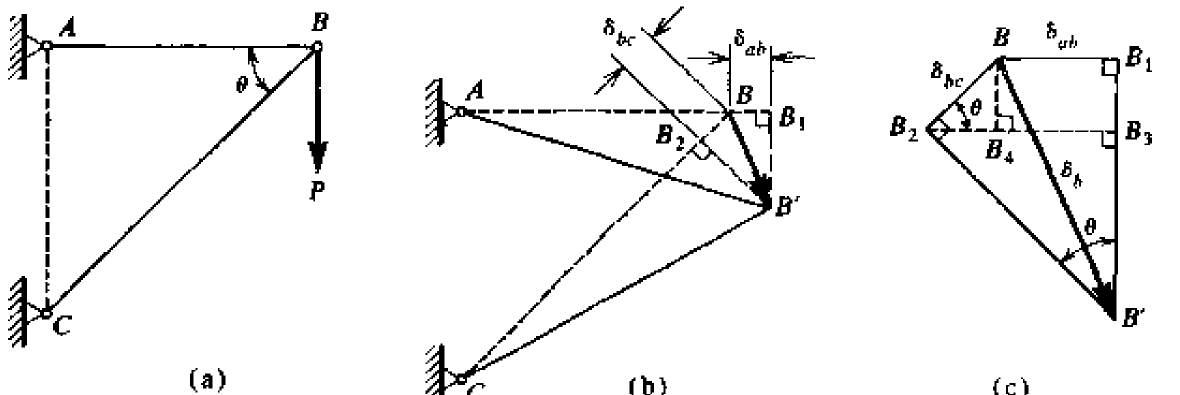


圖1·10 用韋氏圖求結構之撓度

vector）即代表該桁架接頭 B 的變位 δ_b。

圖1－10b 的變位圖，用較大的比例尺重繪於圖1－10c 內，以

便幫助作計算。從該圖內可以看出 δ_b 的水平分量爲 δ_{ab} ，而其垂直分量係由兩分量（ B_1B_3 和 B_3B' ）所構成。距離 B_1B_3 ，與 BB_4 間之距離相同，等於 $\delta_{bc}\sin\theta$ 。距離 B_3B' 可從三角形 B_2B_3B' 求得，此三角形的 B_2B_3 邊等於 $\delta_{bc}\cos\theta+\delta_{ab}$ 。按照此種辦法進行，我們可以求得 δ_b 的垂直分量爲

$$B_1B' = \delta_{bc}\sin\theta + (\delta_{bc}\cos\theta + \delta_{ab})\cot\theta$$

$$= \delta_{bc}\csc\theta + \delta_{ab}\cot\theta$$

在已求得接頭 B 變位的水平及垂直分量後，我們即不難求得變位 δ_b 本身合成後之值。

此種示於圖 1 － 10c 的變位圖，是求桁架撓曲時的重要工具。此類變位圖稱爲韋（ Williot ）氏圖，係由法國工程師韋樂特（ J.V.Williot ）在 1877 年時提出。亦有用分析方法以求桁架的撓度，一種稱爲單位載重法（ unit-load method ），是此種型式中最有力的方法，將在第 11・3 節敘述。

1・6　靜不定結構

在以前許多討論的全部中，均一律假設在結構桿件內的軸向力，可用靜力學來決定。此類結構稱爲靜定結構（ statically determinate ）。但另外有些實例，其中靜力平衡方程式不夠決定所有一切在桿件內之力及反力。對於此類靜不定結構（ statically indeterminate structures），桿件力與反力要將該結構的變位一併考慮在內才可求得。一個靜不定結構簡單之例如圖 1 － 11a 所示。桿件 AB 在其兩端被連接於牢固的支承上，並在其中間 C 點上受有軸向力 P 。在桿件兩端將發生反力 R_a 及 R_b ，但此兩個反力不能只用靜力學求得＊。該桿件僅有的靜力平衡方程式爲

$$R_a + R_b = P \tag{a}$$

此式將兩個未知反力均包含在內，因此不足以將兩個反力算出。必須從該桿件的撓度獲得第二個方程式。

有兩種通用的方法可資利用，以獲解靜不定問題所需的另外方程式。

＊爲將反力與在該結構上的載重辨別清楚起見，凡是反力通常均畫一道短斜線橫過代表反力的箭頭，如圖 1 － 11a 所示。

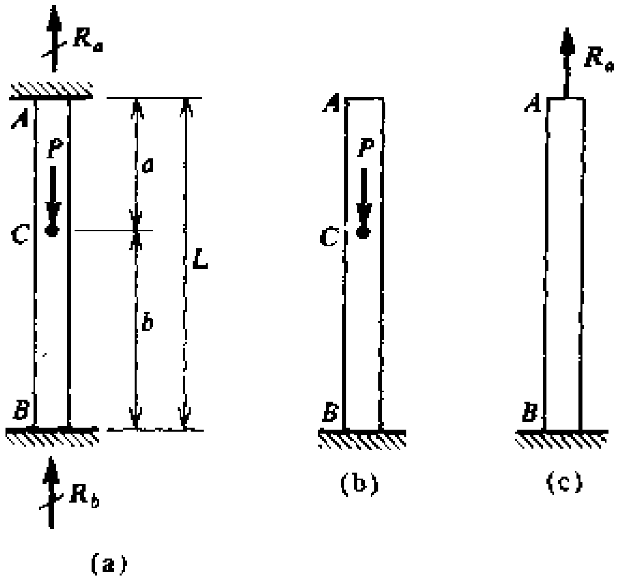


圖 1‧11 靜不定桿（用力之分析方法）

我們開始在選用反力中的一個作爲未知數。在此例題內，選用 R_a 。若此一數量可以求得，則另外一個反力即可用靜力學求得（見方程式 a ）。未知數量 R_a 若被移去，將稱爲靜贅力（ statical redundant ）如圖 1－11b 內的情形，剩下的結構即爲一個靜定而且穩定（ stable ）的結構。因此，從構成一個結構使其能支承載重這一觀點看來，在末端 A 的反力並不需要，因此 R_a 爲一贅力。在解除該贅力後所剩餘的結構，稱爲被解除結構（ released structure ）或稱爲原結構（primary structure）。

至此，先考慮載重 P 對於在被解除結構內 A 點變位的影響 （圖 1－11b）。此項變位等於

$$\delta_P = \frac{Pb}{EA}$$

且是向下的。下一步考慮贅力 R_a 對 A 點變位的影響（見圖 1－11c ）。應注意現在 R_a 已被想像成作用於已被解除贅力結構上的一個載重。由於 R_a ，使 A 點的向上變位爲

$$\delta_R = \frac{R_a L}{EA}$$

由於 P 及 R_a 二者同時起作用，A 點的最後變位 δ ，可由合併 δ_P 及 δ_R 求得。於是將向下的變位當作正的，我們可得

$$\delta = \delta_P - \delta_R$$

只要A點的實際變位δ等於零，則前一個方程式化爲

$$\delta_R = \delta_P \tag{b}$$

或

$$\frac{R_a L}{EA} = \frac{Pb}{EA} \tag{c}$$

從上式可得

$$R_a = \frac{Pb}{L} \tag{d}$$

由此求得 R_a ，我們可從靜力學方程式（方程式 a ）求得

$$R_b = \frac{Pa}{L}$$

於是，該桿件的兩個反力一律求得。

由上面關於分析靜不定桿件的方法，在此可以扼要敍述如下：將未知各反力中的一個當作贅力，由於將桿件切斷並移去該支承而使該贅力自結構上解除。於是將已被解除贅力的結構，現已成靜定而且穩定的結構，使其承受實際的載重P及贅力本身。算出由這兩個數量所引起的變位，並將此兩個變位合併於變位適合方程式（ equation of compatibility of displacement)（ 方程式 b ）。此一變位適合方程式表示屬於變位的一種情況。意即，在此一實例中其變位δ等於零。在以力爲項的變位式，代入變位適合方程式（ 方程式 c ）內之後，我們即可解該式以求未知力（ 方程式 d ）。最後即用靜力學以求出剩下的未知力。

此種分析方法，取力爲未知量者，常稱爲力法（ force method ）。此種分析方法亦被稱爲韌性法（ flexibility method ），因在適合方程式內（ 方程式 c ），未知數（ R_a ）的係數（ L/EA ）爲韌性（ flexibility ）。此法可比本例更爲普遍的應用，且可應用於具有許多贅力的結構上，如在下一節內所指出者。在本節內，僅用頗爲簡單的靜不定結構系統只有一個贅力予以考慮。

現在讓我們轉至第二個一般性的分析方法，並用來求解同一習題。（見圖 1 － 12a ）。於採用第二個方法時，我們利用C點的變位 δ_c 作爲未知數，C點則爲該桿兩部分的連接點。在該桿頂部及底部的兩個反力 R_a 及 R_b 可用 δ_c 來表示如下：

$$R_a = \frac{EA}{a}\delta_c \qquad R_b = \frac{EA}{b}\delta_c \tag{e}$$

在寫出此兩個公式時，我們曾假設 δ_c 向下爲正，因此在桿的上部產生拉力，在桿的下部產生壓力。下一個步驟是，將桿內的 C 點隔離成一隔離

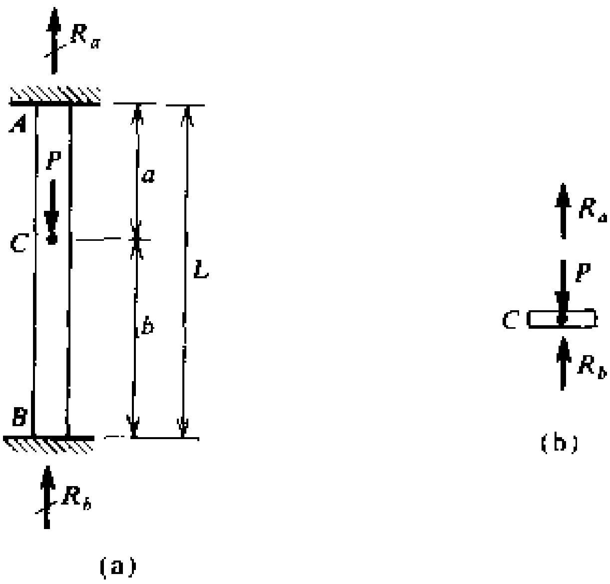


圖1・12　靜不定桿（用變位之分析方法）

體，（見圖 1 － 12 b）並考慮其平衡狀況。作用於該隔離體上的爲向下的載重 P，在上部的拉力 R_a 及在下部的壓力 R_b。於是由靜力學可成立

$$R_a + R_b = P \tag{f}$$

或

$$\frac{EA}{a}\delta_c + \frac{EA}{b}\delta_c = P \tag{g}$$

從上式可得

$$\delta_c = \frac{Pab}{EAL} \tag{h}$$

已知 δ_c 後，由方程式（ e ）可得

$$R_a = \frac{Pb}{L} \qquad R_b = \frac{Pa}{L}$$

這些結果，和以前所獲得的完全相同。

摘要言之，第二種分析方法開始採用一個適當的變位作爲未知數。此一變位必須如此的選擇，以便在該結構的各單獨部分內的力，可用該變位來表示。於是再將此幾個力合併在一個平衡方程式內。（方程式 f ）。在將力的式子以變位爲項代入後（方程式 g ），即可將未知的變位解出（方程式 h ）。最後從變位求出各力。

此一分析方法稱爲變位法（ displacement method ）或勁性方法（ stiffness method ）。前一個名稱係從利用變位作爲未知數得名，後一個名稱則起自該一事實，即在平衡方程式內的各係數（ EA/a 及 EA/b ）均爲勁性（ stiffnesses ）之故。此法，亦爲一個很普遍應用的方法，可用來分析許多種結構。

如爲大結構，在力方法及變位法間挑選一個合用者，將視許多因素而定。例如其結構的幾何形狀，及接頭數目等。但在本節內，我們只考慮那一類問題，在此類問題中，這一種方法大致與另一種方法同樣適用良好，因此，在彼此間的挑選，多少有點任意的。以後在第七章及第十一章中，我們將再作靜不定結構之分析 * 。

【例題】1. 作爲第一個例題，試用力法分析圖 1 － 13a 內的平面桁架。假設桁架爲對稱，可看出在兩個外側桿內的力爲相等。於是從垂直方向諸內力的平衡，可得

$$2F_1\cos\beta + F_2 = P \tag{i}$$

此方程式包含兩個未知力（ F_1 及 F_2 ），因此需要另外一個方程式。

在此例題內，選擇力 F_2 爲贅力，在 BD 桿的下端（圖 1 － 13b ）截斷，以便將此力移去。（如有需要，可在其他任何一點將桿切斷）。在載重 P 於已解除的結構上起作用時（圖 1 － 13b ），接頭 D 的向下變位（可按前一節內敘述的方法求出）爲

$$\delta_P = \frac{PL}{2EA\cos^3\beta} \tag{j}$$

其中 L 爲垂直桿的長度，且各桿均被假設爲具有相同的軸向剛度 EA 。在贅力 F_2 於已解除的結構上起作用時，（圖 1 － 13c ），截斷的桿 BD 將由於被 F_2 向下拉而處於拉力中，同時有一相同但方向相反的力 F_2 在

* 從歷史觀點，Euler 於 1774 年首先分析一個靜不定系統；氏考慮一個在彈性基礎上具有四條腿的剛性桌子。下一步爲 Navier 氏所完成，氏於 1825 年指出靜不定結構的反力，可由該結構的彈性一併考慮在內而求得。Navier 曾經解過一個如圖 1 － 14 內所示的桁架。

接頭 D 上向上作用。後一個力將使接頭 D 向上變位等於下列之量（與方程式(j)比較）

$$\delta_F = \frac{F_2 L}{2EA\cos^3\beta} \tag{k}$$

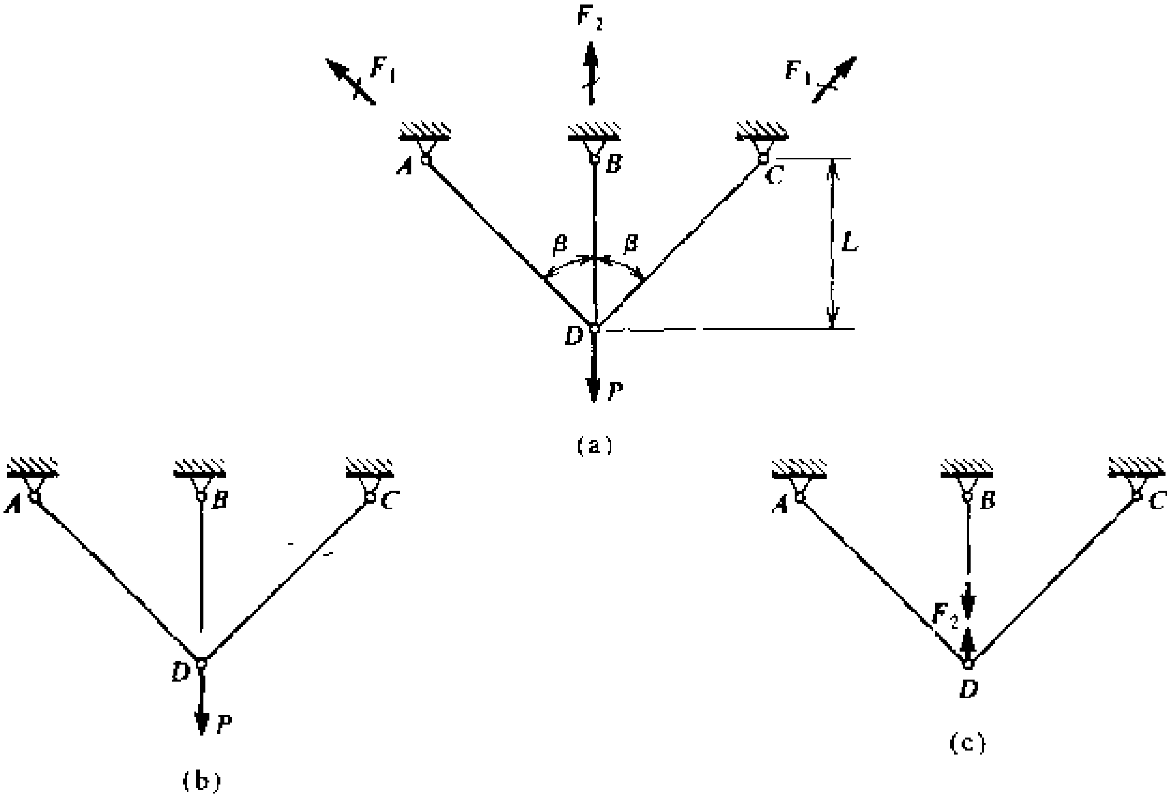


圖 1.13　（例題 1 ）靜不定結構（用力的分析法）

由於 P 及 F_2 同時起作用，接頭 D 的全部向下變位爲 $\delta_P - \delta_F$。我們也必定同時看到 BD 桿將伸長等於 F_2L/EA。在接頭 D 處的變位適合條件所表示的一項事實，即接頭 D 的向下變拉，等於 BD 的伸長量；因此得

$$\delta_P - \delta_F = \frac{F_2 L}{EA}$$

將方程式(j)及(k)代入上式，並解該方程式求得 F_2，其値爲

$$F_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\beta}$$

最後，從平衡方程式（方程式 i ），可得

$$F_1 = \frac{P\cos^2\beta}{1 + 2\cos^3\beta}$$

從這些結果，我們可以看出，在中間桿內的力，將大於在外側兩根桿內的力。

【例題】2. 在例題1內的桁架，另用變位法加以分析，以便提供兩種方法作爲比較。接頭D的變位 δ（見圖1－14a）作爲分析中的未知數

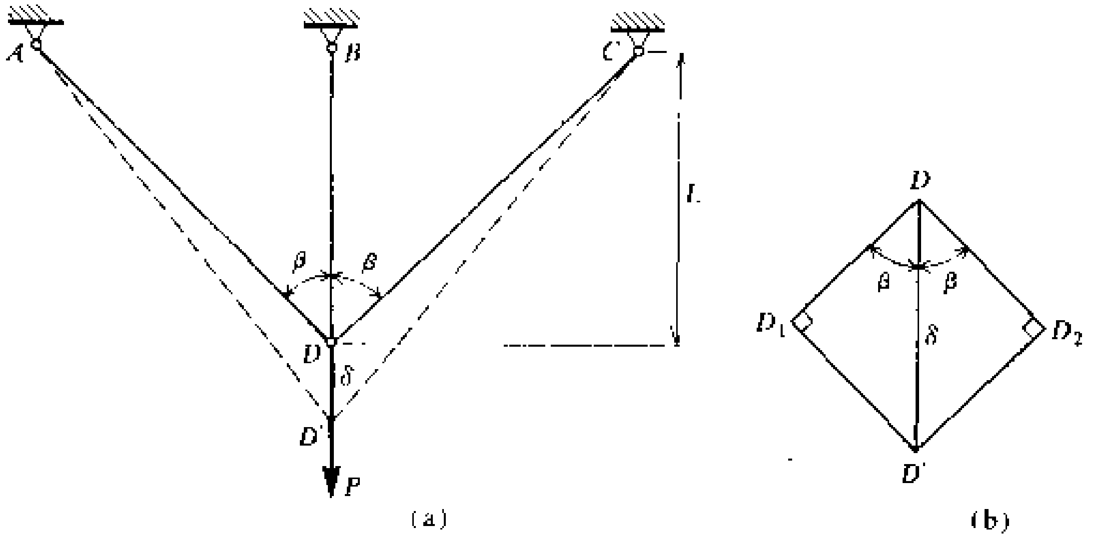


圖 1・14　（例題2）　靜不定結構（用變位分析法）

。在圖中的虛線，表示該桁架變位後的形狀，接頭D的韋氏圖則表示於圖1－14b內。DD_1 及 DD_2 各線分別代表 CD及 AD兩桿的伸長，DD' 線代表D點的垂直變位 δ。從該圖可以看出兩條斜桿的伸長爲

$$DD_1 = DD_2 = \delta \cos \beta$$

在斜桿內的力爲

$$F_1 = \frac{EA \cos \beta}{L} (\delta \cos \beta) = \frac{EA\delta \cos^2 \beta}{L} \tag{l}$$

在垂直桿內的力爲

$$F_2 = \frac{EA\delta}{L} \tag{m}$$

方程式(l)及(m)均用一個唯一的未知數，即變位 δ，以表示在各桿內的力。下一步爲利用靜力平衡方程式（方程式 i）。將方程式(l)及(m)代入方程式（i）內，求得

$$\frac{2EA\delta \cos^3 \beta}{L} + \frac{EA\delta}{L} = P$$

從上式可得

$$\delta = \frac{PL}{EA}\frac{1}{1+2\cos^3\beta} \tag{n}$$

至此，變位 δ 爲已知，在各桿內的力，即可由方程式(n)代入方程式(l)及(m)而求得。此種方法可爲 F_1 及 F_2 提供如例題1內所獲得的同樣結果。

【例題】3. 一個鋼圓柱及一個銅管（在圖1－15a 內標記爲 S 及 C）放在試驗機兩個頭部之間受壓力 P。試決定鋼與銅的應力及在垂直方向的應變。

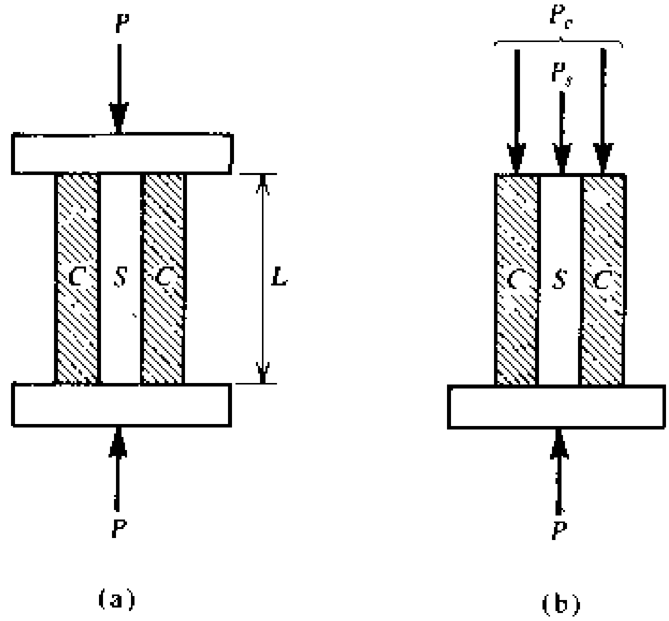


圖1・15 （例題3）靜不定系統

採用力法時，我們將在上方之鈑移去，並取一個如圖1－15b 的結構。未知力 P_s 及 P_c 分別代表在鋼及銅內的全部軸向力，用以下的靜力方程式表示三者間的聯繫：

$$P_s + P_c = P \tag{o}$$

鋼圓柱的縮短量爲 P_sL/E_sA_s，其中 E_sA_s 爲鋼圓柱的軸向剛度，銅管的縮短量爲 P_cL/E_cA_c，其中 E_cA_c 爲銅管的剛度。其適合條件，係基於鋼圓柱及銅管的縮短量，事實上必然相同，於是得成立

$$\frac{P_sL}{E_sA_s} = \frac{P_cL}{E_cA_c} \tag{p}$$

解聯立方程式(o)及(p)，我們可以算出鋼及銅內的力，分別爲

$$P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P \qquad P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P \tag{q}$$

這兩個公式，表示在鋼與銅內之力，各與其軸向剛度成正比例。

在鋼的壓力 σ_s ，可由 A_s 除 P_s 而獲得，在銅的壓應力 σ_c 亦可以同樣方式求得。壓應變 ϵ ，則兩種材料均為相同，可從虎克氏定律求得，其結果如下

$$\epsilon = \frac{P}{E_s A_s + E_c A_c} \tag{r}$$

此方程式表示所起的應變，等於全部載重除以鋼及銅各部分的軸向剛度之和。

【例題】4. 用變位法解上一例題。

在該例題內的未知變位，是在兩端的鈑的相對變位（relative displacement）δ ，此項變位與鋼及銅兩部分的縮短量相同。若以變位 δ 來表示，則力 P_s 及 P_c 分別為

$$P_s = \frac{E_s A_s \delta}{L} \qquad P_c = \frac{E_c A_c \delta}{L} \tag{s}$$

將此兩個式子代入平衡方程式內，得

$$\frac{E_s A_s \delta}{L} + \frac{E_c A_c \delta}{L} = P$$

由上式可以求得變位 δ 為

$$\delta = \frac{PL}{E_s A_s + E_c A_c}$$

現在，若將 δ 式代入方程式(s)，即得 P_s 及 P_c 兩值。這些結果與例題(3)所獲得者相同。再用長度 L 除 δ ，得應變 ϵ 值，與方程式(r)相同。

將例題(3)與(4)作一比較，表示在若干情形中，包括使用力法及變位法以計算兩者出力之量，比較起來並沒有什麼差別。雖然在觀點上永遠有根本的不同。在另一方面，讀者應當認識清楚，在比較更為繁難的問題中，兩種方法之間，可能有相當大的差別。若在圖 1 － 15 所示的系統，因增加其他材料的桿件而使此一例題更為複雜時，用變位法求解，可以照樣用上述方法計算依然頗為簡單。至於使用力法求解，則將變成更為麻煩並需求解另外增加的聯立方程式。在另外各種情形中，情勢可能正好相反，用力法，將提供比較簡易解法。

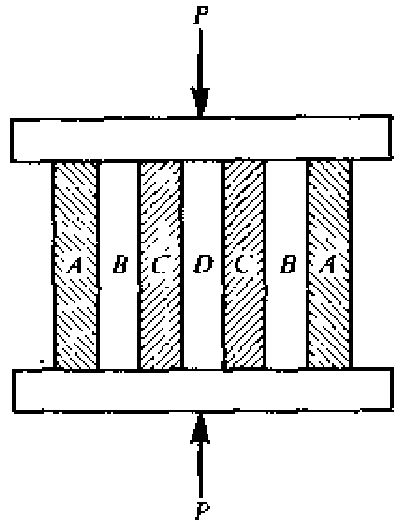


圖 1・16　靜不定系統

1・7 溫度及預加變壓之影響

一個靜定結構，在其整個結構內受均勻一致的溫度變化，不會產生任何應力，因該整個結構能自由膨脹或縮小。在另一方面，一個結構係按靜不定結構樣式受到溫度變化時，則將在構材內產生應力，稱為溫度應力（thermal stresses）。此項結論，可由一根一端以自由活動的桿件與另一根固端桿件（見圖 1－17a）作一比較，即可看出。前一種桿件，起均勻一致的溫度變化，將在整個桿件內起作用，使桿件的伸長為

$$\delta = \alpha L \Delta T \qquad (1\text{-}10)$$

在式中 α ＝溫度膨脹係數（見表 1－2），L ＝長度，及 ΔT ＝溫度增量。因為這種伸長是因無拘束而自由發生的，桿件中不產生應力。

表 1・2　熱膨脹係數的典型值

材料	熱膨脹係數 α (10^{-6} per °F)
鋼	6.5
鋁	11.9-13.3
鎂	14.5
銅	9.3
混凝土	4-7

在圖 1－17a 內所示之靜不定桿件，桿件不可能伸長，因此在該桿內受到溫度的增加便發生一個壓力 R。此一力系可用在前一節內所述之分析方法計算之。可以看出的，若該固端桿件的 A 端放鬆，由於溫度變化單

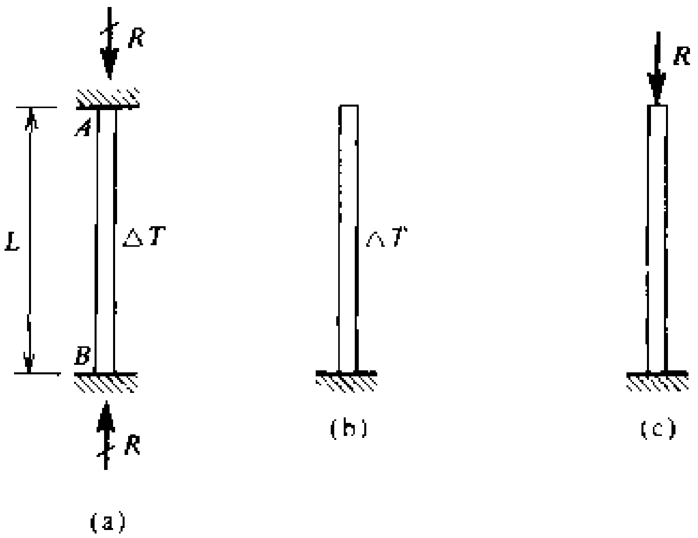


圖 1．17 溫度增加之桿件效應

獨作用所引起的向上變位爲 $\alpha L\Delta T$，而由於 R 單獨作用所引起的向下變位（圖 1－17c）爲 RL/EA。使兩種變位相等，可得

$$R = EA\alpha\Delta T \tag{1-11}$$

由此方程式求得 R 後，在桿件內的應力及應變可用下列兩式計算之

$$\sigma = \frac{R}{A} = E\alpha\Delta T \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\Delta T \tag{1-12}$$

從本例內，我們可以看出，由溫度影響可在靜不定結構內產生應力，甚至在無外力作用時，依然如此。

在一座結構的構材（桿件）長度不正確時，或一根構材，先受最初施加預力，並在以後移去時，則類似的情勢必存在。在兩種情形中，該結構內將有預加應變（ prestrain ）存在，而產生一施加預力狀態，甚至在無外力作用在該結構上時，亦依然如此。例如假設在圖 1－18a 內之桁架，具有 $L+\Delta L$ 而非 L 爲其垂直桿件未施應力時的長度。於是這些桿件僅能在將垂直桿壓縮與斜桿拉長之後始能裝配就位。以 F 表示在垂直桿件（見圖 1－18b）內之壓力。於是接頭 D 由於 F 作用而致之向下變位爲

$$\delta_F = \frac{FL}{2EA\cos^3\beta}$$

由前一節內的方程式(j)看出。在接頭 D 處的適合條件，表示接頭 D 的向下變位 δ_F 等於垂直桿件最初增加的長度 ΔL 減去垂直桿由於 F 力所致的縮短量。因此，其適合方程式為

$$\frac{FL}{2EA\cos^3\beta} = \Delta L - \frac{FL}{EA}$$

從上式可得

$$F = \frac{EA\Delta L}{L}\,\frac{2\cos^3\beta}{1+2\cos^3\beta} \tag{a}$$

已知壓力 F，我們即可很容易地應用靜力學計算在斜桿件內之力。在前面兩個例題，說明在有溫度變化或預力應變時分析一個靜不定結構的方法，與用來分析一個結構對於載重的影響，在事實上是相同的。

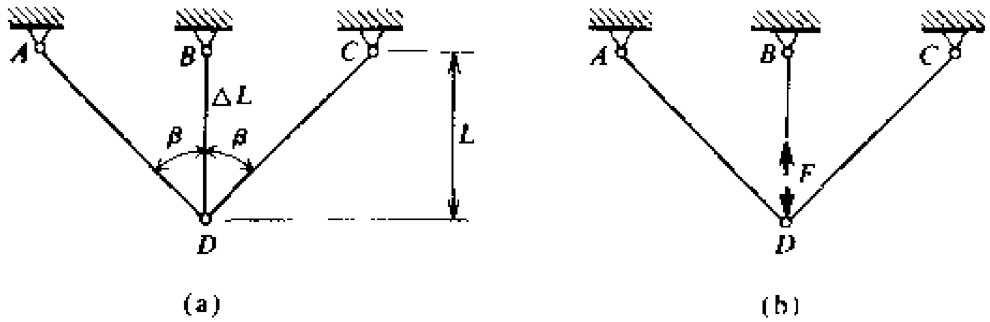


圖 1・18　桁架的垂直構材受預加應變 $\triangle L$

最後一個例題；讓我們再考慮如圖 1 － 18a 內所示的桁架，假設垂直桿件受熱致溫度上昇量為 ΔT，結果對桿件內力所起的影響，將與垂直桿件受最初伸長 ΔL 的影響相同。若將 ΔL 使其等於該桿件在自由膨脹時所發生的溫度膨脹。因此在方程式(a)內，為了獲得由於溫度變化在垂直桿件內所起的 F 力，只將 ΔL 以 $\alpha L\Delta T$ 代替即得。

1・8 非線性行態

在以前的討論中，總是假設結構用材料是遵守胡克氏定律的。現在讓我們考慮在應力超過比例極限以後，受到拉力與壓力時結構所起的行態。

我們將假設該項材料的應力－應變圖為已知。

若一座結構為靜定的，軸向力可用靜力學求出而不必考慮材料的行態。於是在已知諸力後，即能計算在該結構每一點處的應力。最後，由應力－應變圖、即可獲得在每一點處的應變，因而也可以獲得每一根構材的長度變化及所引起的變位。分析一座靜不定結構的步驟頗為簡單，將在本章末所列習題1・8－1至1・8－5內說明之。

將一座靜不定系統作分析工作變成頗為麻煩，因未能先求得變位，便不能求得各個力。而變位本身，又有賴於各力系及應力－應變的關係而定。在如此一個系統內，可應用一種試誤法（trial and error method）或連求近似值法（method of successive approximation）。為舉例說明一種分析方法起見，再就圖1－19a內所示的對稱三桿件桁架，但與以前不同之處，即現在我們將考慮該桁架的材料係具有如圖1－19b內

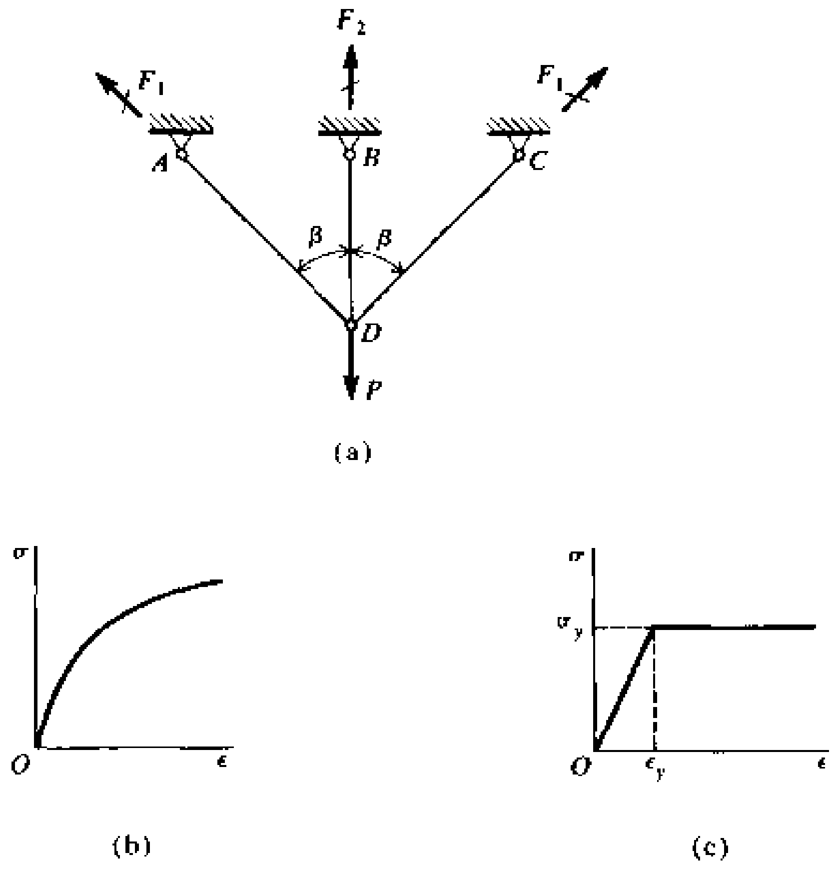


圖1・19　靜不定結構具非線型的應力－應變圖者

所示的應力－應變圖的事實。我們可以假設在接頭D有一個試算用的垂直變位，作爲此項分析工作的開始。於是從接頭D處的韋氏圖（Williot diagram），可獲得全部三桿件的相當伸長量。此項計算應確保在該接頭上的適合條件是可以滿足的。下一步驟必須核算在該接頭上各力的平衡。在各桿件內的應變可從各桿件的伸長量求得，並在其後可從應力－應變圖求得各桿件內的應力。已知在各桿件內的應力後，我們即可計算在各桿內的力，並核對在接頭D處的平衡。若在最初所假定δ值正確無誤，則可得到在接頭D處諸力的平衡條件爲可滿足的。否則將得到各力爲不能平衡的，因此必須重行選用一個δ作試算值，依程序重作一次。最後得到一個δ值能在接頭D處的適合及平衡兩個條件均可滿足爲止。於是在各桿件內與其相當諸力，將爲正確而無誤。另外一個可以採取的程序，開始將垂直桿件內的F_2力假設一個試算值來代替，於是，利用在接頭D處諸力的平衡關係，可以計算各斜桿內的力。其次，可以決定在每一桿件內的應力，然後再定各桿的應變（從應力－應變圖）及伸長。最後，從接頭D的韋氏圖，即可決定所有三桿件的伸長是否互相適合。若三桿件的伸長能適合，則F_2的試算值即爲正確值，分析工作可告完成。否則必須爲F_2選擇另一試算值，並重複一切程序，一直到平衡及適合條件均能滿足爲止。

由於採用以上所述的方式來分析圖1－19a內所示的靜不定桁架，對於任何屬於載重P的假設值，均可獲得該桁架的變位及各桿件內力。因此，可能在載重自零增加至最大值時，而獲得該桁架行態的完整情況。

<u>塑性分析</u>（plastic analysis）

有少數材料中，以結構鋼爲最顯著，具有一個直線形彈性區段並繼以一個相當的屈伏區段。如此材料其應力－應變圖可用兩條直線予以理想化而具有良好的準確度，如圖1－19c所示。此種材料假設係遵守胡克氏定律一直到屈伏點爲止，在屈伏點之後，材料受固定不變之應力下屈伏。在屈伏點之應力與應變將分別用σ_y及ϵ_y來表示。某種材料，如果應力不增加而屈伏，即稱爲完全塑性的（perfectly plastic）。自然，鋼的應力－應變圖至最後由於應變硬化之故，終於上昇至高於屈伏應力以上，如在第1·3節中所解釋者。但在這種情形發生時，變形將非常大，而該結構將失去其用途。因此用圖1－19c內所示之應力－應變圖爲依據來分析在塑性範圍內的鋼材，已成爲普通常用的辦法。如爲鋼材，同一個應力－應變圖，可一律應用於拉力及壓力。一種具有如圖1－19c內所示應

力 - 應變圖材料（即具有一個直線形彈性區，跟着一個完全塑性區之材料）則稱爲彈性 - 塑性材料（ elastic-plastic material ）。用這種假設條件所作成的結構分析，稱爲塑性分析（ plastic analysis ）或極限分析（ limit analysis ）。

塑性分析的技巧，可重用圖 1 － 19a 所示的三桿件結構，並假設這三桿件係由一種彈性 - 塑性材料（圖 1 － 19c ）所成，玆說明如下。當載重 P 逐漸增加，在桿件內各力亦將增加，只要這些應力仍然停留在屈伏應力 σ_y 以下，各桿件內之力即可用彈性分析（見 1· 6 節例題 1 ）決定之。假如三桿件的截面爲相等，則中間桿件將具較大力，最後將達屈伏應力 σ_y 。此種情況出現於力 F_2 變成等於 $\sigma_y A$ 時，其中 A 爲每根桿件的截面面積。載重 P 若更進一步增加，在兩根斜桿件內的力亦將增加，但力 F_2 則依然保持原來數量不變，因中間桿件已成塑性之故。最後，在外側的兩桿件也將變成塑性，並在當時該結構即不能負荷另外再增加的載重。

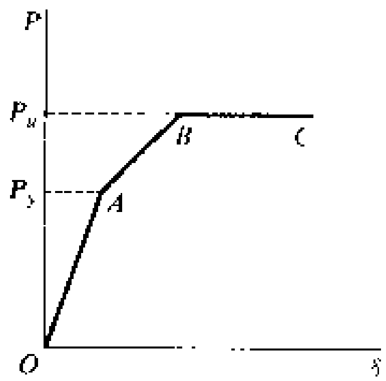


圖 1·20　圖 1·19 a 內結構之載重 - 撓度圖

代之者，所有各桿件，將在載重達某一固定不變值（且爲最大者）下繼續伸長。此項載重稱爲極限載重 P_u （ ultimate load ）。

在前一段所述的現象，如圖 1 － 19a 所示，結構的載重 - 撓度圖（ load-deflection diagram ）描繪於圖 1 － 20 內。載重 P 得自該圖的縱標，至於接頭 D 的變位 δ ，則爲橫座標。自原點 O 至 A 點所有三桿件均爲彈性的，在各桿件內之力（見 1-6 節例題 1 ）分別爲

$$F_1 = \frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta} \qquad F_2 = \frac{P}{1+2\cos^3\beta}$$

中間桿件的屈伏，始於 A 點，與其相當的載重 P 值，稱爲屈伏載重 P_y （ yield load P_y ），可在上式內將 F_2 使等於 $\sigma_y A$ 而得

$$P_y = \sigma_y A(1+2\cos^3\beta)$$

自A至B，在中間桿件內之力，仍然繼續等於 $\sigma_y A$ ，而在兩根斜桿件內之力，可從接頭D的平衡（由1·6節之方程式）求得

$$F_1=\frac{P-\sigma_y A}{2\cos\beta}$$

在B點的兩根斜桿件亦將屈伏；因此 $F_1=\sigma_y A$ ，並從接頭D的平衡求極限載重 P_u 得下列結果

$$P_u=\sigma_y A(1+2\cos\beta)$$

從B點至C點，該結構將在不變的載重 P_u 下繼續變形。在前曾經提及，最後將發生應變硬化，到那時候該結構可以負荷額外增加的載重，但對於實際用途上，有很大的撓度存在。意指該結構已無法使用。由於這一理由，極限載重 P_u 的計算，對於設計者具有適當的注意。

【例題】 試決定圖1－21內所示結構的屈伏載重 P_y 及極限載重 P_u 值。設水平桿為剛性的，兩根垂直線為一種彈性－塑性材料所成。並採用載重因數1.85，求該結構的容許載重 P_w 。（假設兩根線均具相同截面面積）。

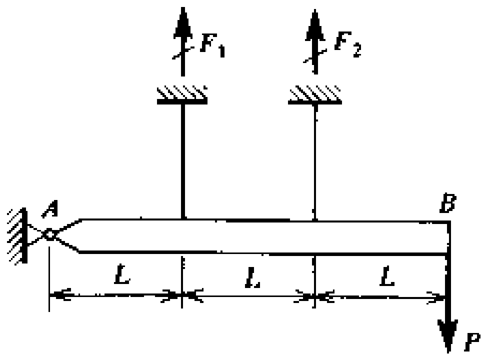


圖1-21 例 題

在線內所起之力 F_1 及 F_2 與載重P間的關係式，可由在該桿末端A取力矩而獲得，如下式

$$3P=F_1+2F_2 \tag{a}$$

此一方程式對於載重P從0大至極限載重 P_u 的任何一值均為正確的。由圖可知右手桿件（線）的伸長量永遠為左手桿件（線）伸長量的兩倍。因此，在彈性狀態下， $F_2=2F_1$ 。又可看出，當載重P逐漸增加，則力 F_2 將首先到達屈伏值 $\sigma_y A$ 。在那時候， F_1 力將等於$\sigma_y A/2$ ，而與其相當的載重P值，等於屈伏載重 P_y ，可從方程式(a)內求得如下

$$P_y = \frac{5\sigma_y A}{6}$$

在達到極限載重 P_u 時，F_1 及 F_2 將一律等於 $\sigma_y A$ 。因此，從方程式(a)可得

$$P_u = \sigma_y A$$

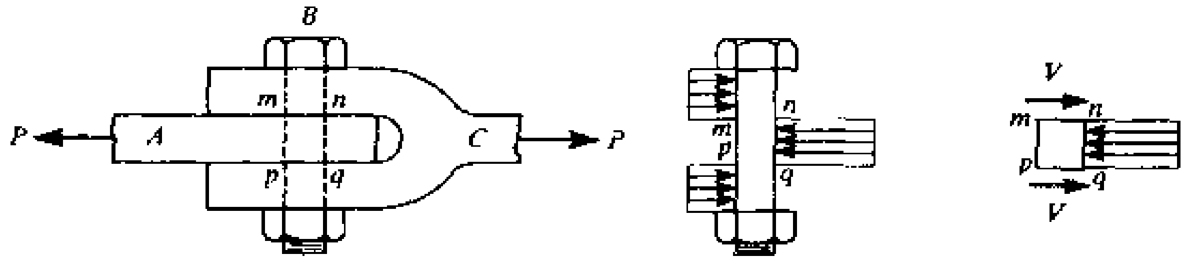
容許載重 P_w ，可用載重因數除極限載重求得，一如在 1·3 節所說明者，於是

$$P_w = \frac{P_u}{\text{載重因數}} = \frac{\sigma_y A}{1.85}$$

從這個例題卽可看出，決定一座靜不定結構的極限載重 P_u ，可能比作一個彈性分析爲容易。

1·9 剪應力及剪應變

在圖 1－22a 所示之連接構造，作爲一個具有剪應力存在的實際例子。這個連接，係由一桿件 A ，一個 U 字鉤 C 及一個螺栓 B 所構成。螺栓



(a)　(b)　(c)

圖 1－22　直接剪力之例

B 係穿過桿件 A 及 U 字鉤上的孔。在載重 P 作用下，桿件及 U 字鉤將壓迫螺栓使其支承，並對該螺栓發生接觸應力，稱爲支承應力（ bearing stresses ）。如圖 1－22b 內所示之情形。此圖也表示這種傾向，將沿 mn 及 pq 兩截面使該螺栓剪斷。若繪成該螺栓 $mnpq$ 部分的隔離體圖（圖 1－22c ），很顯然剪力 V 必將沿着兩個斷面起剪斷作用。（在本例內，每一個剪力 V 等於 $P/2$ ）此剪力將產生剪應力 τ （ shear stresses τ ）分佈於螺栓之截面面積上。這類剪應力的正確分佈情況，並不容易決定，雖然我們可用剪力作用面積 A 除全剪力 V 以獲得其平均値如下

$$\tau_{aver} = \frac{V}{A} \qquad (1\text{-}13)$$

於圖 1－22內所示之例，在方程式內所採用的面積 A 爲該螺栓的截面面積。

在螺栓（ bolts ）、梢子（ pins ）、鉚釘（ rivets ）、鍵（ key

）以及其他受直接剪力（ direct shear ）部分的設計中，通常的辦法是利用方程式（ 1 － 13 ）並根據剪力的平均容許應力 τ_w（ average allowable stress, τ_w in shear ）以調配各部分的尺寸。容許剪應力通常是在 $0.5\sigma_w$ 至 $0.6\sigma_w$ 範圍內，其中 σ_w 為同種材料的容許拉應力。在以後各章內可以看出，在桿件受拉力及彎曲載重時，將以間接方式產生剪應力。

在本章的前一節內，所處理的拉應力及壓應力，係在起作用的表面成垂直，此種應力，因此常被稱為垂直應力（ normal stresses ）。在另一方面，剪應力永遠與表面成正切方向起作用，因此有時被稱為正切應力（ tangential stresses ）。在此兩種情形中，應力均代表力的強度，亦即每單位面積上的力。因此，可以看出，在垂直應力與剪應力間的主要分

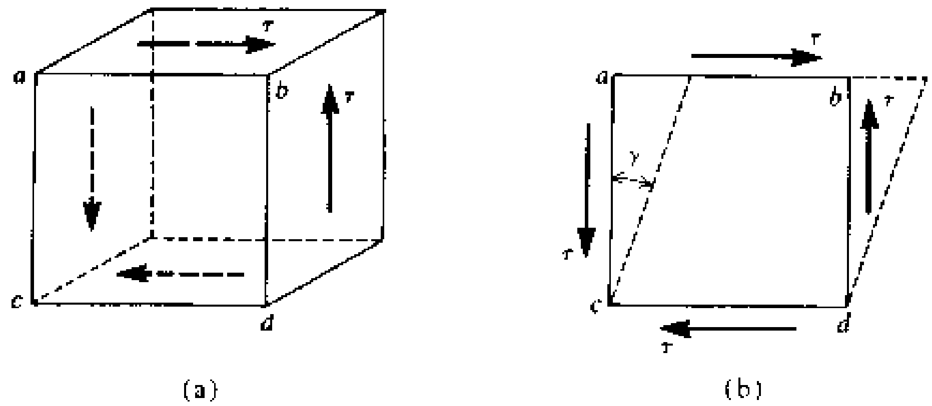


圖 1‧23 剪應力及剪應變

別，只有一個方向的分別而已。

為推想由剪應力所產生之變形起見，讓我們考慮某種材料的一個微小立方元體（ cubical element ），如圖 1 － 23a 所示，並假設該元體係承受分佈於其頂面的剪應力 τ。若無垂直應力作用在該元體上，於是相等但在相反方向的直接剪應力，必須也在該元體的底面起作用，以便該元體在水平方向內呈平衡。而且，在該元體頂面及底面上的剪應力，將產生一個力矩，這個力矩必須由作用於該元體兩垂直側面上的剪應力的力矩來平衡。若該元體處於靜力平衡狀況，則兩個相互垂直的剪應力必須等於 τ。因此可以看出，一般的情形是：(a)作用於一個元體上的剪應力，永遠是按相等但方向相反而成對的出現，(b)剪應力永遠存在於相互垂直的平面上。在各個垂直面上的剪應力，永遠是數量相等，兩個應力的方向或一律指向兩個平面的交叉線，或是指向或背離該交叉線的方向。若為僅受剪應力的一個元體，如在圖 1 － 23a 所示的情形，稱為受純剪力（ pure she-

ar ）。純剪力將在 2·3 節內，作更爲詳細的討論。

受純剪力的一個元體，其變形況如圖 1－ 23b 所示，此圖表示該立方元體的前面 $abcd$ 。因並無垂直應力作用在該元體上，ab，cd，ac 及 bd 各邊的長度將不起改變。代替的情況，爲剪應力將使正方形 $abcd$ 變形成菱形，如在圖內用虛線表示的模樣。在 c 點的角度，在變形之前爲 $\pi/2$ ，此時已減小爲 $\pi/2-\gamma$ ，γ 爲圖內所示的微小角。同時在 a 點的角度則增至 $\pi/2+\gamma$ 。角度 γ 則爲測定該元體因受剪力而致變形的尺度，稱爲剪力應變（ shearing strain ）。我們可從該圖內看出，剪力應變 γ 是等於該元體的頂邊，對其底邊所起水平滑動量，除該元體的高。

以材料作純剪力試驗，並將剪應變當作剪應力的一個函數而加以測定。由實驗方法獲得該材料的剪力的應力－應變圖。此圖與同種材料的拉力試驗圖相較，在形狀上頗爲相似。並從該圖可以決定該材料受剪力時的比例極限、屈伏點及極限應力。由實驗結果表示，如爲延性金屬，包括結構鋼材在內，受剪力的屈伏應力 τ_y ，約爲 0.5 至 $0.6\sigma_y$（ σ_y 爲某材料的屈伏拉應力）。

若該材料具有直線形彈性區域，則其剪力的應力－應變圖將爲一條直線，剪應力及剪應變成爲正比。因此對於剪力的胡克氏定律，可寫成下列的方程式

$$\tau = G\gamma \tag{1-14}$$

其中 G 爲該材料的剪力彈性模數（ shear modulus of elasticity ）。對若干種材料，已將其一般性的 G 值列在表 1－1 內。產生純剪力的最簡單方法，係利用中空圓形管子的扭力，將在以後有關扭力一章中加以說明。從扭力試驗，G 值通常可以獲得。惟應加注意者，即拉力及剪力的彈性模數（ E 及 G ）間並非全無關聯，在其間有一定的關係存在着，如第 2.3 節中所示。

1·10 應變能

一桿件受很緩慢的靜力載重 P ，並處於單純的拉力情況時，該桿件必將伸長（圖 1－ 24 a）。若該桿遵守胡克氏定律，則其載重－變位圖將爲一條直線（如圖 1－ 24 b所示）。當該桿件受力時，力 P 在桿件上作功，這種功被化爲位能（ potential energy ）或應變能（ strain energy ），存儲於桿件內。其後 P 力若被緩慢的移去，則桿件將恢復到原來的長度。在這個卸除載重的過程中，在桿件內存儲的應變能，可能以功的形式復原。因此桿件的作用一如具有彈性的彈簧，在加施載重或移去載重時，可

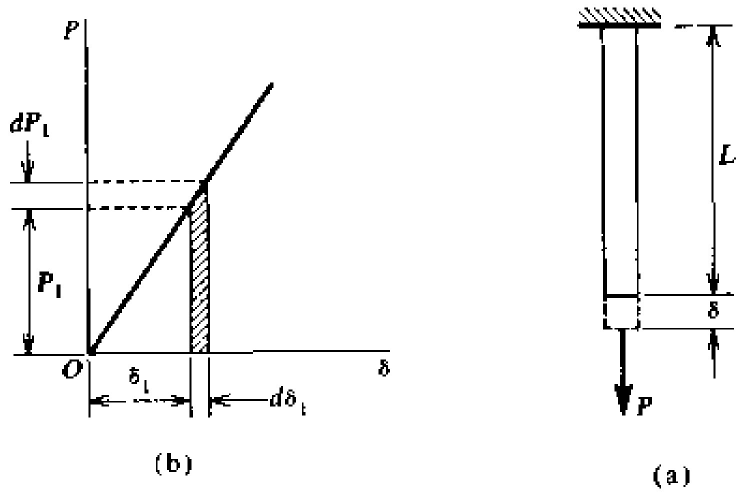


圖 1-24 受拉力桿之載重 - 撓度圖

能存儲或解放其能。

在載重時，桿件內所存儲的應變能可從載重 - 撓度圖內獲得。假設 P_1 代表載重的中間值，並假設 δ_1 爲其相當的伸長。於是在載重內的增加量 dP_1，將在伸長量內產生一增加量 $d\delta_1$。在此增加伸長量內，由 P 所完成的功爲 $P_1 d\delta_1$，在圖內用斜線的面積代表之。在載重過程內所完成之功的全部，爲諸小塊單元面積的總和，等於在載重 - 變位圖以下的面積。因此，載重 P 所完成功的全部，等於在桿內所存儲的變位能 U 爲

$$U = \frac{P\delta}{2} \tag{1-15}$$

此方程式係在遵守胡克氏定律時，始爲正確。在此種情形下，P 與 δ 間的關係可用方程式 $\delta = PL/EA$ 表示之。將此方程式代入方程式（1－15），可用下列方程式中的任何一個形式來表示

$$U = \frac{P^2L}{2EA} \quad 或 \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L} \tag{1-16a,b}$$

這兩個方程式中的第一個，將應變能表示成載重 P 的一個函數；第二個，則將其表示爲一個變位 δ 的函數。

有時要考慮每個單位體積內的應變能 u，比較更爲有用。如一個受均佈拉力桿件，可用桿件的體積除全部應變能 U 以獲得 u；於是 $u = U/AL$。因此得

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} \quad 或 \quad u = \frac{E\epsilon^2}{2} \tag{1-17a,b}$$

其中 $\sigma = P/A$ 爲拉應力，而 $\epsilon = \delta/L$ 爲其應變。

在桿件的單位體積內，可儲存應變能不致超過比例極限的最大量，稱爲回彈模數（modulus of resilience）。此一模數，可將比例極限化作方程式（1－17a）內的σ而求得。例如，某種結構鋼其比例極限爲$200 N/mm^2$，$E = 200 kN/mm^2$，回彈模數u爲$0.1 N/mm^2$。

以上是就拉力桿件受應變能的討論，亦可適用於受壓力的桿件。因應變能等於桿件受力時由力P所完成的功，故跟着可說，應變能永遠爲正號的數量。

【例題】1. 試比較存儲在圖1－25內所示三桿件內應變能的數量。注意每根桿件均具有相同的長度，且支承相同的載重。第一根桿件具有完全一致的直徑d，其他每根桿件在其長度的一部分上，具有較大的直徑。

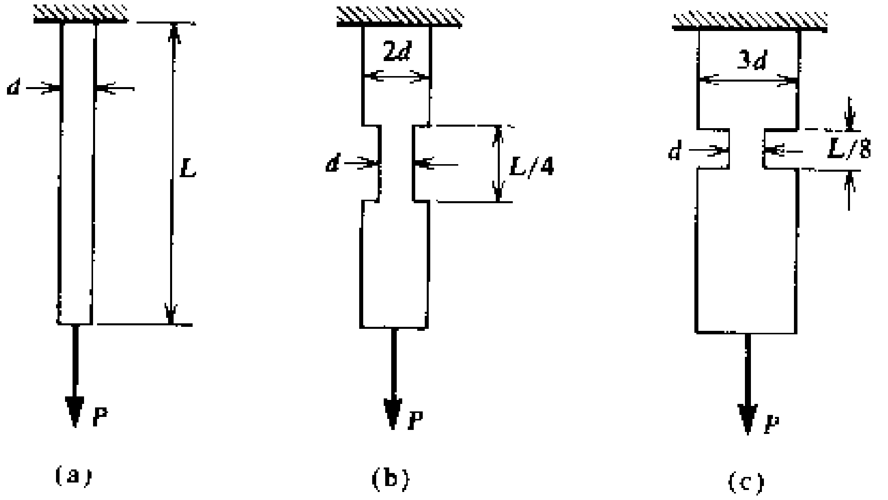


圖1-25　例題1

第一根桿件的應變能，（根據方程式1－16a）爲

$$U_1 = \frac{P^2L}{2EA}$$

式中$A = \pi d^2/4$。在第二根桿上，假設在每一截面上的應力分佈均爲均勻時，可得其應變能爲

$$U_2 = \frac{P^2(L/4)}{2EA} + \frac{P^2(3L/4)}{2E(4A)} = \frac{7P^2L}{16(2EA)} = \frac{7U_1}{16}$$

在第三根桿件上，求得其應變能爲

$$U_3 = \frac{P^2(L/8)}{2EA} + \frac{P^2(7L/8)}{2E(9A)} = \frac{2U_1}{9}$$

將這些結果作一比較，可見應變能因桿件的體積增加而減少。因此僅需極小量的功，即可將具有窄槽的桿件的拉應力，帶至高而大。若載重的性質爲動力的，而且吸收能的能力頗爲重要時，如有窄槽存在的桿件，頗易毀損，將在以後加以說明。當然，如爲靜力載重，在設計中最爲重要者，爲最大應力而非吸收能的能力。

桿件上之衝擊載重（ impact loads on bars ）

用應變能概念以處理動力性（ dynamic character ）的載重頗爲有用。此類載重具有一定量的能，轉變爲桿件內的應變能，或消失在引起桿件的塑性變形。作爲衝擊載重的一例，試考慮如圖 1 － 26 內所示的簡單佈置。一個原爲靜止的重量W，從高度h降落至桿件的下端B翼緣上，桿件的長度爲L。桿件的最大伸長量及由於衝擊力所引起的最大拉應力均需求出。

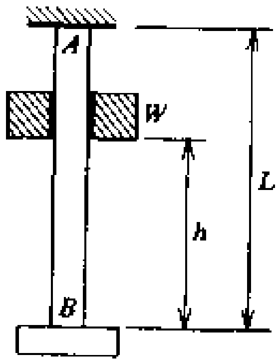


圖 1·26 桿上之衝擊載重

將在衝擊時的能量損耗略去不計以獲得一個近似解法，並假設由下墜重量所做全部的功，均轉變爲桿件的應變能。此項假設頗爲保守，因實際將有一部分能被消失，而桿件的眞實伸長量，將小於用計算所求得者。

在重量W打到翼緣後，重量W繼續向下移動，使桿件伸長。由於桿件所表示的抵抗力，使重量W將減小其速度，不久即行停止，而桿件則已被拉長而等於δ。此時桿件的伸長量及其相當的拉應力達到最大。桿件將立刻開始縮短，且桿件與重量W的縱向振動，將跟着發生。但我們可將下墜重量所完成的功即$W(h+\delta)$，使等於該桿件的應變能，以計算桿件的最大伸長δ成立下式

$$W(h+\delta)=\frac{EA\delta^2}{2L} \qquad \text{(a)}$$

列入符號 $\delta_{st}=WL/EA$ 作爲桿件因重量 W 而發生的靜力的伸長量，並解方程式(a)可得

$$\delta=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+2h\delta_{st})^{1/2} \tag{1-18a}$$

$$=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+v^2\delta_{st}/g)^{1/2} \tag{1-18b}$$

上式中 $v=\sqrt{2gh}$ 爲重量 W 打到翼緣一瞬間的速度。這兩個公式表示如果 W 及 L 增加，或在衝擊時的速度增加，則桿件伸長量將因之增加。此兩個公式並表示，如果軸向剛度 EA 增加，則伸長量將因之減小。

若高度 h 比 δ_{st} 相差很大，可獲得一簡化方程式，因在那時候，方程式（1－18）可化爲

$$\delta\approx(2h\delta_{st})^{1/2}=(v^2\delta_{st}/g)^{1/2} \tag{1-19}$$

假設在最大伸長的一瞬間，桿件內拉應力的分佈均佈，則其最大拉應力可用下列的近似式計算

$$\sigma=\frac{E\delta}{L}=\frac{E}{L}(v^2\delta_{st}/g)^{1/2}=\left(\frac{Wv^2}{2g}\right)^{1/2}\left(\frac{2E}{AL}\right)^{1/2}$$

從這一結果可以看出，增加下墜重量的動能或增加彈性模數 E，均將引起應力的增加。至於增加等截面桿件的體積 AL 則將減小其應力。此一情勢與桿件的靜拉力頗不相同。在靜拉力時，應力與桿件的長度 L 及其彈性模數 E 無關。

突加載重（suddenly applied load）

現在讓我們考慮衝擊的一種特殊情況，在此種情況內 h 等於零，即重量 W 係突然被放於桿件端 B 的翼緣上（圖 1－26）而沒有最初的速度。雖然在這種情況中，桿件的伸長開始時並沒有動能，但問題與桿件受靜載重時頗有不同。在靜拉力時，我們假設載重緩慢增加，結果在起作用的載重與桿件的抵抗力間，永遠具有平衡狀況的存在。在此種狀況下，載重的動能這個疑問，全然沒有進入本問題內。在載重突然施加時，在開始的一瞬間，桿件的伸長及在桿件內的應力均爲零，於是突然加上的載重在其本身重量作用下，開始向下墜。在此動作期間，桿件的抵抗力逐漸增加，一直到垂直變位爲 δ_{st} 時的重量，剛好等於重量 W 時。但在此一瞬間，該載重具有某定量的動能，係在變位 δ_{st} 期間所獲得的；因此重量 W 將繼續向下移動一直到其速度被桿件內的抵抗力等於零爲止。在此種情況下的最大

伸長，係從方程式（1 − 18a）使 $h = 0$ 而得；於是

$$\delta = 2\delta_{st} \tag{1-20}$$

換言之，一個突然加上的載重，因其動力的條件而發生的變位，等於該載重緩慢加上所得到的變位的兩倍。*

在上面關於衝擊的討論中，係假定在桿件內的應力，將仍然留在比例極限之內。在極限以外，其問題牽涉更廣。因桿件的伸長已不再與拉力成正比。假設拉力試驗圖並不依該桿件上所加應變的變率，則在衝擊期間超出彈性限的伸長，可用如圖 1 − 27 所示的靜力的載重 - 變位圖予以決定。對於任何假設的最大伸長量 δ_1，與其相當的面積 $OABE$ 表示，需要

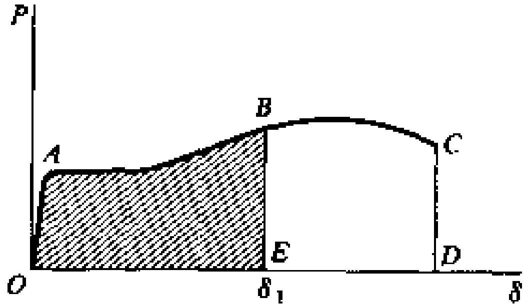


圖 1 - 27　受拉力桿之載重 - 撓度圖

用以產生如此伸長量的功；此功，必須等於由重量 W 所產生之功 $W(h+\delta)$。在 $W(h+\delta)$ 等於或大於拉力試驗圖 $OABCD$ 的全部面積時，則下垂的物體將使桿件受到破損。有些材料，包括具延性的鋼材在內，在桿件受應變的變率很大時，屈伏點被提高，因此需用以產生破壞情況的功，將稍高於靜力試驗所得的。

從這一討論，緊跟着的是桿件在形狀上的任何改變，亦即因減小在載重 - 變形圖內 $OABCD$ 全部面積結果所致的改變，也將減小該桿件對衝擊的抵抗力。例如在圖 1 − 25b 及 c 內所示有凹槽之試材，金屬的塑性流（plastic flow）將集中於凹槽處，全部伸長量及因功的需要而產生破壞，將比在同一圖內的圓桿件的小得很多。輕微的瑕疵，可能產生破裂，雖然材料的本身可能具有延性亦然如此。具有鉚釘孔或在截面上有任何急劇變化的構件，亦同樣弱於抵抗衝擊。從此項討論，也可以看出，何以具延性的材料對於衝擊載重將比脆性材料可提供大得很多的抵抗力。在一種脆性材料的載重 - 變位圖將比在延性材料的曲線下具小得很多的面積，甚至兩種材料的極限強度雖大約相同，亦依然如此。

* 這一結論，首由旁雪萊氏（Poncelet）所提出（見參考書 1.15）

【例題】2. 一個重量W附在一個垂直鋼纜的下端，鋼纜係用固定速度v向下移動。若鋼纜的上端突然停止不動，在鋼纜內所產生的最大應力為若干？鋼纜本身重量可略去不計。

我們首先注意到方程式（1－18），係由圖1－26內所示的系統誘導得來，不可能用在此例題內。其理由為，在前面例題內的桿件係在衝擊前未受應力，至於在這個例題內的鋼纜，則在衝擊前，已承受一個拉力W。讓我們假設在衝擊期內，並沒有能的損耗，俾該系統全部的能（動能加位能），在衝擊之前，等於在衝擊之後當鋼纜的最大伸長為δ時的全部的能。

在衝擊前，移動的重量之動能為$Wv^2/2g$，而其最低位置的位能為$W(\delta-\delta_{st})$，其中δ_{st}為由於該重量使鋼纜所起之靜力伸長量。應注意$\delta_{st}=WL/EA$，式中的L為鋼纜長度，而EA為其軸向剛度。於衝擊前纜內的應變能為$AE\delta_{st}^2/2L$。在衝擊後，在鋼纜具有最大伸長量期間，鋼纜的應變能為$EA\delta^2/2L$。將衝擊前及衝擊後之能使之相等，我們可得成立

$$\frac{Wv^2}{2g}+W(\delta-\delta_{st})+\frac{EA\delta_{st}^2}{2L}=\frac{EA\delta^2}{2L}$$

從這個方程式，再引入$W=EA\delta_{st}/L$的關係得到

$$\frac{Wv^2}{2g}=\frac{EA}{2L}(\delta-\delta_{st})^2$$

最後，解得全部伸長量為

$$\delta=\delta_{st}+\sqrt{\frac{Wv^2L}{gEA}}$$

在鋼纜內的最大應力為

$$\sigma=\frac{E\delta}{L}=\frac{W}{A}\left[1+\sqrt{\frac{v^2EA}{gWL}}\right] \tag{b}$$

在上式內的最後一項，依鋼纜的性質及最初的速度v而定，可能比1大至多少倍。因此，在鋼纜內的動應力，可能比在鋼纜內的靜應力W/A大得很多。

在上面關於彈性衝擊的討論，如與下墜物體W的質量比較，已將在垂直桿件內或纜內的質量略去不計，且假設拉應力在全部時間內於整個桿件的長度中為均勻分佈的，另一種比較更為廣泛的解法，將桿件的質量及縱向應力波（longitudinal stress waves）的影響一併考慮在內。（見參考書1·16及1·17）

純剪力內的應變能

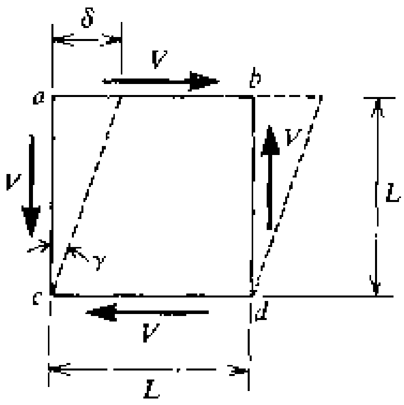


圖 1 - 28 在純剪力中的應變能

一個立方塊材料內儲存的應變能，在四個邊上均受到剪力 V（如圖 1 － 28）所示。可採用於簡單拉力情況的方法來計算。在材料變形期間，其頂面 ab 作水平移動一段矩離與底面 cd 之關係爲 δ，當剪力逐漸自零增加至最後的 V 值時。假設此項材料遵守胡克氏定律，則剪力應變 $\gamma = \delta/L$ 將與剪應力 $\tau = V/A$ 成正比，其中 A 爲該立方塊頂面的面積。載重 - 變位圖（即 V 對 δ）將與圖 1 － 24b 內所示關於受拉力桿件的圖相似。由力 V 所完成的功，並以彈性應變形式儲存於桿件內的爲

$$U = \frac{V\delta}{2} \tag{1-21}$$

又因 $\gamma = \delta/L$ 及 $\tau = V/A$，並應用胡克氏剪力定律（$\tau = G\gamma$），可知 $\delta = VL/GA$。將此結果與方程式（1 － 21）合併，即得表示應變能的兩個方程式

$$U = \frac{V^2L}{2GA} \quad 或 \quad U = \frac{GA\delta^2}{2L} \tag{1-22a,b}$$

將此兩個方程式除以立方塊的體積 AL，即得每個單位體積的剪力應變能的兩個式子

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \quad 或 \quad u = \frac{G\gamma^2}{2} \tag{1-23a,b}$$

這些方程式，將在第三章中用以獲取一根受扭力桿件的應變能。

習 題

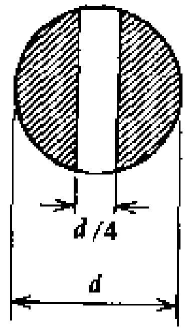
1.2 － 1　試用靜力學表示在一根受拉力的等截面桿橫截面上的全力。(圖1－1 a）如應力均勻分佈在其截面上時，則作用線將通過該截面的重心。（提示：假設桿件的截面爲任意形狀。在截面的平面內選用一組軸線，並獲取通過合力作用點的座標式）。

1.2 − 2　一根等截面桿，其截面爲 25mm × 50mm 矩形，及長度 $L = 3.5$ m，若受到軸向拉力爲 90kN。經觀測得該桿件伸長 1 mm。試計算在桿件內的拉應力及應變。

1.3 − 1　一根長線依其本身重量垂直懸掛着。若該線係由下列的材料做成：(a)具有極限應力 $2kN/mm^2$ 之鋼(b)具有極限應力 $350N/mm^2$ 之鋁。若不致斷裂，求其所能勝任之最大長度。（註：鋼的單位重量爲 $77kN/m^3$ 及鋁的單位重量爲 $27kN/m^3$ ）。

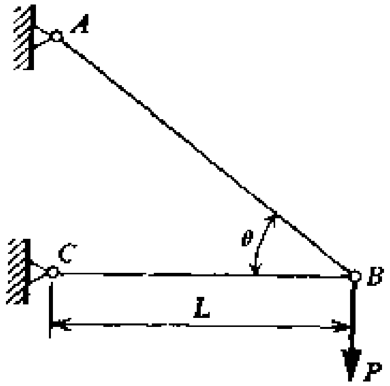
1.3 − 2　一段短鋼管（ $\sigma_y = 270N/mm^2$ ），負荷 1MN 的壓力載重對屈伏點的安全因數爲 1.8。若管厚爲其外直徑的 1/8，試求所需管子外徑的最小值 d。

1.3 − 3　一根圓形截面的實心桿（直徑 $d = 40$ mm）通過桿件的中心，在橫向鑽上二個小孔，孔的直徑爲 $d/4$，（見習題圖 1.3 − 3）假設在小孔處，桿的淨截面上的容許拉應力爲 $\sigma_w = 70N/mm^2$。試求該桿在受拉力時所能負荷的容許載重 P。



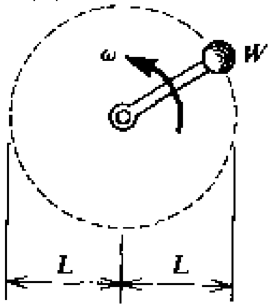
習題圖 1．3－3

1.3 − 4　AB 及 BC 兩桿件（見習題圖 1.3 − 4）共同支承一個載重 P。兩桿件均用同樣材料作成，水平桿 BC 的長度 L 保持不變。但角度 θ，則由於 A 點的垂直移動致改變 AB 長度以符合 A 點的新位置而有所改變。假設受拉力的容許應力與受壓力之容許應力相同，並假設兩根桿件將一律被充分受應力達到這些容許值，試求出 θ 角使該結構的重量爲最小。



習題圖 1．3－4 與 1．5－14

1.3 － 5　一個重量W附在一根纖細之桿臂上（長度為L），桿臂則在一個光滑表面上繞着一個承軸旋轉成一水平面（見習題圖 1.3 － 5），桿臂及重量依固定不變之角速度ω旋轉。將桿臂的重量略去不計，設容許應力為 σ_w 。試為桿臂所需之截面面積導出一個公式。



習題圖 1.3 - 5，1.3 - 6 與 1.3 - 7

1.3 － 6　若將桿臂重量一併計入，再解上述問題。（假設γ為桿臂材料每單位體積的重量）。

1.4 － 1　一個 50mm直徑的鋼螺栓（ $E = 200\,kN/mm^2$ ）須受拉力以負荷 260 kN 載重。若螺栓受應力部分的最初長度為 550mm ，求其最終長度為若干？

1.4 － 2　一根圓鋼棒（ $E = 200\,kN/mm^2$ ）長 6 m，須負荷 7 kN 的拉力載重。若棒之容許應力為 $120N/mm^2$ ，及容許之末端變位為 2.5 mm 求所需棒的最小直徑為若干？

1.4 － 3　一根由鋼管（ $E = 200\,kN/mm^2$，$\nu = 0.30$）作成的拉力構材，其外徑為 90 mm ，截面面積為 $1400mm^2$ 。試問使該鋼管直徑減少 0.0129mm 的軸向力P為若干？

1.4 － 4　一根直徑 60mm 的實心圓桿，受 200 kN 的軸向力壓縮。(a)試求桿的直徑增加量Δd ，假設 $E = 86kN/mm^2$ 及 $\nu = 0.30$ 。(b)若其長度為 380mm ，試求該桿體積的增量。

1.5 － 1　一根如圖 1 － 7 的受力桿件，具同樣截面面積A及彈性模數E。試作該桿下端的變位δ的一個公式。此桿件將伸長抑縮短？

1.5 － 2　於圖 1 － 8 內所示的柱脚，所受的載重為 $P_1 = 580\,kN$ 及 $P_2 = 660\,kN$ 。上部的長度 $a = 0.6$ m，其截面為每邊 70mm的正方形；下部長度 $b = 0.7$m ，其截面為每邊 120mm 的正方形。假設 $E = 200\,kN/mm^2$，試求(a)柱脚頂部的變位及(b)上部軸向應變對下部軸向應變的比值。

1.5 －3　一根鋼桿長 3 m並在其整個長度的一半，具有直徑 d_1 =

20mm的圓形截面。在其長度的其餘一半，爲具有直徑 $d_2 = 12$mm的圓形截面。(a)在拉力載重 $P = 20$kN下，該桿將伸長多少？(b)若該材料之同樣體積被輥壓成一長 3 m的圓桿，其直徑爲固定不變之 d，則在同樣載重 P下，其伸長量爲若干？（假設 $E = 200$ kN/mm^2 ）。

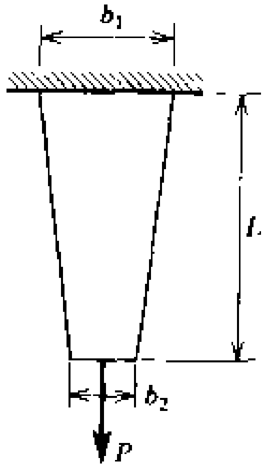
1.5－4　試爲一根等截面桿件，長度爲 L 及截面爲 A 並在其本身重量下垂直懸掛着，試誘導其全部伸長公式。（假設 W = 桿件的全重）。

1.5－5　一根等截面鋼桿平放於水平表面時，長 5 m。若被垂直懸掛於其一端，試求其伸長量。（假設 $E = 200$ kN/mm^2，單位體積重量 $\gamma = 80$ kN/m^3 ）。

1.5－6　試導出一等截面桿件在其本身重量下垂直懸掛時，體積增加 ΔV 的公式。（假設 W = 桿的全重，L = 桿的長度，ν = 卜桑氏比，及 E = 彈性模數）。

1.5－7　一根長度爲 L 的桿件，在一個水平面內以角速度 ω 圍繞着一個垂直軸旋轉（見習題圖 1.3－5 ）桿的截面面積爲 A，重量爲 W_t。在桿件末端附一重量 W。試求由於離心效應所引起桿的全部伸長 δ 公式。

1.5－8　一根逐漸尖細的矩形截面桿件，厚度 t 爲不變，負荷一個力 P 如習題圖 1.5－8 所示。桿件的寬度自支承處 b_1 依直線變化至自由端



習題圖 1.5-8 與 1.5-9

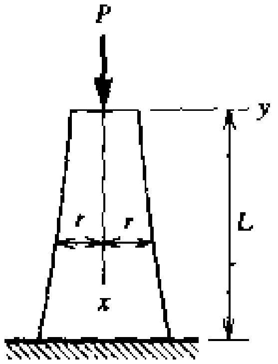
的寬 b_2。試導出由力 P 所引起桿件的伸長 δ 公式。

1.5－9　試導出在上列習題內桿件的體積增加 ΔV 公式。

1.5－10　一個圓形截面逐漸尖細的鋼桿（ $E = 200$ kN/mm^2 ）其長度 $L = 3$ m，負荷拉力載重 $P = 45$kN。在其較大端，桿件的直徑爲 $d_1 = 50$mm，在較小端的直徑 $d_2 = 25$mm。由力 P 所引起桿伸長量爲若干？

1.5－11　試導一方程式，用以規劃一圓形截面柱體的半徑 r。使柱的體積爲最小（見習題圖 1.5－11）柱體的頂上支承一 P 力，加其本身重量。柱體材料的單位重量爲 γ，容許壓應力爲 σ_w。並決定柱體頂上及其底部的截面面積與體積（提示：試考慮一個微分元體長度 dx。因一切截面上的應力必須相同且爲 σ_w，則在該元體頂上及底部兩個截面面積之差

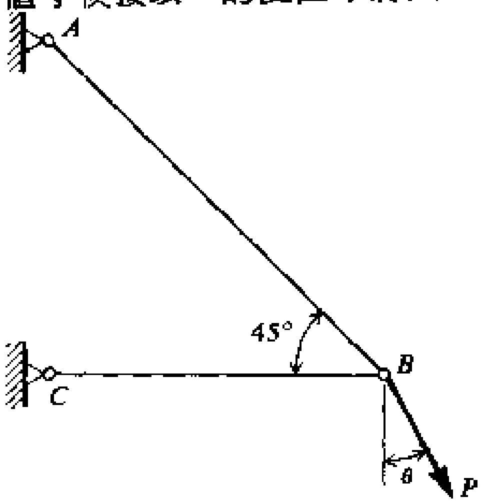
dA必須作爲補償壓力方面的差別，此項[illegible]等於該元體本身的重量。因此，$\sigma_w dA=\gamma\ A dx$ 或 $dA/A=\gamma dx/\sigma_w$。求該式兩側的積分，以導出其解法）。



習題圖 1.5-11

1.5－12 在圖 1－10a 內所示桁架的構材 AB 爲一直徑 3mm 長度 0.9m的鋼線（$E_s=200\text{kN/mm}^2$）；構材 BC 爲一木質長度 1.5 m每邊爲 25mm正方形的撐材（$E_w=10\text{kN/mm}^2$）若 $P=2\text{kN}$，試決定桁架接頭 B 的水平及垂直分量變位。

1.5－13 在習題圖 1.5－13 內所示的桁架，在接頭 B 處支承一 P 力，該力與垂直線成一 θ 角起作用。構材 AB 及 BC 的截面面積分別爲 A_1 及 A_2。試求出 θ 角值，使接頭 B 的變位，將與力 P 在同一方向。



習題圖 1.5-13

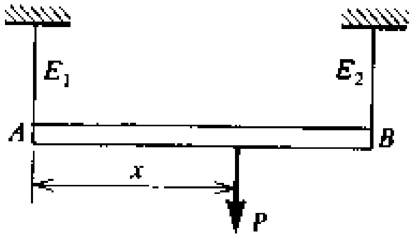
1.5－14 在習題圖 1.3－4 內所示的桁架 ABC，係由一根水平鋼桿 BC，其截面面積爲 2400mm² 長度爲 L，與另一根鋼桿 AB 其截面面積爲 300mm²所構成。可由改變鋼桿 AB 長度及支承 A 的垂直位置將 θ 角調整至任何要求值。（長度 L 不變）試決定角 θ 俾在載重 P 作用下，接頭 B 的垂直撓度將爲最小。

1.6－1 試在圖 1－11a 內所示靜不定桿之 R_b 當作贅餘力以求反

力 R_a 及 R_b 值。

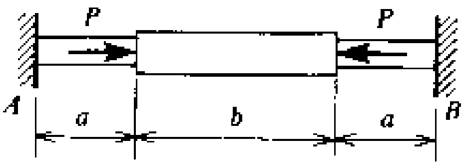
1.6 － 2　一正方形混凝土柱受軸向力 P 而壓縮。若鋼筋之截面面積爲混凝土截面面積之 1／10，而鋼之彈性模數爲混凝土之彈性模數之 10 倍，問該載重的那些部分將由混凝土負擔？

1.6 － 3　一根長度爲 L 的桿件 AB，由兩根緊在末端的垂直線懸掛呈水平位置兩根懸線一律具相同的長度及截面面積，但在末端 A 處的線係用一種彈性模數爲 E_1 材料做成，而在末端 B 處則用彈性模數 E_2 的材料。略去 AB 桿本身重量不計，試導出一個公式以表示由 A 點起量到桿件上某點的距離 x，該點則爲垂直載重 P 加在桿上之點，使該桿保留在水平位置上。



習題圖 1・6－3

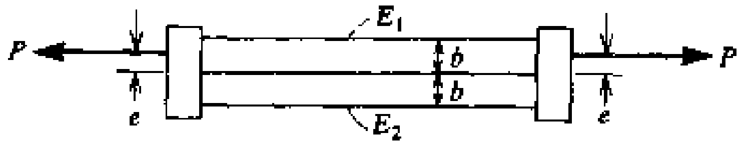
1.6 － 4　一根 AB 桿件，在其兩端的截面面積均縮小如習題圖 1.6－4 所示。該桿牢固的連接在兩端不能移動的支承上。承受相等但方向相反的軸力 P。試決定該桿中間的應力。假設 A_1 ＝靠近兩端的截面面積，A_2 ＝在桿件中間部分的截面面積。（利用下列諸數據：$P = 20\text{kN}$；$A_1 = 480\text{mm}^2$，$A_2 = 720\text{mm}^2$，$b = 3a = 360\text{mm}^2$）。



習題圖 1－6－4

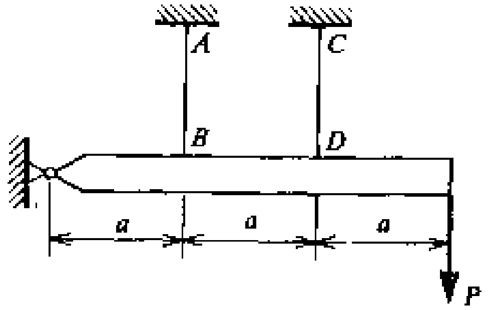
1.6 － 5　一個由厚 25mm金屬套構成的正方形柱，其外口尺寸爲 250mm × 250mm，裏口尺寸爲 200mm × 200mm，內填混凝土。金屬外套的彈性模數爲 $E_1 = 84\text{kN/mm}^2$ 混凝土芯的彈性模數爲 $E_2 = 14\text{kN/mm}^2$。若金屬及混凝土的容許應力分別爲 40kN/mm^2 及 6N/mm^2，試求該柱之最大載重 P。

1.6－ 6　一根正方形截面的桿件由兩種不同材料所構成，其彈性模數分別爲 E_1 及 E_2（見習題圖 1.6 － 6）。兩桿件具相同的截面尺寸。假設兩端鈑均甚堅固。試爲載重 P 作偏心距 e，導出一個公式使兩桿件一律受到分佈均勻的拉力（注意：假設 $E_1 > E_2$）。



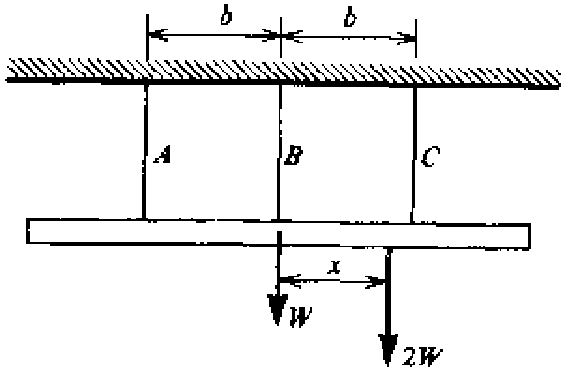
習題圖 1.6-6

1.6 - 7　求兩根完全一樣的線 AB 及 CD 內之應力（見習題圖 1.6 - 7），若每根線之截面面積爲 A，水平桿件假設甚爲堅固。（已知 P = 200kN 及 A = 1800mm²）



習題圖 1.6-7

1.6 - 8　三根完全一樣的線 A，B 及 C，用以支承一堅固的梁，（其重量 = W），在梁上又加一載重 2 W，距梁中心爲 x，如習題圖 1.6 - 8 所示。試點繪一曲線以表示在三根線內的力 F_a，F_b 及 F_c，以 x 爲函數來表示其變化。（假設 x 永遠爲正號，並自零變化至大於 b 的數值）。

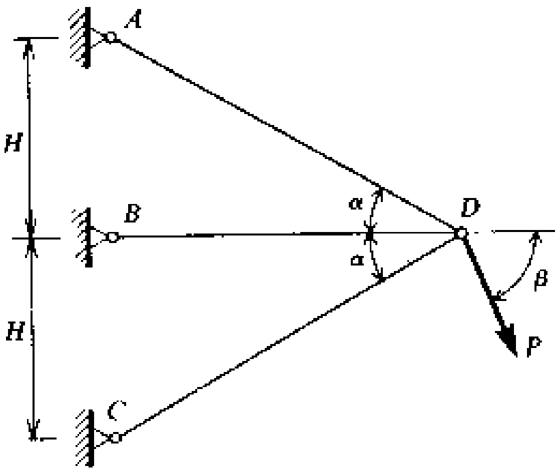


習題圖 1.6-8

1.6 - 9　三根完全一樣的桿件 AD、BD 及 CD，具相同之軸向剛度 EA，構成一個如習題圖 1.6 - 9 所示的桁架。若 β = 90°，試決定三根桿件內的力及由於載重 P 所引起的接頭 D 的變位的水平及垂直分量。

1.6 - 10　用 $\beta = \alpha$ = 45°，試解答上題。

1.7 - 1　一根鋁管在溫度 21℃ 下，其長度爲 36m。在其附近一根鋼管，在同一溫度時要比鋁管長 6mm。在那一溫度時，兩根管子的長度差將爲 12mm？（假設鋁之 $\alpha = 22 \times 10^{-6}$/℃ 及鋼之 $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/℃）。



習題圖 1.6-9 與 1.6-10

1.7－2 鐵路軌道之鋼軌，在溫度 10 ℃時銲接在一起。若鋼軌之 $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$ / ℃，及 $E = 200\text{kN/mm}^2$ 在陽光晒至 49 ℃時，鋼軌內所生之應力爲若干？

1.7－3 在圖 1－17a 內所示之固端樑，若代替圖中溫度變化 ΔT 的情況，該桿所具的最初長度爲 $L + \Delta L$ 而不是原來的 L，則反力 R 值爲若干？（假設介於兩個支承間之距離爲 L）。

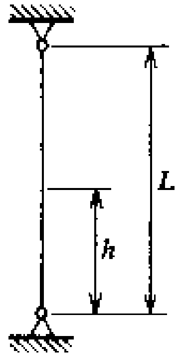
1.7－4 在習題 1.6－4 內之桿件，爲使桿件中央應力爲零，溫度之降落量 ΔT 應爲若干？（假設 $\alpha = 26 \times 10^{-6}$ / ℃及 $E = 40\text{kN/mm}^2$）。

1.7－5 參照圖 1.15a 內所示之系統，試爲溫度增加 ΔT 導出一個公式，使載重 P 之全部均由鋼管負荷。（以 α_s，α_c，E_s，E_c 及 A_s，與 A_c 分別代表鋼及銅之溫度膨脹係數，彈性模數及截面面積）。

1.7－6 試求在習題圖 1.6－7 中所示 AB 及 CD 兩根線內之應力，若圖中之 $P = 200\text{kN}$，$A = 1800\text{mm}^2$，$E = 200\text{kN/mm}^2$，$\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$ / ℃，兩線所增加之溫度均爲 33 ℃。

1.7－7 三根平行而相鄰之鋼桿，（$E = 200\text{kN/mm}^2$）連合起來以負荷一拉力載重 $P = 1\text{ MN}$。每根桿件之截面面積均爲 3900mm^2 長度爲 6 m。若中間桿件意外的比其他兩桿件短 0.76mm，在施加載重時，中間桿件內之最後應力爲若干？（假設在施加載重時，三根桿件的末端將被拉成一行）。

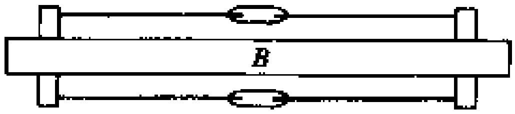
1.7－8 一根垂直鋼纜（見習題圖 1.7－8）加施預力至 4.5kN 的最初拉力。其後，將 6.75kN 重量在離底部高度 h 處，懸掛在鋼纜上。試研究在 h 自 0 變化至 L 時，鋼纜上所起之力如何？假設鋼纜不能支承任何壓力。



習題圖 1-7-8

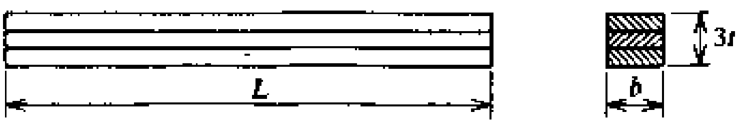
1.7－9　試求圖 1－13a 內所示之結構各桿件內之力 F_1 及 F_2，若結構上的溫度逐漸增加至 ΔT。（假設所有各桿件均具有軸向剛度 EA 及 $P=0$。）

1.7－10　示於習題圖 1.7－10 內之桿件，其長度為 L，彈性模數為 E 及截面面積為 A。具有鬆緊螺栓的兩根鋼纜連接在桿的兩端穿過的串釘上。每根鋼纜的長度為 L，彈性模數為 E 及截面面積為 A。這雙動鬆緊螺栓的螺距為 P，試為桿件 B 加施預力至均佈應力 σ_0 條件下，該鬆緊螺栓應旋轉之轉數 n 導出一個公式。



習題圖 1-7-10

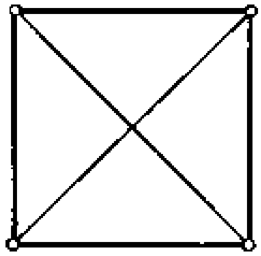
1.7－11　一根由兩種金屬併成的桿件係將銅芯接合在兩條鋼條（見習題圖 1.7－11）所組成者，逐漸加熱至溫度 T。假設桿件之寬度為 b，長度為 L，每層之厚度為 t。試求鋼與銅內所起之應力。並為三根金屬條各別繪出其隔離體圖。（注意：鋼與銅之熱膨脹係數分別為 α_s 及 α_c，且 $\alpha_c > \alpha_s$，彈性模數為 E_s 及 E_c）



習題圖 1-7-11

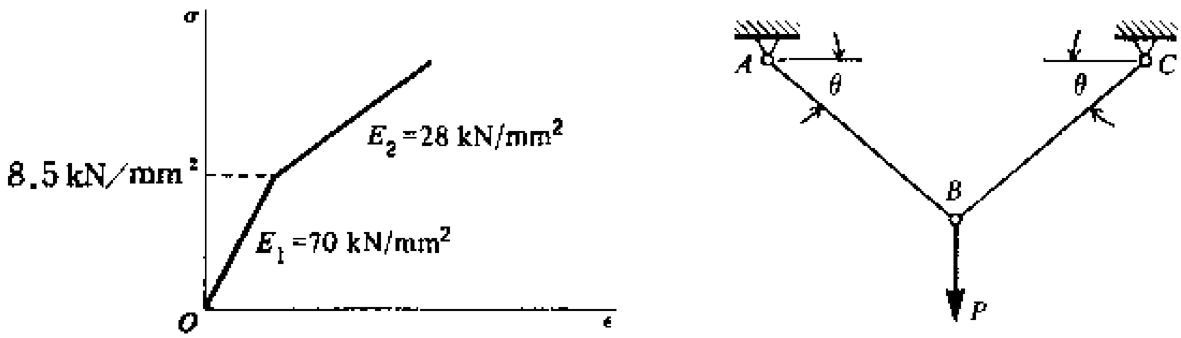
1.7－12　示於習題圖 1.7－12 內之正方形構架，其四邊係用鋁桿作成（$E_a=70\text{kN/mm}^2$，$\alpha_a=21.6\times10^{-6}/℃$）。斜桿則為鋼線（$E_s=200\text{kN/mm}^2$，$\alpha_s=11.7\times10^{-6}/℃$）。鋁桿及鋼線的截面面積比為 20：1。若構架之溫度增加 45 ℃，試求鋼線內的應力。

1.8－1　兩根完全一樣桿件 AB 及 BC（見習題圖 1.8－1）支承一



習題圖 1・7・12

垂直載重 P。桿件材料的應力－應變曲線，可用兩條直線來代表，如附圖的左側所示。桿件之截面面積爲 $A = 1300 mm^2$ 每根桿件的長度爲 $L = 3.9 m$，θ 角爲 30° 。試對下述每種載重值，求在接頭 B 處的垂直撓度 δ：$P = 35kN$，$70kN$，$105kN$，$140kN$ 及 $175kN$。由算出之結果，點繪一條曲線以表示 P 與 δ_B 間的關係。



習題圖 1・8・1

1.8－2　假設在上題附圖內的結構 ABC，係由某種材料所做成，其應力－應變的關係可用方程式 $\sigma^n = B\epsilon$ 表示，式中 B 及 n 均爲常數。試用 P、A、L、θ、B、及 n 爲變數，爲接頭 B 的變位 δ_B 導出一方程式。

1.8－3　一個簡單結構 ABC（見圖 1－10a）支承一個載重 $P = 124kN$。假設桿件材料的應力－應變圖如問題 1.8－1 內所示。（同一幅圖可作爲拉力及壓力之用）。AB 及 BC 兩桿件的截面面積分別爲 $1000mm^2$ 及 $2250mm^2$，桿的長度分別爲 0.9 m 及 1.5 m。試決定該結構接頭 B 的水平及垂直分撓度。

1.8－4　試求一根懸掛在頂端的垂直桿，因本身重量所引起的伸長。若桿件材料的應力－應變式爲 $\sigma^n = B\epsilon$，式中 B 及 n 爲常數。（將 δ 用桿件長度 L，材料單位重量 γ、B 及 n 等表示其函數）。

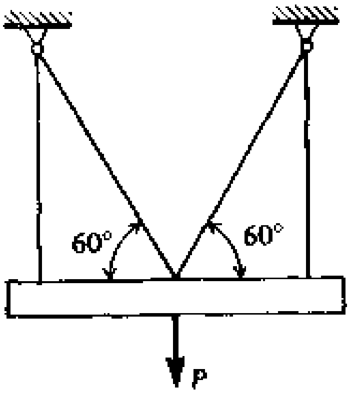
1.8－5　一根桿件垂直懸掛於其頂端，並在底部支承一個載重 P。桿件材料的應力－應變曲線與習題 1.8－1 同。試求該桿件由於其本身重量及力 P 之合併效應所引起的伸長，已知 $\gamma = 60kN/m^3$，$A = 960mm^2$

，$L=370$m及$P=64$kN。

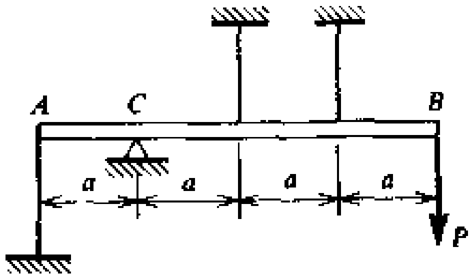
1.8－6　一載重P由一剛梁負荷，此剛梁係由四根對稱安排的線吊着，如習題圖1.8－6所示。每線具有的截面面積均爲A，且由一種彈性－塑性材料所做成。試求其極限載重P_u。

1.8－7　試求在圖1－19a內所示結構的極限載重P_u。若桿件爲一種彈性－塑性材料，垂直線的截面面積爲斜線截面面積之兩倍。假設$\sigma_y=250\text{N/mm}^2$，$\beta=60°$，垂直線的截面面積$=1200\text{ mm}^2$。

1.8－8　參照圖1－10a內所示的結構ABC，並假設該結構係按照負荷極限載重$P_u=90$kN而設計。若結構係由彈性－塑性材料所做成，並具230N/mm^2之屈伏應力，試求AB及BC兩構件所需之最小截面面積。（假定$\theta=30°$）

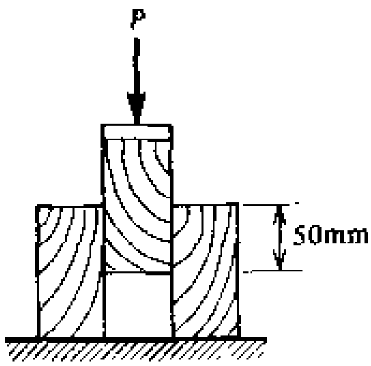


習題圖1.8-6



習題圖1.8-9

1.8－9　剛性的AB桿件，在C點上支着成一槓桿，在B端負載重P。（見習題圖1.8－9）另有三根完全一樣的彈性－塑性材料做成的線，各別支承此剛性桿件。假設所有各線的截面面積均爲A，試求該桿件的屈伏載重P_Y及極限載重P_u值。



習題圖1-9-1

1.9 － 1　三塊木料膠合在一起，其安排如習題圖 1.9 － 1 所示。每塊木料均具相同截面面積，在圖的垂直方向長 200mm 。若載重 P 等於 90 kN ，求膠合接觸處的平均剪應力為若干？

1.9 － 2　在 1 － 22a 圖內所示的聯接，若 $P = 36$ kN ，螺栓的容許剪應力為 $\tau_w = 90$ N/mm² ，試求該螺栓所需的直徑。

1.9 － 3　一個衝孔器的直徑為 20mm，在厚 6mm 的鋼鈑上用 120 kN 力衝出一孔。試求在鋼鈑內的平均直接剪應力，及衝孔器上之平均壓應力。

1.9 － 4　兩根軸材（直徑為 24mm）位在一條線上，在其末端相遇之點用一套管連接在一起，套管在兩個毗連的末端密切套着。套管用 6mm 直徑之釘連接在每一桿件上，釘則按照軸材的軸線成直角穿過套管及軸材。若由該軸材傳遞的轉距為 34Nm 。求釘內剪應力。

1.9 － 5　一根實心圓鋁桿件，裝在一個銅管內，各具相同的長度。銅管的外直徑為 50mm，內直徑為 46mm，鋁桿的直徑為 44mm。在此項裝配的每端各有一個 6mm 直徑金屬銷子與軸線成直角穿過鋁桿及銅管。若溫度昇高 22 ℃，試求銷子的平均剪應力。（關於鋁 $E = 70$ kN/mm² ，$\alpha = 21.6 \times 10^{-6}$/℃；關於銅，$E = 100$ kN/mm² ，$\alpha = 16.7 \times 10^{-6}$/℃ ）。

1.10－ 1　一根等截面鋼桿 250mm 長，被一 26kN 的 P 力壓縮。假設 $E = 200$ kN/mm²，若截面面積 $A = 2600$ mm² 及 $A = 1300$ mm² ，試計算存儲於各桿件內的應變能。

1.10 － 2　決定圖 1 － 7 所示桿件內的應變能，若截面面積為 A ，彈性模數為 E 。

1.10 － 3　有一垂直的等截面桿件，在其本身重量下懸掛，若桿件長度 $= L$ ，截面面積 $= A$ ，彈性模數 $= E$ ，及桿件的單位體積重 $= \gamma$ ，試決定在桿件內的應變能。

1.10 － 4　若在其本身重量以外，桿件下端尚負荷一個軸向載重 P 。試決定在前一習題內，儲存於桿內的應變能。

1.10 － 5　若 $W = 0$ ，試求儲存在習題 1.5 － 7 內旋轉桿的應變能。

1.10 － 6　試將儲存於逐漸尖細桿件內的應變能 U ，使其等於由載重 P 所完成的功 $P\delta/2$ ，以解習題 1.5 － 8 。

1.10 － 7　一個重量 W 附在一根長度為 L ，截面面積為 A 的柔軟線的末

端。線的另一端則連接在固定的支承上。重量自支承點作自由的下落經過線的全長。線在下落重量停止時，即作彈性的伸長，但線的長度與伸長比爲很大。試爲線內的最大應力 σ 導出一公式。

1.10－8　一個重量 W =4.5kN，自高度 h = 1 m向下墜落到一垂直的木桿上，木桿長 6 m，直徑爲 300mm，假設其下端爲固定。若 E = 10kN/mm^2。試決定在木桿內之最大壓應力 σ。（將木桿重量及衝擊時的能損耗略去不計，並假設 δ_{st} 與 h 比爲一很小值）。

1.10－9　就圖 1－26 內所示的系統，決定其高度 h。亦即當重量落下經過此高度而使桿件產生最大應力 σ = 200N/mm^2 時。假設 W = 100 N，L = 2 m，A = 320mm^{2}及 E = 200kN/mm^2。

1.10－10　由第 1－10 款內例題 2，假設一彈性彈簧，其彈簧常數 k（每單位距離之力），裝置在鋼纜末端與重量 W 之間。試爲此種新條件下所起的最大應力 σ，誘導一個公式，並與方程式(b)作一比較。由於加設彈簧之故，應力增加抑或減小？

第二章　應力與應變之分析

2·1 斜面上之應力

當一根等截面桿件僅受單純拉力（圖 2－1 a）時，在與桿軸正交的截面 mn 上，照 1.2 節所述，其應力為均勻分佈而皆等於 P/A 。現在讓我們設想在一傾斜截面上的應力。此一傾斜面與截面 mn 成一角度 θ ，將桿件截斷，因在桿內的縱向纖維均具相同的軸向應變，故代表桿右側部分

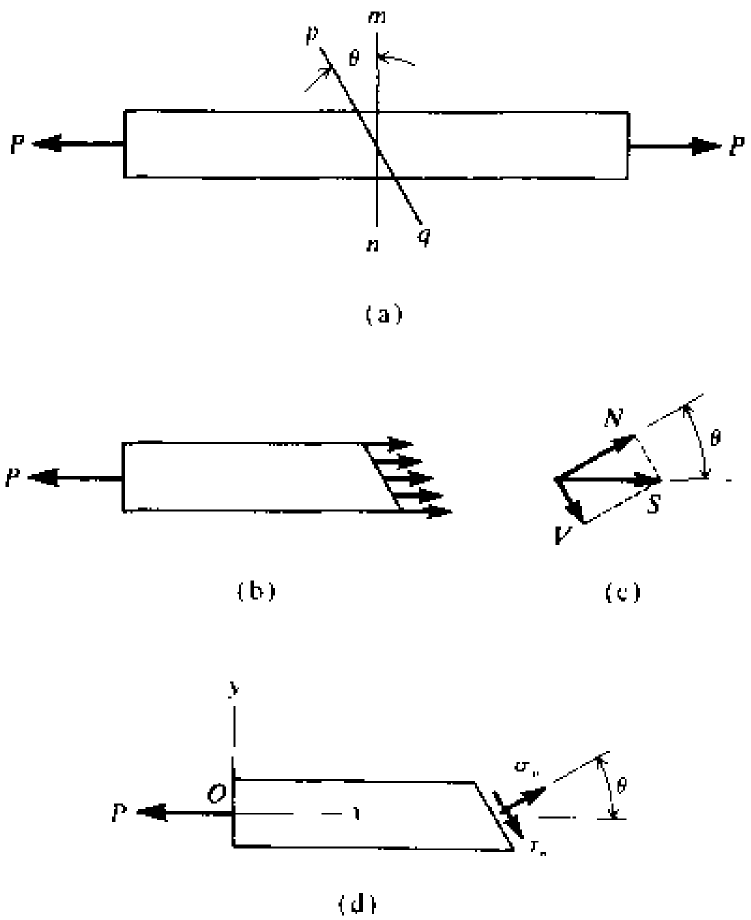


圖 2·1　在受拉力桿斜面上之應力

所加於左側部分作用之力，必然均勻分佈在斜截面 pq 上。桿的左側部分，在這些力與外在載重 P 作用下，是處於平衡狀態的（圖2－1b）。因此，在斜截面上分佈的各力系的合力 S 等於 P。合力 S 可分解成與斜面垂直及平行的 N 與 V 兩個分力（圖2－1c）。這些分力為

$$N = P\cos\theta \qquad V = P\sin\theta$$

因為斜截面面積 A' 為 $A/\cos\theta$，相當於 N 和 V 的各應力將分別為

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \sigma_x\cos^2\theta \tag{2-1a}$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A'} = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta = \sigma_x\sin\theta\cos\theta \tag{2-1b}$$

式中，$\sigma_x = \dfrac{P}{A}$ 為與桿軸正交的截面上，並在 x 方向的應力。應力 σ_θ 及 τ_θ 分別為在傾斜面 pq 上（見圖2－1d）的正交應力及剪應力，皆為均勻分佈於該截面上。應注意，這斜面的定位規定，係用一個從 X 軸量到正交於該傾斜面為止的角度 θ。

方程式（2－1a）係表示，當斜截面被切成種種不同角度時，此正交應力如何隨之變化。當 $\theta = 0$ 時，平面 pq 與截面 mn 相合，如所預料 $\sigma_\theta = \sigma_x$。然後，當 θ 增大時，應力 σ_θ 則減小，一直到 $\theta = \pi/2$ 時變為零。這正指出在桿的縱向纖維間沒有垂直應力。因此，我們瞭解，當 $\theta = 0$ 時，正交應力顯出最大值，即

$$\sigma_{max} = \sigma_x \tag{2-2}$$

從方程式（2－1b），我們知道，當 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$ 時，剪應力 τ_θ 是零。當 $\theta = \pi/4$ 時，τ_θ 值達到其最大值。這個最大值是

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \tag{2-3}$$

雖然最大剪應力是最大正交應力的一半，有時，桿件材料的剪力遠比拉力為弱，對於受軸向載重桿件，最大剪應力即為其控制應力。例如，在扁平的光面低炭鋼桿件作拉力試驗時，桿的兩個扁平面，在大約與拉力軸成 45° 方向內，就可見到條紋（bands）出現。這些條紋指出這種材料正沿着剪應力最大的各傾斜面發生剪力失敗。這種條紋首被標伯（G. Piobert）在1842年觀察到，在1860年又被呂德（W. Lüders）所發現。時至今日則稱為"呂德氏條紋（Lüders band）"或"標伯氏條

紋〃（Piobert's band ）。此種條紋當到達桿件之屈伏應力時，即開始顯現（圖1－2a中之B點）。剪力破壞的另一實例，在圖2－2b內可以見到。該圖表示一個受軸壓載重的短木塊，沿着 45° 平面由剪力而破壞。

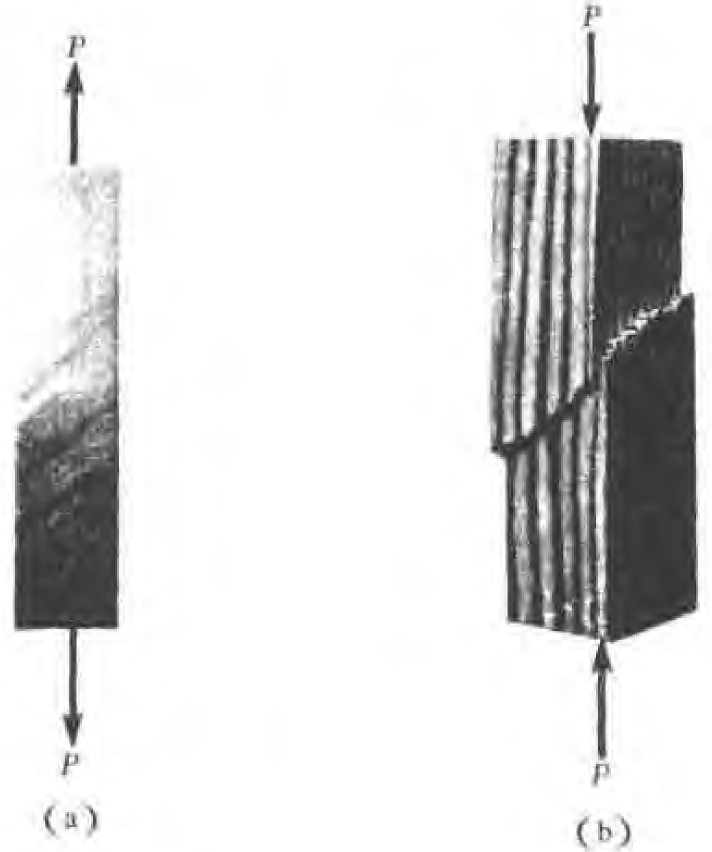


圖2.2 (a)鋼條受軸向拉力產生斜滑條紋
(b)木塊受軸向壓力而破壞

受拉力桿件所導出的方程式（2－1），亦適用於軸向壓縮情況，而給與 σ_x 一個負值。於是在0與 $\pi/2$ 之間的所有值，均可得到 σ_θ 和 τ_θ 的負值。σ_θ 的負值，意指正交應力爲壓縮的，而 τ_θ 的負值，則指剪力作用方向與圖2－1d所示者適相反。圖2－3指示的，是正交應力與應力兩者的符號慣例。正號正交應力 σ_θ 其作用方向是離開材料表面的

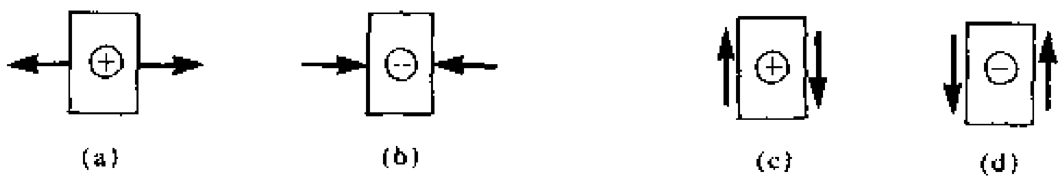
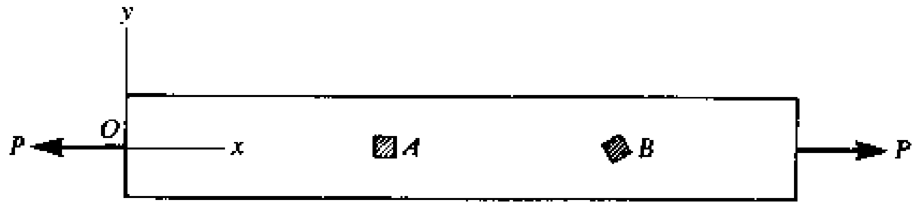


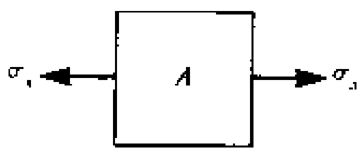
圖2.3 正交應力σ_θ及剪應力τ_θ

，不問那個表面的方向爲何；負號正交應力的作用方向是朝向材料表面的。至於剪應力 τ_θ ，如作用方向對材料表面爲順時針走向的爲正，反時針走向的爲負。

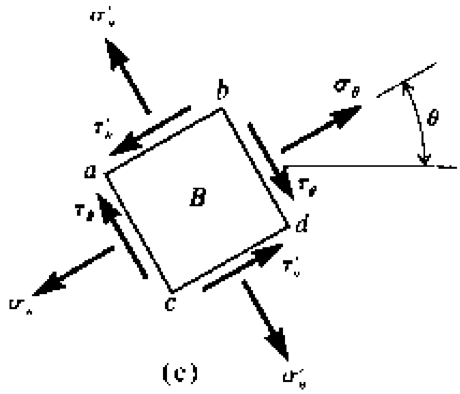
代表在桿件內某一點上應力的一個便利方法，是把材料中的一個"元體（ element）使其孤立成一隔離體，然後在其所有各邊上繪出其應力。例如，從一受拉力桿件中切出 A 與 B 兩個元體，如圖2－4所示。在 A 點的元體作正方向，因此 $\theta = 0$ ，在該元體上所起作用的應力爲 $\sigma_x =$



(a)



(b)



(c)

圖 2・4　從受拉力桿切下之元體 A 及 B 上起作用之應力

P/A 。第二個元體曾被轉一個 θ 角，所以在元體 bd 邊上的應力 σ_θ 和 τ_θ 可從方程式（2－1）算得。該元體 ab 邊的垂線對 X 軸轉一（ $\theta + \pi/2$ ）角，所以把 θ 值以（ $\theta + \pi/2$ ）代入方程式（2－1），即可得到在此平面上的應力，即

$$\sigma_\theta' = \sigma_x \cos^2(\theta + \pi/2) = \sigma_x \sin^2 \theta \tag{2-4a}$$

$$\tau_\theta' = \sigma_x \sin(\theta + \pi/2)\cos(\theta + \pi/2) = -\sigma_x \sin\theta \cos\theta \tag{2-4b}$$

在本例中， σ_x 既爲正值，我們就知道正交應力 σ_θ' 亦爲正值，如圖2－4c所示。在元體 ab 邊的剪應力 τ_θ' 是負號，一如圖中所示，此負號，意指此剪應力對元體表面將按反時針走向作用。

比較方程式（2－1）和（2－4），可以看出：在互成直角各平面的應力間，有兩個有趣的關係。從這些公式我們知道

$$\sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x \tag{2-5}$$

$$\tau'_\theta = -\tau_\theta \tag{2-6}$$

此兩個關係式中的第一個，就拉力桿而言，表示在兩個垂直面上其正交應力之和，終歸是常數，且等於 σ_x 。第二個關係表示，在兩個垂直面上的剪力，在數值上是相等但符號相反。這後一個結論，在 1.9 節曾加說明。

用同一方式繼續下去，在圖 2－4 c 中，在元體其餘的兩邊 ac 和 cd 上，諸應力亦可求出。在 ac 邊上垂線的角度是（$\theta+\pi$），cd邊上的是（$\theta+3\pi/2$），於是得知 ac 邊上之正交應力和剪應力與在 bd 邊上者相等，而在 cd 邊上的應力與在 ab 邊上者爲相等。

當計算一邊上各應力的數值時，例如在 cd邊，有時用負的方向，量一角度來規定一個平面位置，頗爲便利（即從X軸起順時針走向量一角度），反而比採用270°與360°間的正值角度好。例如在圖 2－4 c中的 θ 角等於 30°，當用方程式（2－1）時，規定平面 cd 的角度，可採用 30°+ 270° = 300° ，亦可採用－60°。

2·2 雙軸應力

現在讓我們考慮一種更爲普遍的應力狀況。在這種狀況中，一個元體上的應力，在 x 和 y 兩個方向都起作用。這種應力狀況，就是衆所周知之"雙軸應力（biaxial stress）"，與在前一節中曾經討論過的一度空間應力，或單軸應力的條件，有所不同。雙軸應力發生在壓力容器、樑、軸和其他許多結構部份的分析工作中。其中若干將在以後的討論中遇到。目前，我們對於確定一個其垂直綫與 x 軸成 θ 角的 pq 斜面上起作用的正交應力及剪應力加以研究，如圖 2－5 a 所示。作用於斜面上的應力，有正交應力 σ_θ 和剪應力 τ_θ ，如圖 2－5 b所示。這些與應力 σ_x 與 σ_y 同在一起的應力，可認爲是作用在一個小三角形元體的各邊上，而這個小三角形是從原有的矩形元體上切下來的。

要決定作用於斜面上的應力 σ_θ 和 τ_θ ，我們應考慮三角形元體的平衡狀態。假如用 A表示元體 X面的面積（即 σ_x 作用的面），則元體 y 面的面積爲 $A\tan\theta$，而斜面的面積是 $A\sec\theta$ 。因此，在 x 面上全部的力爲 $\sigma_x A$ ，而在 y 面上的是 $\sigma_y A\tan\theta$ ，此若干力中的每一個力，皆能被分

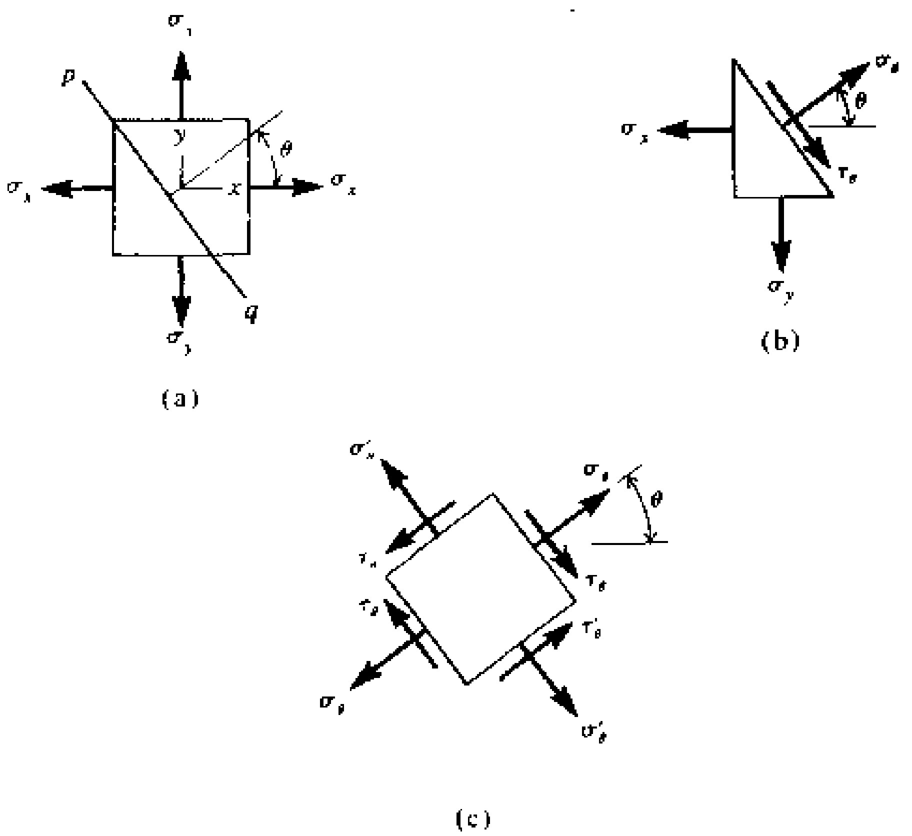


圖2-5　受雙軸應力之元體

解成爲兩個正交的分力，一個是與斜面的方向成垂直作用，另一個是與斜面方向成平行作用。於是我們卽可在兩個方向內將分力總結一起，得到三角形元體的兩個平衡方程式。第一個方程式，是將 σ_θ 方向的力加在一起而得到

$$\sigma_\theta A \sec\theta = \sigma_x A \cos\theta + \sigma_y A \tan\theta \sin\theta$$

從上式得

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta \tag{2-7a}$$

同樣做法，將在剪應力 τ_θ 方向內諸力加在一起

$$\tau_\theta A \sec\theta = \sigma_x A \sin\theta - \sigma_y A \tan\theta \cos\theta$$

或

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta \tag{2-7b}$$

方程式（2－7）分別將 x 和 y 方向作用的正交應力 σ_x 及 σ_y 化成在任何斜面上的正交應力與剪應力的代數值。由下列三角學的關係

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \qquad \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta$$

我們可寫出幾個互換使用的方程式

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta \tag{2-8a}$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta \tag{2-8b}$$

要注意，方程式（2－7）和（2－8）內所用 σ_θ 與 τ_θ 的正負號，是與在前一節（見圖2－3）中所用的是一樣。

假如我們把方程式（2－8）內的 θ 代以（$\theta + \pi/2$），即可得到表示應力 σ_θ' 與 τ_θ'（與 σ_θ 及 τ_θ 作用的斜面成直角的平面上作用時）的方程式（見圖2－5 c），其式如下

$$\sigma_\theta' = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta \tag{2-9a}$$

$$\tau_\theta' = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta \tag{2-9b}$$

將上面的第一個方程式與方程式（2－8 a）合併，則得

$$\sigma_\theta + \sigma_\theta' = \sigma_x + \sigma_y \tag{2-10}$$

上式再度指出，在任何兩垂直平面上的正交應力之和，爲一常數。將方程式（2－8 b）與（2－9 b）相對照，元體的 y 面爲 $A\tan\theta$，此斜面的面積爲 $A\sec\theta$。故 x 面上的總力爲 $\sigma_x A$，y 面上的總力爲 $\sigma_y A \tan\theta$。將這二個方向的總力各分解成二個分力，一個與三角形元體的斜面成直角，一個與斜面成平行。由此得成立二個平衡方程式，其中的一個是由 σ_θ 方向的力和而成立的爲

$$\sigma_\theta A \sec\theta = \sigma_x A \cos\theta + \sigma_y A \tan\theta \sin\theta$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tag{2-11}$$

即，最大剪應力等於兩個主應力差之一半。假如應力 σ_x 和 σ_y 相等，則任何斜面上將無剪應力。

上面討論的最大剪應力，只涉及平行於 z 軸斜面上的剪應力，如圖2－5 a的 pq 平面。我們必須注意此項事實，卽圖2－5 a中的元體，實際是三次元的，不過在 z 方向的應力 σ_z 等於零而已。平行 x 或 y 軸的斜面也能切開此元體，也可能在一個或更多這種平面上，存在着大於方程式（2－11）的剪力。在這種三次元情況下，最大剪應力的測定，以後將在討論三軸應力的那一節中再行敍述（第2.7節）。

所有前面所列二軸應力諸方程式，不論 σ_x 與 σ_y 是拉力或壓力，均

有確實根據。應用這些方程式時，祇需將一切應力的代數數量，使與以前陳述的符號慣例一致。讀者應注意，當使 σ_y 等於零時，兩軸應力方程式即化爲單軸應力（ uniaxial stress ）。

雙軸應力之應變（ strains in biaxial stress ）

雙軸應力（圖2－5a）中，元體在 x 軸方向的應變，不但將因在 x 方向的應力 σ_x 而定，也將因在 y 方向的應力 σ_y 而定［因爲卜桑氏效應（ Poisson's effect ）在1.4節已經陳述］。假設材料合於胡克氏定律，我們知道，由于 σ_x 在 x 方向的應變是 σ_x/E ，由于 σ_y 時，應變爲 $-\nu\sigma_y/E$ 。因此，若應力 σ_x 和 σ_y 同時起作用時，則在 x 方向的應變將爲

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \tag{2-12a}$$

同樣，在 y 方向的應變，可得

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{2-12b}$$

在 z 方向的應變爲

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2-12c}$$

從方程式（2－12a 與b），應力 σ_x 與 σ_y 可用應變 ϵ_x 與 ϵ_y 的函數寫成下式

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)E}{1-\nu^2} \qquad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)E}{1-\nu^2} \tag{2-13a,b}$$

這兩個方程式，當應變 ϵ_x 與 ϵ_y （例如用應變錶量得）爲已知的情況，可用來求應力 σ_x 和 σ_y 。

觀察在 x 、y 與 z 方向，各以（ $1+\epsilon_x$ ）：1、（ $1+\epsilon_y$ ）：1與（ $1+\epsilon_z$ ）：1 的比率增加其大小。所以桿件的體積，係按此比率而增大

$$(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z):1$$

或省略微量的高次方簡化爲

$$(1+\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z):1$$

從上式可以看出，單位體積變化爲

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{2-14}$$

將（2－12）式代入上式，使得下列雙軸應力系中單位體積變化的算式爲

$$\frac{\Delta V}{V}=(\sigma_x+\sigma_y)(1-2\nu)/E \tag{2-15}$$

若 $\sigma_y=0$，此方程式便化成單軸應力系中單位體積變化的方程式（1－7）。

2·3 純剪力

現在讓我們考慮在雙軸應力系中的特殊情況，即 σ_x 爲拉應力，σ_y 爲壓應力而大小相等，即

$$\sigma_x=-\sigma_y=\sigma_0 \tag{2-16}$$

如圖（2－6 a）所示。在元體中的最大剪應力 τ_{max}，發生在一個傾斜角 $\theta=45°$ 斜面上。依上節中的說明，將等於下式（見方程式 2－11）

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}=\sigma_0 \tag{2-17}$$

此種剪應力如圖 2－6 b 所示。將 $\theta=45°$ 代入方程式（2－8 a）與（2－9 a），可得作用於該元體各邊上的垂直應力 $\sigma_\theta=\sigma_\theta'=0$。因此，我們知道，在圖 2－6 b 中的元體，僅受到剪應力。所以，該元體係處於一種純剪力（pure shear）狀態中。我們並瞭解，純剪力是相當於

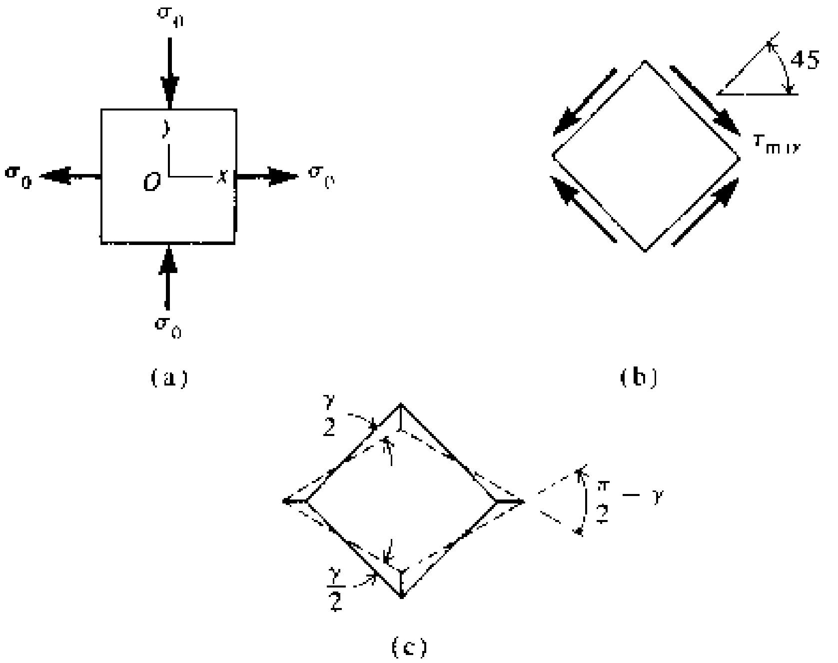


圖 2·6　受純剪力之元體

一種從一個方向受拉應力，在另一垂直方向同時受相等壓應力所產生的應力狀態。當然。若我們考慮一個並非轉 45° 角的元體時，在該元體的各邊，即有正交應力和剪應力發生，仍然可用方程式（2－8）與（2－9）求解。

圖2－6c表示元體在純剪力下所起的扭曲。元體因未受 45° 方向的正交應力，各邊長度沒有變化，但其水平對角綫被拉長，而垂直對角綫却被壓縮短。等於 τ_{max}/G 的剪力應變 γ，出現在附圖中。將等於水平對角綫兩端的兩個直角所減小之量，或等於垂直對角綫兩端的兩個直角所增加之量。在元體任一邊的原來位置和最後位置間的夾角，等於 $\gamma/2$。

在圖2－6c中，元體二對角綫長度的變化，可由前一節內方程式（2－12）的應變 ϵ_x 與 ϵ_y 計算而得。同時，自圖得知，長度的變化依幾何學得與剪力應變 γ 有關。所以，結論可說，剪力模數 G 與彈性模數 E 和卜桑氏比值 ν 有關。

要建立這重要的關係，我們開始觀察水平對角綫長度的增加量 Δd 爲

$$\Delta d = \epsilon_x d \tag{a}$$

式中 d 爲對角綫的原長。假定元體爲正方形，從圖2－6c中幾何的關係可以看出，水平對角綫長度之增加量也等於

$$\Delta d = \frac{\gamma d}{2} \tag{b}$$

此 Δd 等於元體頂端（或底下）之直角的增量，乘垂直對角綫長的一半。然後，從方程式(a)與(b)，我們得到受純剪力元體的 ϵ_x 爲

$$\epsilon_x = \frac{\gamma}{2} \tag{c}$$

從方程式（2－12a）與（2－16）可得到下列的 ϵ_x 式

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_0}{E}(1 + \nu)$$

將 ϵ_x 代入方程式(c)，再把 τ_{max}/G（等於 σ_0/G）代替 γ，便得成立

$$\frac{\sigma_0}{E}(1+\nu)=\frac{\sigma_0}{2G}$$

或

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2-18}$$

此關係式表示材料的 E、G 和 ν 等並非互不相關的。例如，以鋼而言，若假定 $\nu=0.30$ 及 $E=200\text{kN/mm}^2$，則由方程式（2－18）得 $G=77\text{kN/mm}^2$*。

2．4 雙軸應力之摩爾氏圓

當材料受到雙軸應力時，作用於斜面上的應力 σ_θ 與 τ_θ 方程式，可很方便地用圖解形式來表示。爲了說明圖解如何構成，先從介紹其符號開始

$$\sigma_{aver}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \tag{2-19}$$

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \tag{2-20}$$

以上兩式中，σ_{aver}是作用於元體各邊上正交應力的平均值，τ_{max} 是剪應力的最大值。用此種符號，我們可重寫 σ_θ 與 τ_θ 方程式（2－8）如下

$$\sigma_\theta-\sigma_{aver}=\tau_{max}\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta=\tau_{max}\sin 2\theta$$

此兩個方程式是用 2θ 角爲參變數（parameter），寫成屬於參變數形式的圓方程式。將二個方程式的兩側自乘，再加在一起以消去參變數；而得下式

$$(\sigma_\theta-\sigma_{aver})^2+\tau_\theta^2=\tau_{max}^2 \tag{2-21}$$

此爲一圓方程式。將 σ_θ 與 τ_θ 當作自變數，半徑等於τ_{max}。此圓在圖2－7中以 σ_θ 爲橫座標，以 τ_θ 爲縱座標。從方程式（2－21）中可看出，圓心C的座標是 $\sigma_\theta=\sigma_{aver}$ 與 $\tau_\theta=0$。此圖解法首先由德國工程師奧圖摩爾（Otto Mohr）在1882年發展而成，稱爲摩爾氏圓（Mo-

* 方程式（2－18）係由卜桑氏導得，氏曾用 1/4 作 ν 值（參考2－5節）。

hr's circle)。

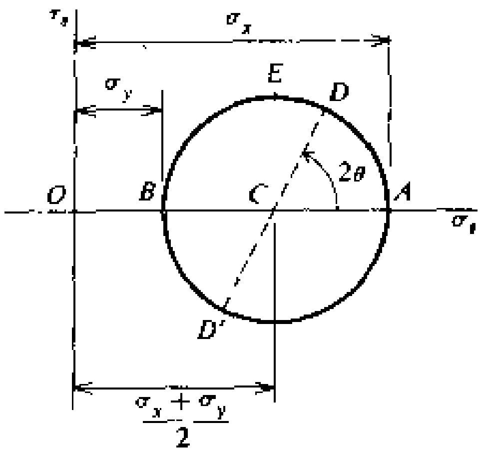


圖 2·7 雙軸應力之摩爾氏圓

首先觀察摩爾氏圓上的 A 點，其座標爲

$$\sigma_\theta = \sigma_{aver} + \tau_{max} = \sigma_x \quad 與 \quad \tau_\theta = 0$$

代表元體 x 面上諸應力（ $\theta = 0$ ）。同樣，圓上 B 點的座標爲 $\sigma_\theta = \sigma_y$ 與 $\tau_\theta = 0$ ，代表元體 y 面上諸應力（ $\theta = 90°$ ）。

現在再研究在圓上的任意點 D ，此點係從 A 點（此處 $\theta = 0$ ）量一個 2θ 角來定出。D 點的座標 σ_θ 和 τ_θ 、可從圓的幾何求得如下

$$\sigma_\theta = OC + CD\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$$
$$\tau_\theta = CD\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta$$

此二式與方程式（ 2 − 8 ）比較，明顯的，這 D 點座標代表圖 2 − 5 中用 θ 角所定出的斜面上的應力 σ_θ 與 τ_θ 。但應注意的是此雙倍角 2θ ，是用在摩爾圓上爲定出 D 點而設的。當 θ 角從 0 變化到 $\pi/2$ 時，D 點即從 A 點移至 B 點，因此上半個圓形，就盡在 $\theta = 0$ 與 $\theta = \pi/2$ 之間，元體的一切方位角上的應力 σ_θ 與 τ_θ 皆可定出。例如，若 $\theta = \pi/4$ ，則 $2\theta = \pi/2$ ，D 點將在圓的頂點（即 E 點）。在該點我們可得

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

因此，E 點代表起最大正剪應力的平面，此時圓的半徑是等於 τ_{max} ，也就是所希望得到的結果。

假如我們要使 θ 角大於 $\pi/2$ ，在摩爾氏圓上的相當點，是在圓的下側一半。例如，D' 點是在 D 點直徑上的相反端，所以用（ $2\theta + \pi$ ）角

來確定其位置，意指 D' 點代表諸應力，作用在某一面上。該面係與 σ_θ 與 τ_θ 作用之面成直角。檢視圖2－7，可看出 D' 點的座標，等於 σ_θ' 與 τ_θ'（見圖2－5c與方程式2－9）。如此，讓 2θ 在摩爾氏圓上從 0° 變到360°，我們即可得到在圖2－5c中 θ 從 0° 到180°，亦即在元體的一切邊上的應力。當然，在其餘各面上的應力。θ 從180° 到 360°，應當等於在相對各面上的應力。

關於摩爾氏圓的作圖程序，通常是（用適當的比例尺）在 σ_θ 軸上定出 A 點和 B 點，然後通過這兩點畫一圓。要在用 θ 角定出的任何斜面上諸應力，可先量一個 2θ 角，並定出 D 點的位置即得。該點的座標可在圖上直接按比例量得，或作三角學的運算求得，即爲所求的應力 σ_θ 與 τ_θ。若應力 σ_x 與 τ_y，其中一個或全部是壓應力，可按照同樣的程序進行。但也有圓形的一部分或圓形的全部可能位於原點的左方，另有必須牢記的，即 2θ 角，係從 A 點按反時針走向度量的，因其代表在 x 平面上的應力。雖然 A 點可能在水平直徑的左端，此種情況，只要 σ_x 的代數值小於 σ_y 時就會發生（見下面的例題）。

若要用相反的作法來利用摩爾氏圓亦屬可能；例如在一個受雙軸應力的元體上，其應力 σ_θ、τ_θ、σ_θ' 與 τ_θ' 爲已知時，可利用摩爾氏圓求得應力 σ_x 與 τ_y。其程序是從已知各應力值定出 D 點與 D' 點，並用 DD' 爲直徑畫圓。A 點與 B 點的位置，可由圓與 σ_θ 軸的交點定出。如此不僅決定了應力 σ_x 與 σ_y，並且也決定了元體的旋轉角 θ。

【例題】　試就下述的雙軸應力情況作摩爾氏圓。$\sigma_x = -84\text{N/mm}^2$ 與 $\sigma_y = 28\text{N/mm}^2$。並求出在 $\theta = 20°$ 時元體上各邊的應力 σ_θ，τ_θ，σ_θ'，及 τ_θ'。

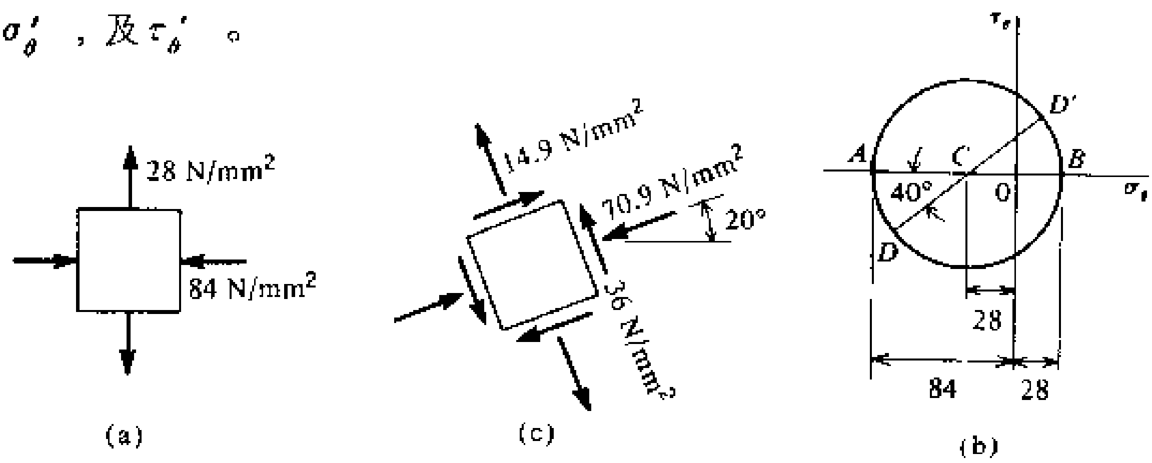


圖2‧8　數字例題

先從定出 A、B 兩點開始，如圖2－8 b所示，分列在 $\theta=0$，$\theta=90°$ 兩平面上，各表示其應力。圓的中心是在 $\sigma_{aver}=-28\text{N/mm}^2$，而半徑為 56N/mm^2。

由 A 點按反時針走向量角 $2\theta=40°$ 定出 D 點，D 點座標由計算得（或用比例尺量出）：

$$\sigma_\theta=-70.9\ \text{N/mm}^2 \qquad \tau_\theta=-36\ \text{N/mm}^2$$

這些應力已在圖2－8 c的已轉元體的簡圖內表示了。D' 點在 $2\theta=220°$ 或 $\theta=110°$ 的平面上產生應力，這些應力是：

$$\sigma'_\theta=14.9\ \text{N/mm}^2 \qquad \tau'_\theta=36\ \text{N/mm}^2$$

亦在圖2－8 c中表明了。因此，用摩爾氏圓，我們能在一個已轉的元體上決定一切應力。

2.5 平面應力

單軸與雙軸應力，兩者均屬於一個更為普遍而稱為平面應力（plane stress）的特殊狀況。平面應力中的一個元體，可能在 x 與 y 面上兼有正交應力與剪應力，如圖2－9 a內所示的情形。在元體的 z 面上，並無任何應力。在元體頂面上的剪應力以 τ_{xy} 表示。在註脚中之第一個字（x）表示應力作用的面，第二字（y）則表示剪應力的方向。當使用此種符號以鑑定剪應力時，在習慣上常假定剪應力朝向 y 軸的正方向作用時，該剪應力作為正。因此，圖示 τ_{xy} 之方向為正向。同樣，在元體頂面的剪應力用 τ_{yx} 來表示。指出該應力係在元體的 y 面上作用，並在 x 的正方向。此處所使用剪應力 τ_{xy} 與 τ_{yx} 的符號慣例，因其在彈性力學中已被廣泛採

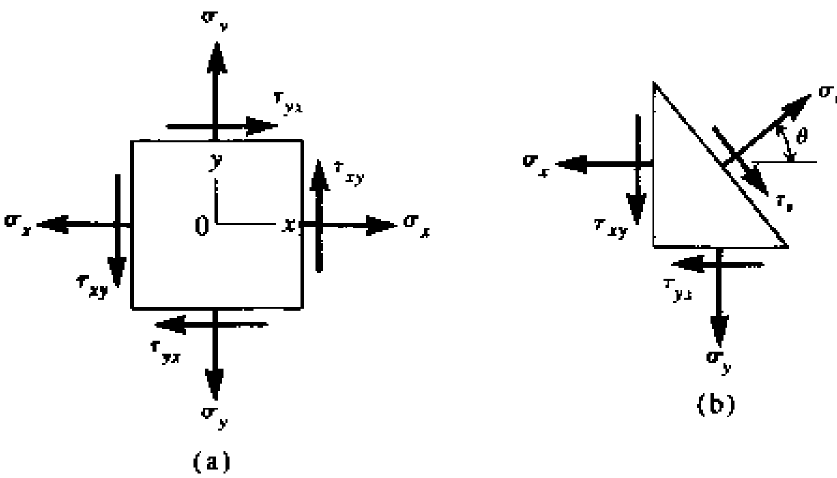


圖2.9 受平面應力之元體

用之故。

可是，在以前的討論中，我們曾爲剪力 τ_θ 用過一套符號慣例，是基於剪應力對元體作用的方向作順時針走向或反時針走向的。在我們關於平面應力之研究中，我們仍將繼續採用 τ_θ 的那種慣例；所以，我們可以看出在 $\theta = 0°$ 的平面上（元體的 x 面），將有 $\tau_\theta = -\tau_{xy}$ 的情形，而在 $\theta = 90°$ 的平面上，將有 $\tau_\theta = \tau_{yx}$ 的情形。又，由於相互垂直平面上剪應力的相等性（ equality ），很明顯地將有下述的情形

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{2-22}$$

現在讓我們考慮一個傾斜截面上，其正交線與 x 軸成 θ 角（圖2－9 b）。作用在該截面上的正交應力 σ_θ 及剪應力 τ_θ，可從三角形元體的平衡條件求得之。在寫平衡方程式時，一定要記得元體各面的面積並非全是相同的，爲求全部應力起見，每個應力必須乘以應力作用的面積。前此誘導變軸應力的方程式（2－7）時，即曾照此相同的步驟求得。在 σ_θ 方向內（圖2－9 b），由各力系的平衡得

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \tag{2-23a}$$

而在 τ_θ 方向各力系的平衡，成立

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \tag{2-23b}$$

如再採用適當的三角學關係，可將方程式（2－23）改用下列可以互代的形式來表示

$$\sigma_\theta = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{2-24a}$$

$$\tau_\theta = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{2-24b}$$

這些方程式，可用 σ_x、σ_y 與 τ_{xy} 間的關係來表示任何平面上的正交應力及剪應力。應注意者，當 $\theta = 0°$ 時，由若干方程式可得到 $\sigma_\theta = \sigma_x$，與 $\tau_\theta = -\tau_{xy}$；當 $\theta = \pi/2$，由若干方程式可得到 $\sigma_\theta = \sigma_y$，$\tau_\theta = \tau_{xy}$。並可看出，當 $\tau_{xy} = 0$ 時，方程式（2－23）與（2－24）將分別化爲變軸應力方程式（2－7）與（2－8）。

當應用前述的 σ_θ 與 τ_θ 方程式時，必須小心觀察應力的符號慣例：(a)一切垂直應力凡受拉力時均爲正號，(b)剪應力 τ_{xy} 在 y 軸方向時爲正號（圖2－9 a）；(c)當剪應力 τ_θ 在材料面上順時針走向的爲正號（圖2－9 b）選用這種 τ_θ 的符號慣例，其理由是，當 τ_θ 值爲正號時，可使摩爾氏圓中的2 θ 角，可按反時針走向度量，亦爲用以量度正向 θ 角的同樣方法。

與 x 軸成（ $\theta + \pi/2$ ）角的一個平面上的應力 σ_θ' 與 τ_θ' ，可由方程式（ 2 － 24 ）中，將 θ 更換為（ $\theta + \pi/2$ ）求得之。若按如此做法，即可求得 $\sigma_\theta + \sigma_\theta' = \sigma_x + \sigma_y$ 與 $\tau_\theta = -\tau_\theta'$

一如以前曾為雙軸應力所表示者。如此，我們再度看到諸垂直面上的正交應力之和，仍保留不變而為一常數。在諸垂直面上的剪應力，均為數量相等而方向相反。

主應力（ principal stresses ）：

當圖 2 － 9 b 內的 θ 角從 0° 變至 360° 時，應力 σ_θ 與 τ_θ 也同時在變。σ_θ 的最大值與最小值，為其主應力，發生主應力的主平面，可取其導數 $d\sigma_\theta/d\theta$ ，使等於零而解得 θ ，便可求得其位置。因此，自方程式（ 2 － 24a ）可得到下式

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

或

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{2-25}$$

式中的 θ_p ，是用來代替 θ 以確定主平面的角度。$2\theta_p$ 有兩個值，相差為 180° 角。可自方程式（ 2 － 25 ）定得。第一個值是在 0° 與 180° 之間，第二個值是在 180° 與 360° 之間。因此，可得兩個 θ_p 值；一個在 0° 與 90° 之間，另一個在 90° 與 180° 之間。此兩個 θ_p 之一的正交應力 σ_θ 為最大值，另一個為其最小值。這兩個主應力出現在互相垂直的兩個平面上。

從方程式（ 2 － 25 ）求得兩個 θ_p 值後，將 θ_p 代入方程式（ 2 － 24a ）以求在任何情況下的兩個主應力。用代數運算，也能得到主應力的一般公式。如作此運算，由方程式（ 2 － 25 ）內，可看出下列的關係

$$\cos 2\theta_p = \pm\frac{\sigma_x - \sigma_y}{s} \qquad \sin 2\theta_p = \pm\frac{2\tau_{xy}}{s}$$

式中 $S = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$ 。將這些式子代入方程式（ 2 － 24 a ），即得

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2-26}$$

式中 σ_1 ，σ_2 分別表示代數的最大與最小主應力。如所預料，我們從方程

式（2－26）就可以注意到，$\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x+\sigma_y$。

從方程式（2－24b）能作一項關於主平面的重要結果。在該方程式內，我們使$\tau_\theta=0$，求解2θ，將再度得到方程式（2－25）。此一結果將表示，在主平面上沒有剪力＊

<u>最大剪應力</u>（maximum shear stresses）：

現在讓我們來推求最大剪應力及其作用面。取τ_θ式的導數$d\tau_\theta/d\theta$（見方程式2－24b），並使之等於零，即得

$$\cot 2\theta_s = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{2-27}$$

式中θ_s表示最大剪力面的角。我們用上式與方程式（2－25）作一比較，可知$\cot 2\theta_s=-\tan 2\theta_p$，所以，我們即可斷定$2\theta_s$與$2\theta_p$必相差90°。所以最大剪力面，發生在與主力面成45°角之處。在雙軸應力內，早已注意及此（見2.2節）。我們從方程式（2－27）求出的$2\theta_s$值代入方程式（2－24b），即可發現最大剪應力是

$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{2-28a}$$

上式又等於

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \tag{2-28b}$$

在最大剪應力平面上，正交應力爲

$$\sigma_\theta=\sigma'_\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \tag{2-29}$$

【例題】 受平面應力下的一個元體，受到如圖2－10a 中的各個應力$\sigma_x=120\text{N/mm}^2$，$\sigma_y=45\text{N/mm}^2$和$\tau_{xy}=30\text{N/mm}^2$。試決定(a)主應力與主平面，(b)在轉45°角的元體上的應力，與(c)最大剪應力。繪圖說明在已轉的元體上的每一結果。

(a)先定主平面的位置，利用方程式（2－25），得$\tan 2\theta_p=0.8$。所以，$2\theta_p=38°40'$與$218°40'$；或$\theta_p=19°20'$與$109°20'$。將$2\theta=38°40'$代入方程式（2－24a），得$\sigma_\theta=130.5\text{N/mm}^2$，並將$2\theta=218°40'$代入方程式（2－24a），得$\sigma'_\theta=34.5\text{N/mm}^2$。因此

＊主應力，首由高許（A.L.Cauchy）介紹。從一組軸線變換到另一組軸線的方程式，首由來金（W.J.M.Rankine）與戴聖味（Barre de Saint-Venant）誘導出來。

，最大主應力爲 $\sigma_1 = 130.5\text{N/mm}^2$ 及最小主應力爲 $\sigma_2 = 34.5\text{N/mm}^2$ 。在圖2－10b中表示該項應力。各主應力亦可用方程式（2－26）核算。

(b)在轉45°角，元體上的應力，可從方程式（2－24）求得。將 $\theta = 45°$ 代入這些方程式，得 $\sigma_\theta = 112.5\text{N/mm}^2$，$\tau_\theta = 37.5\text{N/mm}^2$ 以及表明於圖2－10c中的這些應力。在 $\theta = 135°$ 平面上（自方程式2－24），正交應力與剪應力爲 $\sigma'_\theta = 52.5\text{N/mm}^2$ 與 $\tau'_\theta = -37.5\text{N/mm}^2$ 。

(c)從方程式（2－27），可求得與最大剪應力面形成的角度如下：$\cot 2\theta_s = -0.8$，$2\theta_s = 128°40'$ 與 $308°40'$；或 $\theta_s = 64°20'$ 和 $154°20'$ 。用方程式（2－24）並將 $2\theta = 128°40'$ 代入，即可求得 $\sigma_\theta = 82.5\text{N/mm}^2$ 與 $\tau_\theta = 48\text{N/mm}^2$ 。所有這些應力均表示在圖2－10d中的元體上。也可用方程式（2－28）與（2－29）求出諸應力值，作爲核算用。

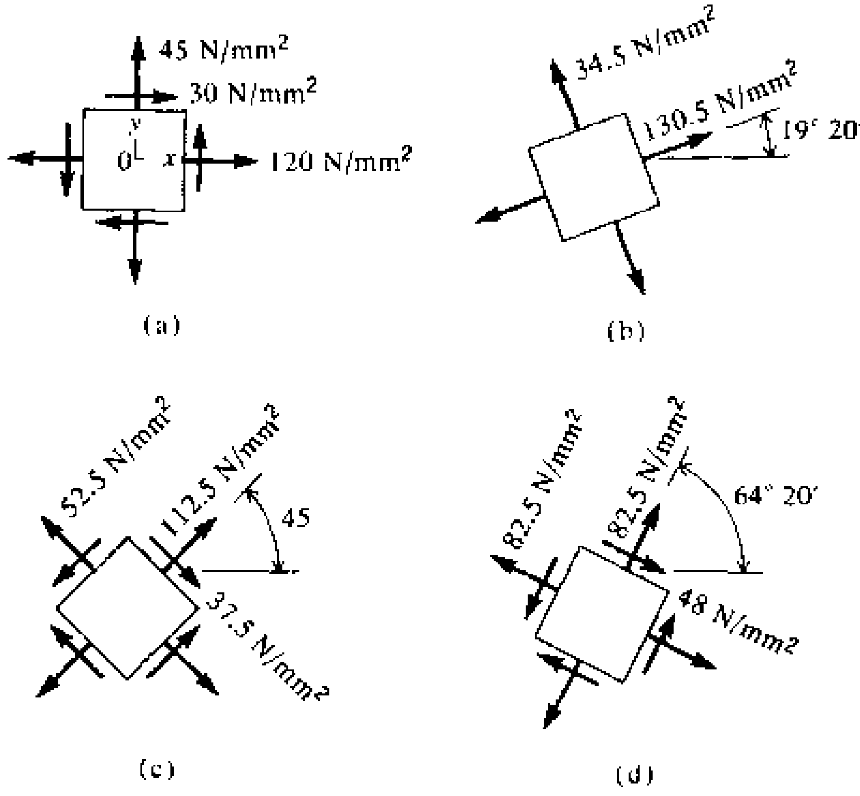


圖2-10 數字例題

2.6 平面應力之摩爾氏圓

平面應力的一般情況，σ_θ 與 τ_θ 方程式〔見方程式（2－24）〕亦能由摩爾氏圓的方法用圖來表達。與雙軸應力同樣的情況着手，將方程式（2－24）合併成單一方程式

$$(\sigma_\theta - \sigma_{aver})^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{2-30}$$

式中 $\sigma_{aver} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$。此式亦爲一個圓方程式，圓心在 $\sigma_\theta = \sigma_{aver}$ 與 $\tau_\theta = 0$ 的座標上。圓的半徑，等於方程式右側的平方根；這式子比在2.4節中的雙軸應力式更爲複雜。不過，要注意，若方程式（2－30）中的 $\tau_{xy} = 0$，此式即化成方程式（2－21），成爲一個特殊的情況。

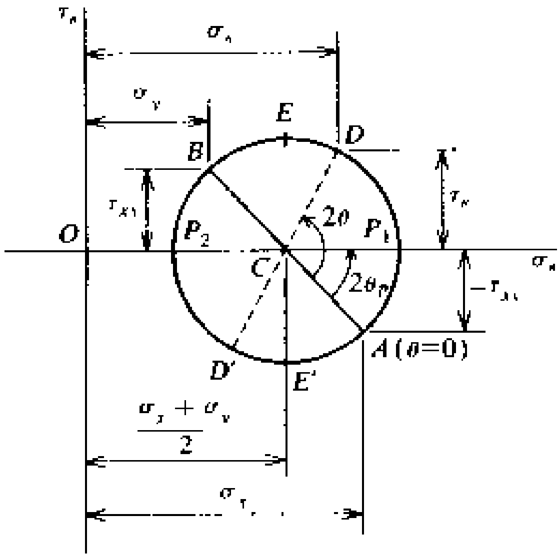


圖 2 - 11　平面應力之摩爾氏圓

摩爾氏圓的作圖法，說明在圖2－11中。開始先定出圓的中心C，其座標爲 $\sigma_\theta = \sigma_{aver}$ 與 $\tau_\theta = 0$。其次，定出在圓上的A點，代表元體 x 平面上的應力情況（$\theta = 0$）。對於這一點，我們知道 $\sigma_\theta = \sigma_x$ 與 $\tau_\theta = -\tau_{xy}$，（重查圖2－9所示的符號慣例）。在 y 平面的應力爲 $\sigma_\theta = \sigma_y$ 與 $\tau_\theta = \tau_{xy}$。用在摩爾氏圓上的B點來代表。注意，A、B兩點是代表在互成90°角兩平面上的各項應力。係在直徑的相對兩端，亦即彼等在摩爾氏圓中相距180°角。

以C爲中心，經過A和B兩點畫一摩爾氏圓，現在卽能定出與 x 軸成一 θ 角的任何斜面上的應力。只要從A點作反時針走向畫出一個 2θ 角，因而在圓上可定出D點，其座標 σ_θ 與 τ_θ 卽等於其相當平面上的應力。證明D的座標，可由方程式（2－24）提供，留作練習之用（見問題2.6－8）。

D′點，在D點直徑的彼端，其座標代表在一個與D點所代表的平面成90°角的平面上之應力。圓頂E點是代表最大正剪應力面上的各應力。

在圓底 E' 點則與發生最大負剪應力的平面相對應。在這些平面上，正交應力等於平均應力，如2.5節所解釋。

摩爾氏圓各種用途之一，爲各主應力的決定。這些應力即爲最大與最小正交應力，在圓上的 P_1 與 P_2 兩點爲其代表（圖2－11）。這 P_1 點是代表代數值較大的主應力 σ_1 ，是等於平均應力（C點）加圓的半徑，而代數值較小的主應力 σ_2（ P_2 點），則等於平均應力減圓的半徑。由此項觀察，已符合以前所導出主應力的方程式（2－26）。位於第一主平面（見圖）的角$2\theta_p$，其切綫等於τ_{xy} 除以C點和A點間的水平距離。這水平距離等於$\sigma_x-(\sigma_x+\sigma_y)/2$ 或$(\sigma_x-\sigma_y)/2$。因此，我們瞭解到

$$\tan 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

與方程式（2－25）相一致。第二主平面（ P_2 點）仍由同一方程式確定之。如2.5節方程式（2－25）所指出，有兩個$2\theta_p$值差爲180°角。

由以上的討論，我們瞭解，用摩爾氏圓可作任何斜面上應力的圖解，與求主應力和最大剪應力的情形相同。

【例題】 受平面應力的一元體，其應力$\sigma_x=120\mathrm{N/mm^2}$，$\sigma_y=45\mathrm{N/mm^2}$與$\tau_{xy}=30\mathrm{N/mm^2}$，如圖2－12所示。用摩爾氏圓，求(a)主應力與主平面，(b)求轉45°角元體上的應力，與(c)求最大剪應力。（注

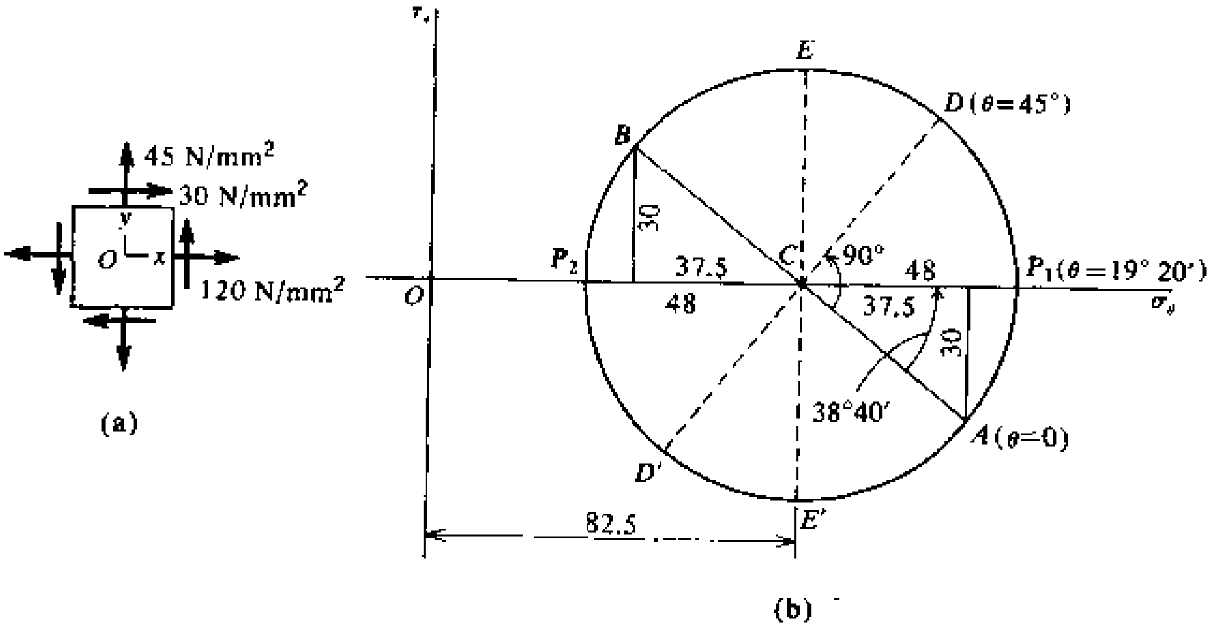


圖2・12 數字例題

意：這同一問題，曾在2.5節內解答過）。

圓心 C，定在 σ_θ 軸上某一點，其座標爲 $\sigma_\theta = \sigma_{aver} = 82.5\text{N/mm}^2$，其次定出 A 點，其座標爲 $\sigma_\theta = 120\text{N/mm}^2$ 與 $\tau_\theta = -30\text{N/mm}^2$。再用半徑等於 48N/mm^2 畫一圓。B 點是與 A 點在直徑上正好相反的另一端，其座標爲 $\sigma_\theta = 45\text{N/mm}^2$，$\tau_\theta = 30\text{N/mm}^2$。

(a)代數值較大的主應力 σ_1 等於 $82.5 + 48 = 130.5\text{N/mm}^2$，如由圓的幾何關係求之，則相當的主平面，所具的 $2\theta_p$ 角等於 38°40′。因此，從 x 軸到主平面間的角爲 19°20′。另一主軸應力 σ_2（點 P_2），等於 $82.5 - 48 = 34.5\text{N/mm}^2$，則作用於 $\theta = 19°20' + 90° = 109°20'$ 的平面上。於是，所有主應力與主平面均從摩爾氏圓求出，並繪出如在圖 2－10b 中所示的元體上。

(b)在一個轉 45° 角的平面上的應力，用 $2\theta = 90°$，與 $\theta = 45°$，將 D 點繪於摩爾氏圓上。CD 綫與 σ_θ 軸間的夾角爲 90° 減 38°40′ 或 51°20′。此角的餘弦是 0.625，因此得，由 D 點代表的正交應力是 $\sigma_\theta = 82.5 + 48(0.625) = 112.5\text{N/mm}^2$。又剪應力爲 $\tau_\theta = 48 \times \sin 51°20' = 37.5\text{N/mm}^2$。由 D' 點代表的應力可由類似的情況求出，而這些結果可將一個已轉 45° 角的元體的草圖繪出（見圖 2－10c）。

(c)最大剪應力與其平面，可在摩爾氏圓上用 E 點和 E' 來代表。讀者甚易證明：由這兩點得出的應力 σ_θ 與 τ_θ 值與圖 2－10d 中所示者相符。

2·7 三軸應力

從三個垂直方向受到應力 σ_x、σ_y 與 σ_z 的物料元體，被認爲處於三軸應力（triaxial stress）狀態。若由平行 z 軸的斜面將元體切開（圖 2－13b），斜面上的應力只有 σ_θ 與 τ_θ，與前面分析雙軸應力時的應

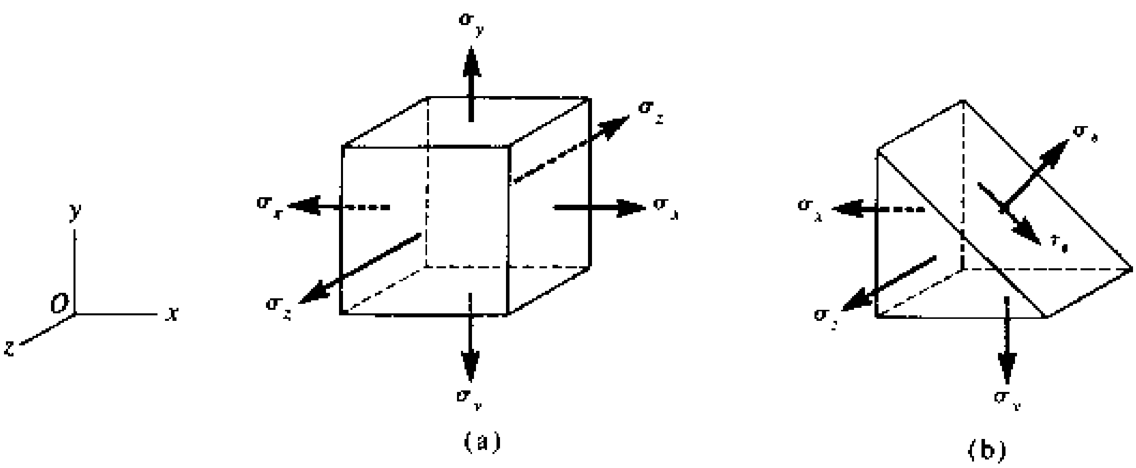


圖 2・13　受三軸應力之元體

力相同。因此種應力係利用 xy 面上的平衡方程式按靜力學求出，故與應力 σ_z 無關。於是我們欲求應力 σ_θ 與 τ_θ 時，即可利用雙軸應力的方程式與摩爾氏圓。對於與 x 及 y 軸平行所切開元體的斜面，其一般性的結論，同樣適用。

由前一節討論中，我們得知應力 σ_x、σ_y 與 σ_z 爲元體內的主應力。而最大剪應力即發生在與其中一個座標軸平行並以 45° 角切開元體的平面上，而與 σ_x、σ_y 與 σ_z 的相對的數量有關。例如，若我們僅考慮與 z 軸平行的各平面時，其最大剪應力爲

$$(\tau_{max})_z = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tag{2-31a}$$

上式係由（2－11）式求得。與此相似，在與 x 軸與 y 軸平行之平面上的最大剪應力分別爲

$$(\tau_{max})_x = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \qquad (\tau_{max})_y = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \tag{2-31b,c}$$

由前面三式中之一，以求元體中在數目上爲最大的剪應力，則有賴於 σ_x、σ_y 與 σ_z 的相對值而定。

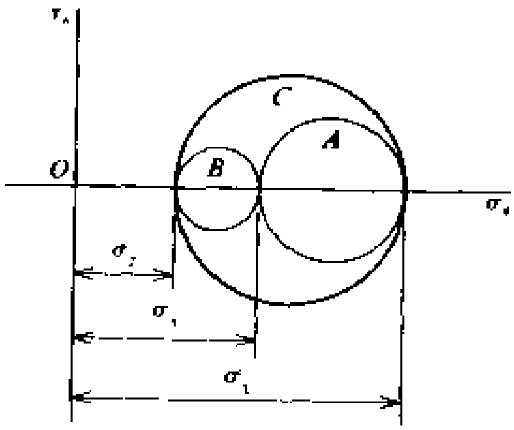


圖 2 - 14　三軸應力之摩爾氏圓

藉摩爾氏圓之助，可對同樣結果便於具體瞭解。在圖 2 － 14 內標示的 A 圓，是與 z 軸平行的各平面，假定 σ_x 與 σ_y 均爲拉力而且 $\sigma_x > \sigma_y$。同樣，B 圓與 C 圓，皆分別爲與 x 與 y 軸平行的各平面而獲得。三圓的半徑，代表用（2－31）式求得的最大剪應力，而絕對最大剪應力等於最大圓的半徑。

在不與任何軸平行的歪斜方向切開如圖 2 －13a 內所示元體的各平面

上，其剪應力與正交應力，可用更複雜的三度（ three dimensional ）分析法求得。在歪斜平面上的正交應力，其數值總是介於最大與最小主應力的代數值之間，而剪應力在數值上總是小於由（ 2 － 31 ）式求得的最大剪應力。

三軸應力之應變（ strain in triaxial stress ）：

若材料的物性合於胡克氏定律，則三軸應力之 x 、 y 與 z 方向諸應變，可用雙軸應力的同樣步驟求得之。因此，我們可容易地得到下列的方程式：

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \tag{2-32a}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \tag{2-32b}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2-32c}$$

元體的單位體積變化（見方程式 2 － 14 ）爲

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

三個主應變 ϵ_x 、 ϵ_y 與 ϵ_z 之和，有時稱爲膨脹（ dilatation ））。將（ 2 － 32 ）式中諸應變值代入前式，得三軸應力的一般情況式

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2-33}$$

當元體受到流體靜壓力的特別情況時，或在三個方向受到全面均勻的壓力時，則得

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \tag{a}$$

式中 p 爲壓應力。於是由（ 2 － 33 ）式，可得

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-3(1-2\nu)p}{E} = -\frac{p}{K} \tag{b}$$

式中

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{2-34}$$

由(b)式可知，單位體積的收縮與壓力 p 成正比，而與 K 量成反比。K 量稱爲體積彈性模數（ bulk modulus of elasticity ）。

<u>應變能</u>（ strain energy ）：

爲求貯存於受三軸應力元體中的應變能，讓我們開始認爲元體是一個單位大小的正六面體。那時元體 x 面上的應力 σ_x 其數值等於該面上的全部力。此力將移動一段等於 ϵ_x 距離，因此所作的功等於 $\sigma_x\epsilon_x/2$ 。同樣，應力 σ_y 與 σ_z 所作的功，分別等於 $\sigma_y\epsilon_y/2$ 及 $\sigma_z\epsilon_z/2$ 。全部的功，等於貯存於元體中每單位體積的應變能爲

$$u=\tfrac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x+\sigma_y\epsilon_y+\sigma_z\epsilon_z)$$

將（ 2 － 32 ）式中各應變值代入上式，則得

$$u=\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)-\frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z) \tag{2-35}$$

當應用上式時，應力 σ_x 、 σ_y 與 σ_z 必須用正確的代數符號代入，即用正號是拉應力，負號是壓應力。

2・8 平面應變

在有關材料及結構行態的實驗研究中，常普遍地使用應變儀以量度其應變。因此，求得在各種方向內的正交應變與剪應變的理論關係，跟在 2.5 節（平面應力）中所得的關係相類似，是一件頗饒興趣之事。讓我們開始想到存在於 xy 平面內的三個分應變：在 x 方向的正交應變 ϵ_x （圖

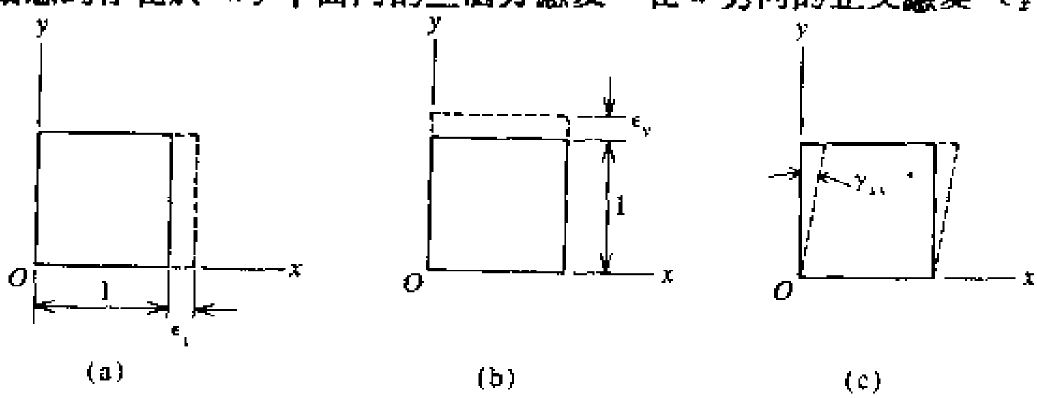


圖 2・15 應變 ϵ_x，ϵ_y 及 γ_{xy}

2－15a），在 y 方向的正交應變 ϵ_y（圖2－15b）與剪力應變 γ_{xy}（圖2－15c）。在一個元體內的剪力應變 γ_{xy}，其定義是：當元體朝向 xy 軸方位，被對向如圖2－15c 所示在其左下方直角的減小量，即爲該元體的剪力應變。此一正剪力應變的定義，是和正剪力應力的定義相一致，（見圖2－9a）。

若某種材料元體，僅受應變 ϵ_x、ϵ_y 與 γ_{xy}，即可說是處於“平面應變”（plane strain）狀態中。此種元體並無正交應變 ϵ_z，亦無分別在 xz 與 yz 平面中的剪力應變 γ_{xz} 與 γ_{yz}。我們瞭解，平面應變的一般情況，將受到下列條件的限定

$$\epsilon_x \neq 0 \qquad \epsilon_y \neq 0 \qquad \gamma_{xy} \neq 0 \tag{a}$$

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{b}$$

上面的平面應變定義和平面應力定義相類似（2.5節）。在一般情況中，平面應力可表示如下：

$$\sigma_x \neq 0 \qquad \sigma_y \neq 0 \qquad \tau_{xy} \neq 0 \tag{c}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{d}$$

在前面的兩組方程式間之類似性，不應論斷爲平面應力與平面應變將在同一種條件下發生。例如，我們知道，在平面應力中的元體，將遭受 z 方向的應變，此即顯示平面應力情況，將不一定產生平面應應情況。再者，平面應變中的元體，常會具有在其上作用的應力 σ_z，以便保持 $\epsilon_z = 0$ 的情況。所以，在情況正常時，平面應力與平面應變並不同時發生。

在2.5節中曾導出應力轉換方程式。原爲平面應力情況而得到的；其後在2.7節中，若該元體已對其中一個座標軸起旋轉，我們對應變之處置，將照同樣的方式辦理。應變的轉換方程式，按平面應變的情況導出，但對三軸應變而言，倘若旋轉到一個新方向，係發生於一個座標軸上者亦可用。結果，應變轉換方程式（下面導出）亦能用于發生在平面應力的應變，正好像平面應力的方程式（2.5節）亦能用于發生在平面應變情況中的應力。

爲了要導出平面應變的轉換方程式，讓我們開始仔細思考圖2－16所示的各個座標軸。假設與 xy 軸有關聯的正交應變 ϵ_x 與 ϵ_y 及剪力應變 γ_{xy} 爲已知。分析的目的，在求與 $x'y'$ 軸有關聯的正交應變與剪應變，$x'y'$ 軸是對 xy 軸已轉一 θ 角的新軸。在 x' 軸方向的正交應變用

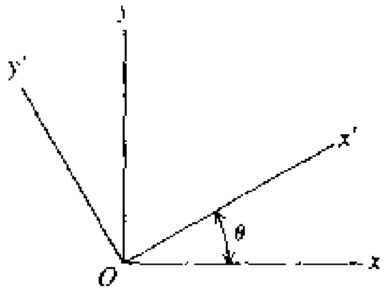


圖 2・16 旋轉之軸線 x' 及 y'

ϵ_θ 表示，與 $x'y'$ 軸有關聯的剪應力應變則以 γ_θ 表示。當 $\theta = 0$時，將得到 $\epsilon_\theta = \epsilon_x$ ，及 $\gamma_\theta = \gamma_{xy}$。

一個邊長為 dx 與 dy 及其對角線係在 x' 軸方向的矩形元體，如圖 2－17 所示。由於該元體的 ϵ_x、ϵ_y 及 γ_{xy} 等應變結果，將在 x 方向伸長一個 $\epsilon_x dx$ 量（圖 2－17a），在 y 方向伸長一個 $\epsilon_y dy$ 量（圖 2－17b），而直角 xOy 減小一個 γ_{xy} 角（圖 2－17c）。三個變形中的每一個，皆將引起對角線的長度變化。如附圖所示，在對角線長度上與其相

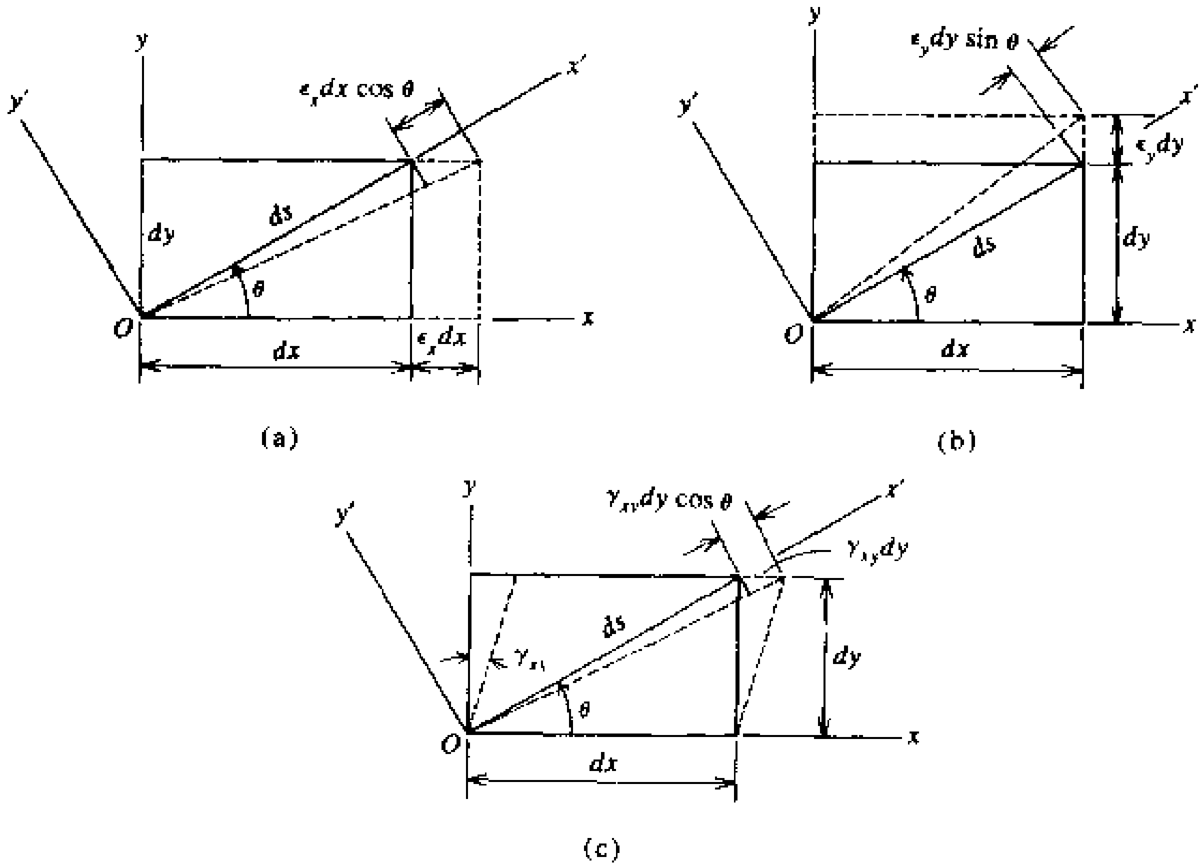


圖 2・17 由應變(a) ϵ_x，(b) ϵ_y 及(c) γ_{xy} 使元體之變形

當的增加量是 $\epsilon_x dx \cos\theta$、$\epsilon_y dy \sin\theta$ 與 $\gamma_{xy} dy \cos\theta$。因此，對角線長度的總增加量，是這三個量的總和，而相當的 x' 軸的應變 ϵ_θ，可用對角線長 ds 除此總和而得。我們已知 $dy/ds = \sin\theta$ 與 $dx/ds = \cos\theta$，可得

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta \tag{2-36a}$$

或

$$\epsilon_\theta = \tfrac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \tfrac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \tag{2-36b}$$

方程式（2－36）的兩式中的任何一個，當 ϵ_x、ϵ_y 與 γ_{xy} 爲已知時，皆可用來求得在 x' 軸方向的正交應變 ϵ_θ。如需求 y' 軸方向的正交應變，祇需將 $\theta + \pi/2$ 值代入（2－36）式中的 θ 即可。

從考慮圖2－17內的變形，亦可發現剪力應變 γ_θ 的一般表示法。我們以正交應變 ϵ_x 的效應爲始，自圖2－17a可知 x' 軸已順時針走向轉一個等於 $\epsilon_x dx \sin\theta/ds$ 的小角度。同樣，在圖2－17b中 x' 軸是反時針走向轉了一個 $\epsilon_y dy \cos\theta/ds$ 角，而在圖2－17c中 x' 軸是順時針走向轉一個 $\gamma_{xy} dy \sin\theta/ds$ 量。因此，x' 軸的淨轉量是順時針走向的，其值爲 $\alpha = \epsilon_x \sin\theta\cos\theta - \epsilon_y \sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\sin^2\theta$ (e)

y' 軸順時針走向的淨轉值，可以類似在圖2－17中 x' 軸所顯示的幾何作圖法得到，或以 $\theta + \pi/2$ 值代入（e）式之 θ 得之。按照後一做法，我們可得到 y' 軸之轉角 β 如下

$$\beta = -\epsilon_x \sin\theta\cos\theta + \epsilon_y \sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\cos^2\theta \tag{f}$$

在 $x'Oy'$（等於剪力應變 γ_θ）角之減少量是 $\beta - \alpha$。故我們可從(e)與(f)兩式得到

$$\gamma_\theta = -2\epsilon_x \sin\theta\cos\theta + 2\epsilon_y \sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

或，以2除每一項而得

$$\tfrac{1}{2}\gamma_\theta = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\sin\theta\cos\theta + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{2-37a}$$

再作一次適當的三角學之代入運算，可以重寫前式的代用式如下

$$\tfrac{1}{2}\gamma_\theta = -\tfrac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\theta \tag{2-37b}$$

在（2－37）各式中的任一式，均可求出斜軸的剪力應變 γ_θ。我們得知若以 $\theta = 0°$ 及 $\theta = 90°$ 作爲兩種特殊情況，則可分別得到 $\gamma_\theta = \gamma_{xy}$ 及

$\gamma_\theta = -\gamma_{xy}$ 。

將平面應變之（2－36）、（2－37）各方程式，與平面應力（見2.5節）之（2－23）、（2－24）各方程式作一比較，顯示 ϵ_θ 及 γ_θ 有與 σ_θ 及 τ_θ 作同樣的一般形式。方程式間的類似，如 σ_x 、σ_y 及 σ_θ 各相當於 ϵ_x、ϵ_y 及 ϵ_θ ，而 τ_{xy} 則相當於 $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 及 τ_θ 相當於 $-\frac{1}{2}\gamma_\theta$ （見表2－1）。在附表2－1的第二行中，負號是由于我們使用剪應力 τ_θ 符號的慣例之結果（見圖2－9）。

平面應力與平面應變間的類似性，顯示對於平面應力的一切觀察。在平面應變中都有其相似的代替物。例如，與已轉一個（$\theta + \pi/2$）角的一對軸綫有關的正交應變 ϵ'_θ 及剪力應變 γ'_θ ，可將（2－36）及（2－37）兩個方程式中的 θ 代以（$\theta + \pi/2$）而求得下列的方程式

$$\epsilon_\theta + \epsilon'_\theta = \epsilon_x + \epsilon_y \qquad \gamma_\theta = -\gamma'_\theta \tag{2-38}$$

此兩個方程式，顯示正應變之和依然爲常數，而互成90°方向的剪力應變是數量相同但符號相反，這完全與應力的情況類似（見2.5節）。

表2－1　平面應力轉換方程式（2－23及2－24式）與平面應變轉換方程式間（2－36及2－37）的類似性

應　力	應　變
σ_x	ϵ_x
σ_y	ϵ_y
τ_{xy}	$\frac{1}{2}\gamma_{xy}$
σ_θ	ϵ_θ
τ_θ	$-\frac{1}{2}\gamma_\theta$

又，主應變亦存在於用下式計算所得的方向中（與2－25式比較）

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{2-39}$$

主應變可從下列方程式計算而得

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{2-40}$$

此式相當於求應力用的（2－26）式。在主平面上的剪力應變為零。

最大剪力應變，發生在與主平面成45°角的平面上，可用下式求得之

$$\frac{1}{2}\gamma_{max}=\sqrt{\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{2-41}$$

在最大剪應力應變的平面上，正交應變為（$\epsilon_x+\epsilon_y$）/2。

求平面應變的摩爾氏圓，正如圖2－18所示，其作圖方法與求平面應力大致相同。正交應變 ϵ_θ 畫在水平軸上，剪力應變除2後，向下畫在垂直軸上（圖2－18與圖2－11比較）。圓心C的橫座標等於（$\epsilon_x+\epsilon_y$）/2；A點，代表與 x 方向有關的應變，座標為 ϵ_x 及 $\gamma_{xy}/2$。B點，在A點直徑上的相對端，其座標為 ϵ_y 及 $-\gamma_{xy}/2$，係代表已轉一個90°的 θ 角的一對軸系中之應變。與另一對轉軸有關的應變，則可自A點量 2θ 角定出D點而得之。又主應變係用 P_1 及 P_2 代表，最大剪應變則以E及E′代表。所有各種數量，皆很容易地從圓中求得。

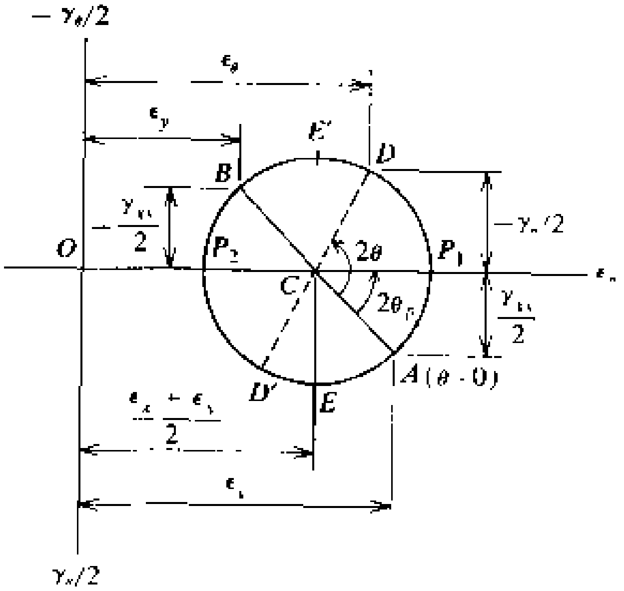


圖2－18　平面應變之摩爾氏圓

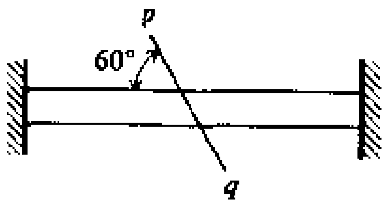
將應變的摩爾氏圓，與自應變計測得之值，聯合使用，以求主應變之方法，詳見參考書2.12與2.13。

習　題

2.1－1　直徑20mm圓桿受 $P=80\text{kN}$ 的軸向拉力載重，試求其最大剪應力爲若干？

2.1－2　求 50mm × 50mm 正方形鋼棒橫截面上的最大容許拉力載重 P，假設容許正交拉應力爲 140N/mm^2 及容許剪應力爲 90N/mm^2。

2.1－3　一金屬桿件在室溫21℃安裝於圖示的堅固支架間。假設桿件的熱脹係數 $\alpha=11.7\times10^{-6}/℃$ 及彈性模數 $E=200\text{kN/mm}^2$。試計算當溫度增高至111℃時，在斜截面 pq 上的正交應力與剪應力爲若干。

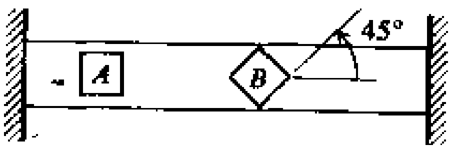


習題圖 2．1－3

2.1－4　一根拉力桿件（見圖2－1）在斜截面 pq 上的應力爲 $\sigma_\theta=80\text{N/mm}^2$ 及 $\tau_\theta=30\text{N/mm}^2$，求應力 σ_x 及角 θ。

2.1－5　受拉力等截面桿件（見圖2－4a）其截面積 $A=1200\text{ mm}^2$，載重 $P=144\text{kN}$。求作用於桿件內角度爲 $\theta=30°$ 的元體上各邊的應力。

2.1－6　一矩形截面的銅桿件架於堅固的支架間（見習題圖2.1－6），其後桿件的溫度昇高56℃。求桿件元體 A 與 B 之各邊的應力。並在各元體上簡繪所得的結果。（假定 $\alpha=0.00002/℃$ 及 $E=110\text{kN/mm}^2$）

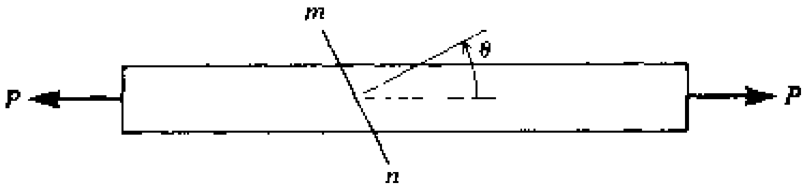


習題圖 2．1－6

2.1－7　在圖2－4c中的元體各邊上作用之正交應力 $\sigma_\theta=80\text{N/mm}^2$ 及 $\sigma_\theta'=40\text{N/mm}^2$。求應力 τ_θ、τ_θ'、σ_x 和 τ_{max}。

2.1－8　一受拉力構材，係由兩片沿着 mn 綫膠着一起的材料所組成。爲了實際理由，θ 角限於 0° 到 60° 範圍內。在膠粘接頭處的容許剪應力（τ_w）是容許拉應力（σ_w）之 3/4。θ 角應爲多少度才可使該構材承受最大的載重？（假定膠粘接頭的強度是控制設計的因素）。

2.1－9　若 $\tau_w = 7\mathrm{N/mm^2}$，而 $\sigma_w = 14\mathrm{N/mm^2}$，再解前題。若桿件的截面面積為 $960\mathrm{mm^2}$，求最大容許載重 P。



習題圖2.1-8 及2.1-9

2.2－1　若 $\sigma_x = 80\mathrm{N/mm^2}$，$\sigma_y = -40\mathrm{N/mm^2}$ 及 $\theta = 30°$ 求圖2－5中所示元體的應力 σ_θ、σ_θ'、τ_θ 及 τ_θ'。

2.2－2　選一 θ 角，使 τ_θ 為最大值以解前題。

2.2－3　若主應力 σ_x 與 σ_y 相等（$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$），試討論一個已轉元體（圖2－5 c）各邊上的正交應力與剪應力。又若 $\nu = 0.25$、$\sigma_0 = 100\mathrm{N/mm^2}$ 及 $E = 200\mathrm{kN/mm^2}$，求該元體單位體積的變化。

2.2－4　一已轉元體（見圖2－5 c），其轉角 $\theta = 45°$，所受應力 $\sigma_\theta = \sigma_\theta' = 14\mathrm{N/mm^2}$ 及 $\tau_\theta = 28\mathrm{N/mm^2}$，求作用於主平面上的應力 σ_x 與 σ_y（見圖2－5 a）。

2.2－5　在雙軸應力系中的一個元體（見圖2－5）受到正交應力 $\sigma_x = 120\mathrm{N/mm^2}$ 及 $\sigma_y = -40\mathrm{N/mm^2}$。(a)求在一個已轉 30°角元體上的應力。(b)定出最大的剪應力平面，並求出在那些平面上的剪應力與正交應力。(c)定出一個（$\theta < 90°$）平面，其正交應力為零；然後畫一元體，以該平面當作一邊，求該元體各邊上的剪應力與正交應力。

2.2－6　若 $\epsilon_x = 0.001$ 與 $\epsilon_y = -0.0007$，求在一個雙應力系元體的應力 σ_x 與 σ_y（假定 $E = 200\mathrm{kN/mm^2}$ 及 $\nu = 0.3$）。

2.2－7　一薄鈑（厚度＝t）在雙應力系中所受之應力為 $\sigma_x = 140\mathrm{N/mm^2}$ 及 $\sigma_y = 60\mathrm{N/mm^2}$。假設 $E = 200\mathrm{kN/mm^2}$ 及 $\nu = 0.25$，若 $t = 6\mathrm{mm}$，求鈑厚的減少量。

2.2－8　每邊100mm 混凝土立方體，在兩個垂直方向內受到 $P = 70\mathrm{kN}$ 的壓力。若 $\nu = 0.1$ 及 $E = 28\mathrm{kN/mm^2}$，求此立方體體積的變化。

2.2－9　在雙軸應力系中，某一材料的元體有主應變 $\epsilon_x = 0.00004$ 及 $\epsilon_y = 0.00017$，若 $\nu = 0.3$，求應變 ϵ_z。

2.2－10　若單位體積變化與截面面積單位變化的比率，在數字上等於0.75。求在軸向拉力中等截面桿件中的卜桑氏比值 ν。

2.2－11　在圖2－5內所示一雙軸應力系的元體，分別在 x 與 y 方向

具有主應變 ϵ_x 與 ϵ_y 。試導出一個在 σ_θ 方向內應變 ϵ_θ 式子，使用 ϵ_x 、ϵ_y 與 θ 角等項表示 ϵ_θ。並與（2－7a）式或（2－8a）式比較其結果。

2.3－1 就在純剪應力狀況下的一個元體，試導出其單位體積變化的式子。

2.3－2 在純剪應力下的一個元體，受到剪應力 $\tau_{max} = 140N/mm^2$（見圖2－6b）。若 $E = 200kN/mm^2$ 及 $\nu = 0.25$ 。試求其最大剪應變 γ 。

2.3－3 在雙軸應力系中的元體，所受的應力 $\sigma_x = -\sigma_y = 70N/mm^2$. 若 $E = 70kN/mm^2$ 及 $\nu = 0.25$ 。求其正交應變 ϵ_x 及 ϵ_y ，與最大剪應變 γ 。

2.4－1 就純剪應力情況，畫一摩爾氏圓（見圖2－6），並從圓的幾何關係來證明（2－17）式。

2.4－2 就單軸應力情況，畫一摩爾氏圓（圖2－4），並從圓的幾何關係以證明（2－1）、（2－2）與（2－3）各式。

2.4－3 就雙軸應力系之情況，畫摩爾氏圓（圖2－5）。題中 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ 。

2.4－4 就圖（2－8）中所給的例題，求在該元體上諸應力。該元體曾被旋轉，使其剪應力 τ_θ 為一最大值。（在簡圖內已表示元體上的結果。）

2.4－5 用摩爾氏圓解習題2.1－5。

2.4－6 在單軸應力系中，某種材料的元體，受到的應力為 $\sigma_x = -360N/mm^2$ ，試用摩爾氏圓，求角 $\theta = 75°$ 時元體上的各項應力。

2.4－7 用摩爾氏圓解習題2.1－7。

2.4－8 用摩爾氏圓解習題2.2－1。

2.4－9 用摩爾氏圓解習題2.2－2。

2.4－10 在雙軸應力中之元體，其主應力 $\sigma_x = 20N/mm^2$ 及 $\sigma_y = 28N/mm^2$ ，求在最大剪應力平面上的應力。

2.4－11 用摩爾氏圓解習題2.2－4。

2.4－12 用摩爾氏圓解習題2.2－5。

2.5－1 在平面應力系中的元體（圖2－9a）受到應力作用計有：$\sigma_x = 34N/mm^2$ 、$\sigma_y = 20N/mm^2$ 與 $\tau_{xy} = -7N/mm^2$。求主應力及主平面，並在元體的簡圖上表示其結果。

2.5－2 在平面應力系中的元體（圖2－9a）受到應力作用計有：$\sigma_x = -34N/mm^2$ ，$\sigma_y = 20N/mm^2$ 與 $\tau_{xy} = -7N/mm^2$。求主應力及主平面，並在元體的簡圖上表示其結果。

2.5－3 在前題中，求對元體作用之最大剪應力與其平面，並在元體的簡圖上表示其結果。

2.5－4 在平面應力系中的元體（圖2－9a）受到的應力計有：$\sigma_x = \sigma_y = 0$ ，$\tau_{xy} = 14N/mm^2$（純剪力）。求轉角為15°時元體各邊上的應力。並在元體的簡圖上表示其結果。

2.5－5 在平面應力（圖2－9a）中的元體，受到應力作用計有：

$\sigma_x = -4\text{N/mm}^2$，$\sigma_y = 12\text{N/mm}^2$ 及 $\tau_{xy} = -8\text{N/mm}^2$。求(a)各主應力各主平面，(b)最大剪應力與其作用之剪力平面。在旋轉元體之簡圖上表示出每種的結果。

2.5－6　若 $\sigma_x = 0$，$\sigma_y = 28\text{N/mm}^2$ 及 $\tau_{xy} = 14\text{N/mm}^2$，解前題。

2.5－7　在平面應力系中的元體，已轉一個角 $\theta = 30°$。在 $\theta = 30°$ 之平面上的應力為 $\sigma_\theta = -26\text{N/mm}^2$ 及 $\tau_\theta = 30\text{N/mm}^2$。在 $\theta = 120°$ 平面上的應力為 $\sigma_\theta = -26\text{N/mm}^2$ 及 $\tau_\theta = -30\text{N/mm}^2$，求應力 σ_x，σ_y 與 τ_{xy}。

2.6－1　用摩爾氏圓解習題 2.5－1。

2.6－2　用摩爾氏圓解習題 2.5－2。

2.6－3　用摩爾氏圓解習題 2.5－3。

2.6－4　用摩爾氏圓解習題 2.5－4。

2.6－5　用摩爾氏圓解習題 2.5－5。

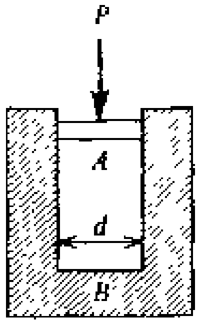
2.6－6　用摩爾氏圓解習題 2.5－6。

2.6－7　用摩爾氏圓解習題 2.5－7。

2.6－8　試從圖 2－11 之幾何形中、表示 D 點的座標可用（2－24）式求得。

2.7－1　在雙軸應力系中的薄鈑，所受之應力為 $\sigma_x = 70\text{N/mm}^2$ 及 $\sigma_y = 140\text{N/mm}^2$。在 z 方向的應力為零。在這材料中的最大正交應力及剪應力為若干？

2.7－2　直徑為 d 的一個橡膠圓柱體 A 上負載重 P，置於一個鋼質圓筒 B 中，（見習題圖 2.7－2）。若 $P = 4.6\text{kN}$，$d = 50\text{mm}$，橡膠的卜



習題圖 2.7－2

桑氏比為 0.45。求橡膠與鋼間所起的壓力 p。

2.7－3　直徑 25mm的實心鋼球，受到 14N/mm^2 的流體靜壓力，其體積的減小量為若干？（假設 $E = 200\text{kN/mm}^2$ 及 $\nu = 0.3$）。

2.8－1　若 $\epsilon_x = 500 \times 10^{-6}$，$\epsilon_y = 140 \times 10^{-6}$ 及 $\gamma_{xy} = -360 \times 10^{-6}$，用 2.8 節導出之方程式求主應變 ϵ_1 與 ϵ_2 以及其方向。並用應變的摩爾氏圓法核算之。

2.8－2　若 $\epsilon_x = -140 \times 10^{-6}$，$\epsilon_y = -500 \times 10^{-6}$ 與 $\gamma_{xy} = -360 \times 10^{-6}$，解前題。

2.8－3　若 $\epsilon_x = 500 \times 10^{-6}$，$\epsilon_y = 300 \times 10^{-6}$ 與 $\gamma_{xy} = 1050 \times 10^{-6}$，解前題。

第三章　扭　　力

3・1 圓桿之扭力

設一圓形截面桿，在兩端受力偶 T 的扭轉（圖3－1a）*。桿件承受此種情況的載重，可以說是處於"純扭力（pure torsion）"狀態。就對稱狀況加以考慮，圓軸的橫截面可當作一根繞縱軸旋轉的剛體，其半徑仍爲直綫，橫截面仍維持圓形。又若桿件的總扭角爲一微小角，桿件長度與其半徑全不改變。

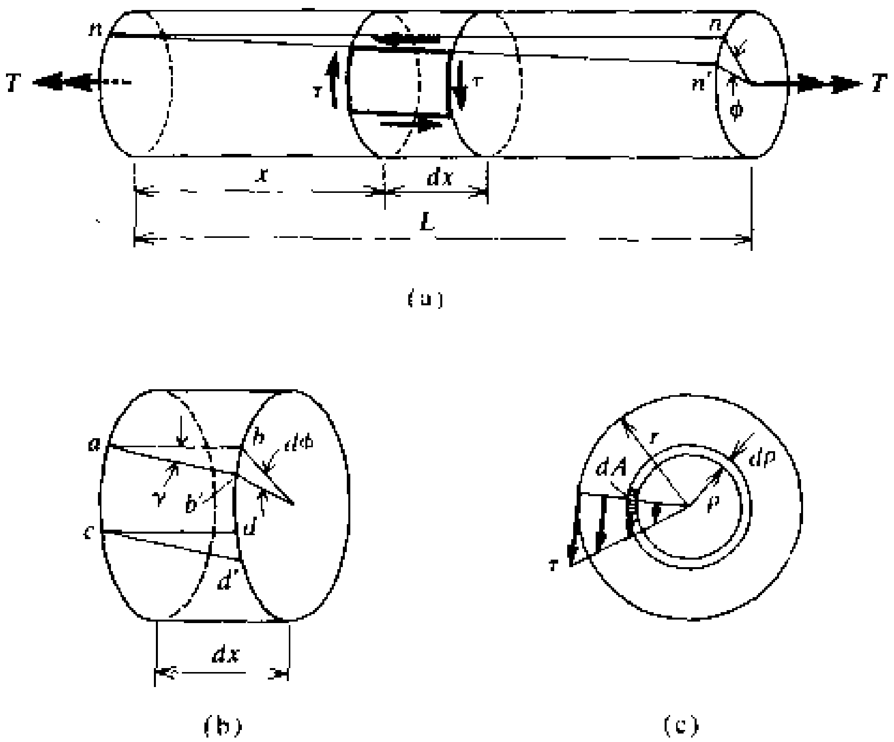


圖3・1　受純扭力之圓桿

當受扭力時，在桿件一端的縱軸上，對另一端而言，將發生旋轉。例

---

*使桿件起扭轉之力偶稱爲轉矩（torque）。使用雙重箭頭的向量來表示如圖。力偶的方向與指向是依向量的右手規則。

如，若把桿件的左端當作固定（圖3－1 a）。同時，桿件面上的一條縱向綫 nn ，將旋轉一微小角度到 nn' 位置，因此種旋轉，使桿件面上的一個矩形元體，如圖所示的兩個截面間距 dx 元體，即被扭成一個扁菱形體，此元體再示如圖3－1b 。桿件的碟狀部份，由桿件中分離出來。將元體原有表面位置標以 $abcd$ 。當旋轉時，橫截面右端對着相對面旋轉，b 點與 d 體乃分別移至 b' 與 d' ，元體各邊長度在旋轉時並不改變，但各角的角度不再等於90°。因此，我們得知元體是在純剪力狀態中（2．3節），而剪應變 γ 的大小是等於 bac 角的減小量。這個角度是

$$\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

bb' 距離是桿件半徑 r 的小弧長度，其對角爲 $d\phi$ ，即爲一個截面對另一個截面的旋轉角。因此，我們獲得 $bb' = r\,d\phi$，又距離 ab 等於元體長 dx ，將此等式子代入前方程式，可得

$$\gamma = \frac{r\,d\phi}{dx} \tag{a}$$

當桿件受到純扭力時，沿桿長扭轉角的改變率 $d\phi/dx$ 爲一常數。該常數代表桿軸單位長度的扭轉角，以 θ 符號來表示。因此得知 $\theta = \phi/L$，L 是轉軸的長度。於是由(a)式得

$$\gamma = r\theta = \frac{r\phi}{L} \tag{3-1}$$

作用於元體各邊的剪應力 τ ，其作用方向如圖3－1a 所示。作直綫變化的彈性材料，其剪應力的大小（方程式1－14 與3－1 ）爲

$$\tau = G\gamma = Gr\theta \tag{3-2}$$

方程式（3－1）與(3－2）使桿軸表面應力與應變，與每單位長度的扭角發生關係。

在桿軸內部應力的情形，多少可以推斷與桿軸表面的應力情形相似，因爲桿軸截面內諸半徑，當扭轉時仍保持爲直綫而未扭歪。由上述表面元體 $abcd$ 的討論，亦可適用於位在桿軸內半徑爲 ρ 的圓柱體表面的相似元

體上（圖 3 － 1c ）。所以，此種在內部的元體亦在“純剪力”的狀態。由下列各式可得到相當的剪應變與剪應力：

$$\gamma = \rho\theta \qquad \tau = G\rho\theta \tag{3-3a,b}$$

以上兩個方程式表示剪應變及剪應力與該軸心的輻向距離 ρ 成直綫變化，而其最大値則在外部的表面上，其應力分佈仍按三角形，應力圖解如圖 3 － 1c 所示。

作用在截面上的剪應力，由方程式（ 3 － 3b ）算得在軸的縱向平面上隨着相等的剪應力（見圖 3 － 2 ）、此種結果係由相等的剪應力總是存在於互相垂直的平面上，如 1.9 節中所說明者。若材料的縱向剪力小於橫向剪力（例如木材），則軸內第一個裂縫將發生在縱向的表面上。

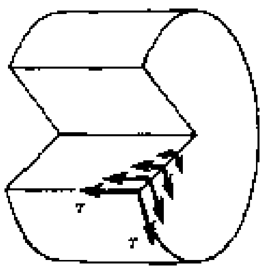


圖 3 . 2 在圓桿中之縱向剪應力

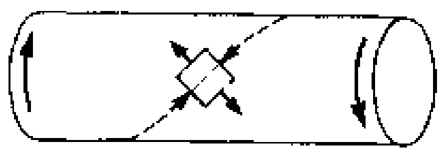


圖 3 . 3 在傾斜 45° 元體內之拉應力與壓應力

桿軸表面上純剪應力的形態（圖 3 － 1 a ），正如在 2.3 節內所說明者，與在旋轉 45° 角元體上的拉應力及壓應力係屬相等，具有同等意義。所以，各邊與桿軸綫成 45° 角的矩形元體，將受到圖 3 － 3 所示的各項應力。若拉力弱於剪力的材料被扭轉時，則沿着與軸綫傾斜 45° 的螺旋綫發生拉力失敗。這種形式的失敗，用扭轉一根粉筆來說明，甚爲容易。

施加的轉矩 T，與其所產生的扭轉角度間的關係，今將其建立起來。圖 3 － 1 c 所示剪應力的合力，就靜力學而言，必等於總轉矩 T。作用於面積 dA（圖內虛線所示）的元體上其剪力爲 τdA，而此剪力對桿軸軸綫的力矩爲 $\tau\rho dA$。總轉矩 T 即爲此類微量力矩在全截面上的總和；如此爲

$$T = \int G\theta\rho^2\, dA = G\theta\int \rho^2\, dA = G\theta J \tag{3-4}$$

式中

$$J = \int \rho^2 \, dA \tag{3-5}$$

爲圓截面的極惰性矩（ polar moment of inertia ）。半徑爲 r 直徑爲 d 的圓形，其極惰性矩（見附錄 B ，情況 6 ）爲

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \tag{3-6}$$

從方程式（ 3 － 4),我們得到

$$\theta = \frac{T}{GJ} \tag{3-7}$$

上式表示每單位長度的扭轉角 θ 與轉矩 T 依正比而改變，而與 GJ 之積成反比而改變。GJ 稱爲桿軸的扭轉剛性（ torsional rigidity ）。等於 θL 的總扭轉角 ϕ 爲

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \tag{3-8}$$

此方程式用在實驗證明理論時頗爲有用，且經多次實驗核對證明該方程式的誘導，尙屬正確。惟應注意者，扭力實驗通常用來求出各種材料的剪力彈性模數 G。若能量出由一已知轉矩加於桿軸而產生的扭角，則 G 的大小卽由方程式（ 3 － 8 ）計算出來。

將由方程式（ 3 － 7 ）求得的 θ 值代入方程式（ 3 － 2 ），我們卽得計算實心圓軸受扭力時的最大剪應力方程式

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \tag{3-9}$$

此方程式表示，最大剪應力與轉矩 T 成正比，而與截面的極慣性矩成正比，在橫截面中任何矩中心距離爲 ρ 處的剪應力爲

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3-10}$$

係自方程式（ 3 － 3b ）* 得來。

在機械設計中，桿軸直徑有時必須由需要傳動之馬力來決定，當桿軸旋轉一周時，轉矩 T 所做之功爲 $2\pi T$，而每分鐘所做之功爲 $2\pi nT$ ，n 是

* 前式係研究實心圓桿所導得，非圓形的實心桿扭力討論將列在高等材料力學中，此時所討論的初等扭力理論，發源於庫倫（ C.A.Coulomb 1736 － 1806 ）氏與楊（ Thomas Young ）氏兩人的著述（參考書 3.1 ）。一般的扭力理論，應歸功於聖母濃（ Saint-Venant ）氏(參考書3.2)

桿軸每分鐘之轉數（ rpm ），我們當憶及，1瓦（Watt）等於1焦耳（ Joule ）（亦即 1 Nm ）每秒，故得功率（ power ）W

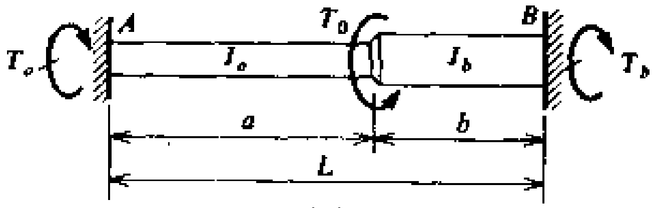
$$W=\frac{2\pi nT}{60}$$

假如T用Nm 來度量。功率W爲已知，則在桿軸內的轉矩T可用下式求得之

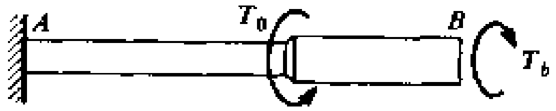
$$T=\frac{60\ W}{2\pi n}\approx\frac{9.5\ W}{n} \tag{3-11}$$

此處T的單位爲 Nm 。若轉矩T爲已知，則在桿軸中的最大剪應力可由（ 3－9 ）式求得，而扭角可由（ 3－8 ）式求得。

【例題】1　一實心圓桿件AB具有二個不同直徑，桿件的兩端爲固定，中受轉矩T_0，如圖 3－4a 所示。求兩端的反轉矩（ reactive torques）T_a 及 T_b ，與施加T_0 處截面的旋轉角ϕ_0 。



(a)



(b)

圖 3.4　例題 1

因有兩個未知轉矩 T_a 及 T_b ，但僅有一個靜力平衡方程式，故此桿件爲一靜不定型

$$T_a+T_b=T_0 \tag{b}$$

若選擇反轉矩T_b 爲贅餘力，並假想桿件的B端被切離支承端（圖 3－4 b ），我們得知B端的總旋轉角ϕ_b 是由于T_0 及T_b 所生旋轉角之和。因此，得

$$\phi_b=\frac{T_0a}{GJ_a}-\frac{T_ba}{GJ_a}-\frac{T_bb}{GJ_b}$$

因爲B端的旋轉角必須等於零，適合性方程式變爲$\phi_b=0$ 。因此，我們得到轉矩T_b 的結果

$$T_b = \frac{T_0}{1 + \dfrac{bJ_a}{aJ_b}} \tag{c}$$

將此結果代入(b)式，得轉矩 T_a 的類似算式爲

$$T_a = \frac{T_0}{1 + \dfrac{aJ_b}{bJ_a}} = \frac{bJ_a}{aJ_b} T_b \tag{d}$$

在施加 T_0 截面處的旋轉角 ϕ_0 ，可從桿件左側或右側部份求得下式

$$\phi_0 = \frac{T_a a}{GJ_a} = \frac{T_b b}{GJ_b} = \frac{T_0 ab}{G(bJ_a - aJ_b)} \tag{e}$$

【例題】2　一長度爲 L 的實心圓截面錐形桿件 AB 受轉矩 T 而扭轉；求該桿件的扭轉角 ϕ 。

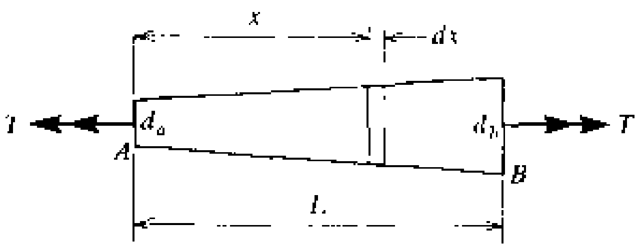


圖 3 - 5　例題 2

若該桿件之漸縮角爲一小角度，我們可對元體長度 dx(圖 3 － 5) 用方程式（ 3 － 8 ）準確地求得 ϕ 角。就該元體而言，其扭轉角爲

$$d\phi = \frac{T\,dx}{GJ_x}$$

式中 J_x 代表在距左端 x 距離截面上的極慣性矩，A 與 B 兩端的直徑分別用 d_a 與 d_b 來表示，我們得知 J_x 式爲

$$J_x = \frac{\pi}{32}\left(d_a + \frac{d_b - d_a}{L}x\right)^4 \tag{f}$$

總扭轉角爲

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GJ_x} \tag{g}$$

將方程式(f)代入方程式(g)，並求其積分得

$$\phi = \frac{32TL}{3\pi G}\left(\frac{1}{d_b - d_a}\right)\left(\frac{1}{d_a^3} - \frac{1}{d_b^3}\right) \tag{h}$$

此例題說明，當 J 為 x 的函數時，如何適用方程式（3－8）來求旋轉角 ϕ。當 T 沿桿軸而變化時，亦可採用同樣程序來計算。

3.2 空心圓桿之扭力

受扭力的實心桿中的剪力，在桿外面者為最大，在中心者等於零，在前節中已予說明，故實心桿軸的材料應力受到重大影響者，其大部份在容許剪應力以下。若為減輕重量或節省材料為主，則以採用空心軸為適當。

空心軸扭力的分析，與實心桿軸皆用同樣的假設。由此，因截面中的輻向線依然為直線，在前節（3－3式）中導出的剪應力與剪應變式子仍可使用。當然，前式中的輻向距離 ρ 限於 r_1 到 r_2 之間，此處的 r_1 與 r_2 為圓管的內半徑與外半徑（圖3－6）。

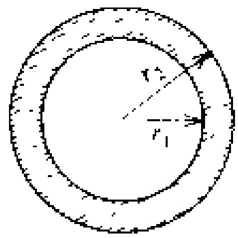


圖3.6 空心圓桿

在施加轉矩 T 與單位長度的扭角 θ 間的關係，除積分上下限是 $\rho = r_1$ 及 $\rho = r_2$ 外，可由方程式（3－4）及(3－5）求得之。故 $T = G\theta J$ 之關係仍屬有效。但 J 為環形面積的極慣性矩。

$$J = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) \tag{3-12}$$

若 J 值係由（3－12）式求得，則前節（方程式3－7至3－10）所得的 θ、ϕ 及 τ 等的基本方程式均可適用在圓管上*。

【例題】1　一空心軸與一實心桿軸具相同的外半徑 r，空心軸的內半徑為0.6r，設兩種軸各受同樣的轉矩，試比較其重量及最大剪應力。

---

* 任意截面形狀的薄壁管的扭力將在3.4節中討論，並在高等材料力學中討論之。

重量與截面積成正比；因此，實心桿軸的重與 πr^2 成正比，而空心軸的重與 $\pi r^2 - \pi(0.6r)^2 = 0.64\pi r^2$ 成正比。故空心軸重爲實心軸重之 64%。

最大剪應力與 $1/J$ 成正比。由于實心軸的 $J = \pi r^4/2$，而空心軸的 $J = \pi r^4/2 - \pi(0.6r)^4/2 = 0.8704\pi r^4/2$。故空心軸最大剪應力與實心軸最大剪應力之比爲 1.15。以上結果表示 $r_1/r_2 = 0.6$ 的空心軸，其（與實心軸比較）最大剪應力增加了 15%，但重量却減少了 36%。

【例題】2　一個圓桿件係由空心管 B 及實心桿 A 堅固地結在一起使其作用一如實心桿件（圖 3－7）。內部材料的剪力彈性模數爲 G_a，外部者爲 G_b，當此合成桿件受到一轉矩 T 時，試分別導出內部材料與外部材料的最大剪應力 τ_a 及 τ_b 公式。

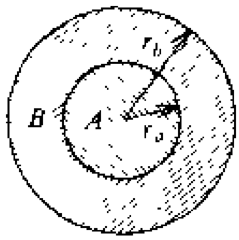


圖 3-7　例題 2

對空心管及實心桿而言，單位長度的扭角 θ，必須相同。因此，從方程式（3－3b），可得

$$\theta = \frac{\tau_a}{G_a r_a} = \frac{\tau_b}{G_b r_b} \tag{a}$$

式中 τ_a 爲半徑 r_a 的內部材料的剪應力，而 τ_b 爲半徑 r_b 的外部材料由方程式（3－4）算得的剪應力 τ_b。又，總轉矩 T，亦包括實心桿中的轉矩 T_a 加上空心管中的轉矩 T_b：

$$T = T_a + T_b = G_a \theta J_a + G_b \theta J_b \tag{b}$$

但上式中的極慣性矩 J_a 及 J_b 分別爲

$$J_a = \frac{\pi r_a^4}{2} \qquad J_b = \frac{\pi}{2}(r_b^4 - r_a^4)$$

由方程式(b)求 θ，得

$$\theta = \frac{T}{G_a J_a + G_b J_b}$$

上式與方程式(a)合併得

$$\tau_a = T\frac{G_a r_a}{G_a J_a + G_b J_b} \qquad \tau_b = T\frac{G_b r_b}{G_a J_a + G_b J_b} \tag{c}$$

由桿件的二部份所承受的轉矩爲

$$T_a = T\frac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b} \qquad T_b = T\frac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \tag{d}$$

注意，本例題，包括靜不定力系的分析在內。

3.3 扭力應變能

實心圓軸的應變能，可用純剪力彈性元體材料所導得的方程式（1－23a）計算之。將此式重寫於下

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \tag{a}$$

在上式中，u 爲單位體積的應變能，而 τ 爲剪應力。爲應用此扭力桿件方程式，我們必需先有一通用式以求 u，然後再就桿件全部體積求其積分。

假如 τ_{max} 是該桿件表面的剪力，則在距軸中心線 ρ 處的剪力是 $\tau_{max}\rho/r$，但 r 爲外半徑。單位體積的應變能在此輻向距離上〔見(a)式〕爲

$$u = \frac{\tau_{max}^2\rho^2}{2r^2G}$$

在長度爲 L，半徑爲 ρ 及厚度爲 $d\rho$ 的元體管中，其應變能爲

$$dU = u\,dV = \frac{\pi\tau_{max}^2 L\rho^3\,d\rho}{r^2G}$$

在 $\rho=0$ 及 $\rho=r$ 的上下限間，將前式積分之，可得總應變能式爲

$$U = \frac{\pi\tau_{max}^2 L}{r^2G}\int_0^r \rho^3\,d\rho = \frac{\pi\tau_{max}^2 L r^2}{4G} \tag{3-13}$$

若剪應力的最大値爲已知，此式可用以求實心軸內的應變能。我們應當注意 $\tau_{max}=Tr/J$，而 $J=\pi r^4/2$，故可將（3－13）式換寫成另一個形式

$$U=\frac{T^2L}{2GJ} \tag{3-14}$$

上式係用轉矩T以求應變能式。

以上導出之式，對於空心圓軸亦可使用，再得出（3－14）式，除非J成爲適合的極慣性矩（方程式3－12）。

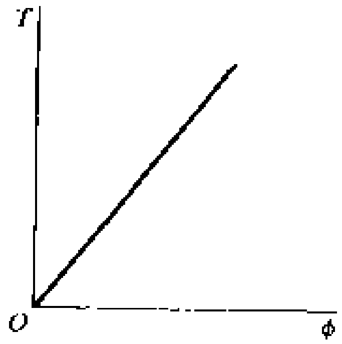


圖3.8　受扭力桿件之載重－撓度圖

一種求扭力應變能更直接的方法，可從載重－撓度圖（圖3－8）中求得。假如桿件材料是遵循胡克氏定律，所施的扭矩與扭轉角ϕ間的關係將爲直綫型，並得用（3－8）式表示者。當桿件扭轉時，轉矩T所作之功，等於“載重－撓度”圖曲綫下側的面積。故儲於桿內及其相當的彈性應變能爲

$$U=\frac{T\phi}{2} \tag{3-15}$$

將（3－8）式與（3－15）式合併，可從下面兩式中的任一式求得應變能式

$$U=\frac{T^2L}{2GJ}\qquad U=\frac{GJ\phi^2}{2L} \tag{3-16a,b}$$

兩方程式中的第一個與（3－14）方程式相同，是用轉矩T來表示應變能之式；第二個式係用扭角ϕ來表示應變能的。此兩式對於實心軸或空心軸，假如J式採用適當時，均屬符合。注意（3－16）式與以前所導出的拉力桿件方程式（1－16式）間具相似性。

若受扭力桿件爲一半徑漸變的圓形截面（例如，在圖3－5內所示）或若轉矩沿桿件而變更（其大小），欲求該桿件的應變能，我們必須考慮

距桿的一端 x 距離處，有一長 dx 的基本元盤（ elemental disc ）。假設作用於此元體的轉矩為 T_x ，而其截面的慣性矩為 J_x，自（ 3 － 16a）式可得該元體的應變能為

$$dU = \frac{T_x^2 dx}{2GJ_x}$$

桿件中的總應變能，現可用下式表示之

$$U = \int_0^L \frac{T_x^2\, dx}{2GJ_x} \tag{3-17a}$$

另外，我們開始觀察長度 dx 的元體，其扭角為 $d\phi$ ，則自（ 3 － 16b）方程式得到在該元體內的應變能式為

$$dU = \frac{GJ_x(d\phi)^2}{2\,dx} = \frac{GJ_x}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx$$

由上式得

$$U = \int_0^L \frac{GJ_x}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \tag{3-17b}$$

求應變能時，（ 3 － 17 ）的兩個方程式無論那一個皆可採用，要看轉矩 T_x 或單位長度的扭角 θ（等於 $\dfrac{d\phi}{dx}$ ）何者為已知。

3.4 薄壁管

圖 3 － 9a 表示一個截面作任意形狀的薄壁管（ thin-walled tubes ）。管的厚度 t 依沿管的截面周邊而變，但假設其厚度比截面的總寬度為小。該管為筒狀，每端受有轉矩 T ，在轉矩 T 作用下，剪應力 τ 將發生在管的每一截面上（圖 3 － 9b ）。雖然沿截面周邊的剪應力可能大小不同，但在厚度薄的管壁上，可認為具有均一的強度。

為研究剪應力 τ 的大小起見，我們可取長度 dx 的元體 $abcd$ ，元體 $abcd$ 係在管壁上作兩個縱向的割切 ab 及 cd 所獲得者（見圖 3 － 9b ）。在此元體的縱邊上，將有與作用在截面上同樣大小的剪應力，因此在互相垂直的平面上其剪應力大小相等（見 1.9 節）。在縱向平面上的剪應力具有合力 F_1 與 F_2 （圖 3 － 9c ），可分別表示如下

$$F_1 = \tau_1 t_1\, dx \qquad F_2 = \tau_2 t_2\, dx$$

其中 τ_1 與 τ_2 各代表 b 點與 c 點的剪應力，而 t_1 與 t_2 爲在同位置上的

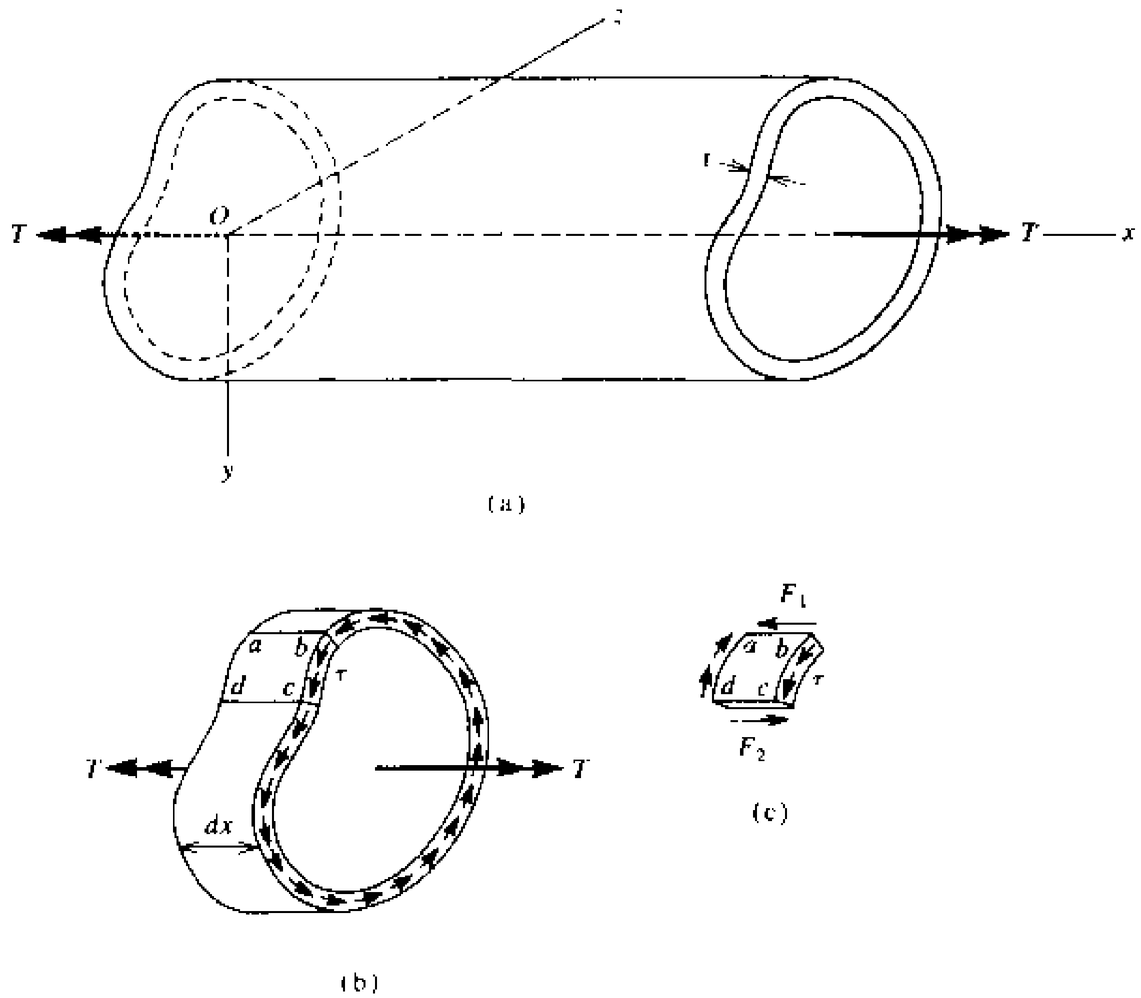


圖 3 - 9　截面爲任意形狀之薄壁管

管壁厚度。圖 3 － 9c 中所示，依元體的平衡，我們可得 $F_1 = F_2$ ，或

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$

因爲 ab 與 cd 兩個縱向割切位置係任意選擇者，所以我們可從前列方程式得知剪應力與管厚之積在截面的每一點上皆屬相同。此積統稱爲“剪力流”（ shear flow ）並以 f 符號表示之

$$f = \tau t = 常數 \tag{3-18}$$

由此，最大剪應力係發生在管壁厚度最小之處，反之亦然。當然，若管壁厚度均匀，則管壁周圍的剪應力 τ 爲常數。

爲了使剪力流 f 與作用在管壁上的轉矩 T 發生關係，就截面（圖 3 － 10 ）中 ds 長的元體，作用在有陰影的元體上的總剪應力爲 fds ，此剪

應力對任一點 O 的力矩爲

$$dT = rf\,ds$$

式中 r 爲從 O 點至管壁中綫切綫的距離。求管截面壁厚中綫全長 L_m 的積分，可得總轉矩 T 如下式

$$T = f\int_0^{L_m} r\,ds$$

此式中的積分，可有一簡單的幾何解釋。數量 rds 代表圖 3－10 中所示小三角形面積的二倍。注意，該三角形有一底長 ds 與一等於 r 的高。故

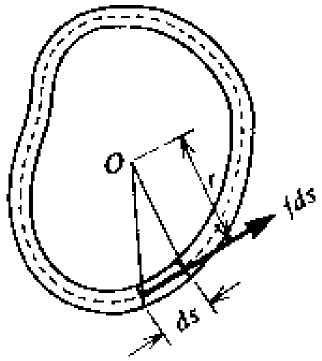


圖 3．10　管之截面

前項積分係代表雙倍管壁厚度中綫所閉合的面積。若用 A_m 表示此面積，則得

$$T = 2fA_m$$

或

$$f = \tau t = \frac{T}{2A_m} \tag{3-19}$$

任何薄壁管的剪力流與剪應力，均可由此式計算得之。

由管的應變能，可計算出單位管長的扭角 θ，如方程式（1－23a）所示。單位體積的應變能爲 $\tau^2/2G$，單位管長的應變能爲

$$U = \int_0^{L_m} \frac{\tau^2 t}{2G}\,ds = \frac{f^2}{2G}\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}$$

將（3－19）式的剪力流代入上式，並使應變能等於轉矩 T 所作的功，由此得

$$\frac{T^2}{8GA_m^2}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t}=\frac{T\theta}{2}$$

每單位長度的扭角爲

$$\theta=\frac{T}{4GA_m^2}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t} \tag{3-20}$$

由此方程式，當截面尺寸爲已知時，卽能算得其扭角。若厚度 t 爲常數，方程式變爲

$$\theta=\frac{TL_m}{4GtA_m^2}=\frac{\tau L_m}{2GA_m} \tag{3-21}$$

管長 L 乘 θ 卽得總扭角 ϕ * 。

方程式（ 3 － 20 ）表示單位長度薄壁管的扭角，具有與實心圓桿的扭角方程式（ 3 － 7 ）同一形式。假如 J 採用下式

$$J=\frac{4A_m^2}{\int_0^{L_m}\frac{ds}{t}} \tag{3-22}$$

J 量，一般稱爲截面的扭力常數（torsion constant）。我們已知扭力常數等於圓形截面桿件的極慣性矩，且可由薄壁管方程式（ 3 － 22 ）求得之。當管厚 t 爲一常數時，（ 3 － 22 ）式可簡化爲

$$J=\frac{4tA_m^2}{L_m} \tag{3-23}$$

對於一個厚度 t 爲常數，管壁中線（圖 3 － 11 ）半徑爲 r 的薄圓管

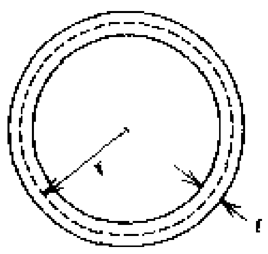


圖 3 . 11 薄殼圓管

---

* 方程式（ 3 － 19 ）與（ 3 － 21 ）通稱爲「布萊德」（ Bredt ）氏第一與第二公式。見參考書 3 － 3 及 3 － 4 。

，中綫之長爲 $L_m = 2\pi r$ ，由此綫圍繞的面積爲 $A_m = \pi r^2$ 。因此由（3－19 ）式得，剪力流與剪應力爲

$$f = \frac{T}{2\pi r^2} \qquad \tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} \tag{3-24a,b}$$

每單位長的扭角 θ ，由方程式（3－20 ）求得其值爲

$$\theta = \frac{T}{2\pi G r^3 t} \tag{3-25}$$

而扭力常數爲

$$J = 2\pi r^3 t \tag{3-26}$$

所有一切爲薄圓管所求得的結果，可如空心管導出的方程式求得（見 3－2 節）。例如，扭力常數（在本例中，等於極慣性矩）爲

$$J = \int \rho^2 \, dA \approx r^2 \int dA \approx 2\pi r^3 t$$

假設半徑 ρ 在全管厚上幾爲常數，並且等於 r 。則最大剪應力（見方程式 3－9）爲

$$\tau = \frac{Tr}{J} \approx \frac{T}{2\pi r^2 t}$$

假設剪應力 τ 在全管壁厚上幾爲常數，且等於在截面中綫處值。

若一承受扭力之管爲一具有特薄的管壁，該管壁失敗的可能性必須加以考慮。設以一根長圓軟鋼管爲例作說明，當其比值 r/t （見圖 3－11 ）約爲 60 時，在受到正常工作應力時卽變成彎曲。（見參考書 3－5 ）

【例題】1　試用近似方程式（3－24b）計算薄壁圓管的平均剪應力並自扭力公式（3－9式）計算其最大剪應力，作一比較。

求剪應力用的近似值公式爲

$$\tau_1 = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T}{2\pi t^3 \beta^2} \tag{a}$$

式中採用 $\beta = r/t$ 。管中眞實的最大剪應力可由方程式

$$\tau_2 = \frac{T(r + t/2)}{J} \tag{b}$$

式中

$$J = \frac{\pi}{2}\left[\left(r + \frac{t}{2}\right)^4 - \left(r - \frac{t}{2}\right)^4\right]$$

如(3－12)式所提供者。此 J 式經展開後，簡化成

$$J = \frac{\pi r t}{2}(4r^2 + t^2)$$

故 τ_2 式(即方程式b)變爲

$$\tau_2 = \frac{T(2r+t)}{\pi r t(4r^2+t^2)} = \frac{T(2\beta+1)}{\pi t^3\beta(4\beta^2+1)} \quad \text{(c)}$$

τ_1/τ_2 之比值爲

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{4\beta^2+1}{2\beta(2\beta+1)} \quad \text{(d)}$$

此(d)式，爲 β 的函數，即依 r/t 比值。若 β 值等於5、10及20時，由(d)式得之 τ_1/τ_2 比值分別＝0.92、0.96及0.98。因此，由(d)式求得的應力近似式的結果，祇略小於用精確公式所得者。又當比值增大時，近似公式的精確度亦隨之增大。

【例題】2　一圓形管與一正方形管(圖3－12)係用同一材料製成。二管皆具相同長度、厚度與截面積。並且承受大小相同的轉矩。問二管的剪應力與扭角各爲若干？(在方形管四隅角的應力集中效應不計)。

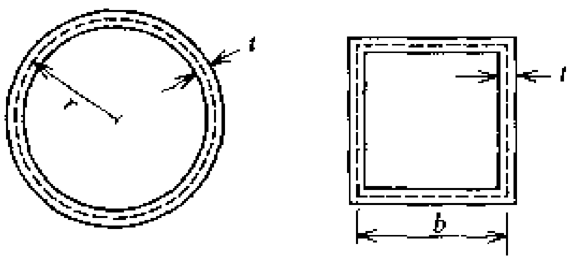


圖3.12　例題2

就圓管而言，截面中線所圍繞的面積 $A_{m1} = \pi r^2$，式中 r 爲中線的半徑。又圓管的截面積爲 $A_1 = 2\pi r t$。

對於正方形管而言，截面積是 $A_2 = 4bt$，b 爲沿中間線量度的一

個邊長。因爲二管面積相同，故得 $b=\pi r/2$。又，截面中綫所圍繞的面積是 $A_{m2}=b^2$ 。

圓形管內的剪應力與正方形管內的剪應力之比 τ_1/τ_2 爲（見 3－19 式）

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{A_{m2}}{A_{m1}}=\frac{b^2}{\pi r^2}=\frac{\pi}{4}=0.785 \tag{e}$$

扭角之比値（見 3－21 式）爲

$$\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{\tau_1 A_{m2}}{\tau_2 A_{m1}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=0.617 \tag{f}$$

兩個計算結果，證明圓形管不僅比正方形管有較低的剪應力，而且有更大的抗扭勁度。

3・5 圓桿之非彈性扭力

在 3－1 及 3－2 節中所導出的圓桿扭力方程式，只能在材料性質遵循胡克氏定律時才能合用。當剪應力超過比例極限時，各桿件的行態可從對稱方面加以考慮。假設圓截面仍爲平面而半徑仍爲直綫，在距桿軸綫 ρ 距離處的剪應變 γ（見圖 3－1c ），在彈性扭力下的情況具有相同的公式，應屬當然。即

$$\gamma=\rho\theta \tag{3-27}$$

在截面外邊的最大剪應變爲

$$\gamma_{max}=r\theta \tag{3-28}$$

式中 r 爲桿件半徑，桿件中任一點的剪應力 τ ，在已知材料的剪應力－應變圖中，可以求出（見圖 3－13a），在截面最外邊的應變爲 γ_{max}，而相

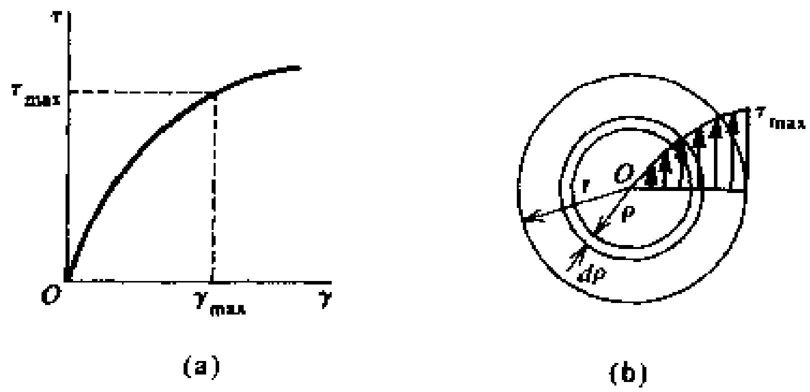


圖 3・13　圓桿件之非彈性扭力

當的應力τ_{max}可自應力－應變圖求得。在桿件中的中間各點，可用同樣步驟。結果，截面上剪應力的分佈（圖3－13b），將與應力－應變圖本身具有同樣形狀。

必然會在桿件上起作用以產生每單位長度的扭角θ的轉矩T，可從靜力學方程式求得（見圖3－13b）之

$$T = \int_0^r 2\pi\rho^2\tau\, d\rho \tag{3-29}$$

從方程式（3－27），我們得$\rho = \gamma/\theta$，而$d\rho = d\gamma/\theta$。將各項關係式代入方程式（3－29），並將積分式的上限改爲$\gamma_{max} = r\theta$，得

$$T = \frac{2\pi}{\theta^3}\int_0^{r\theta} \tau\gamma^2\, d\gamma \tag{3-30}$$

此方程式右側的積分，具有一簡單的幾何解釋。此乃應力－應變圖下，原點O與最大應變γ_{max}點間的面積，對垂直軸（即τ軸）的慣性矩。因此，對任何假設的θ值，我們可計算γ_{max}及相當的慣性矩。於是，自方程式（3－30）我們可得轉矩T值。對各種θ值重複此一程序，我們可得一代表T與θ關係的曲線。憑此曲線，易於求得任何已知T值的θ與τ_{max}值。

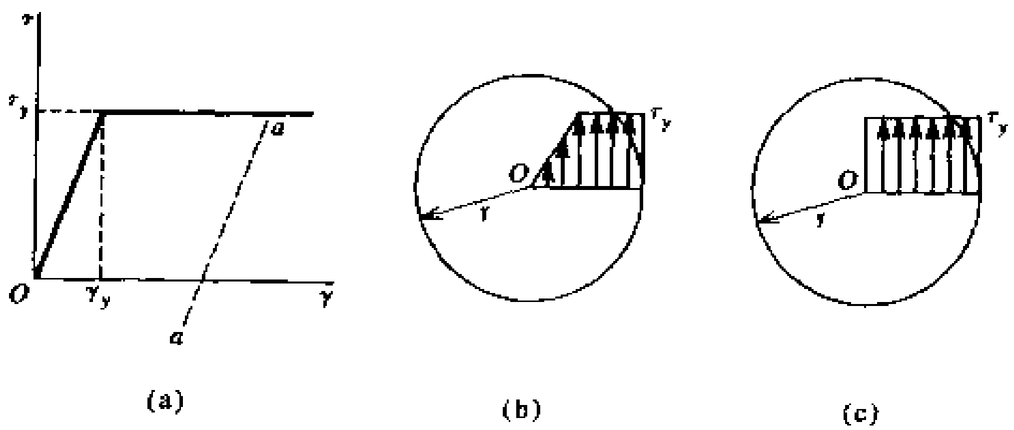


圖3．14　具彈性－塑性桿件之扭力

假如桿件的材料性質有一顯著之屈伏點τ_y，則應力－應變圖如圖3－14a所示可合於理想情況。此圖包括兩條直線，第一條線代表直線型彈

性行態，而第二條綫代表完全塑性形態。只要桿件中最大應變小於γ_y ，桿件的行態即屬彈性。在3－1節導出的公式即可應用。當截面外邊的應變超過γ_y，截面上的應力分佈將得到如圖3－14b 所示的形狀。此圖表示屈伏現象從外邊開始。當應變增大時，則逐漸向內移動。假如應變變得很大，屈伏區間將接近桿件的中部，而應力的分佈將趨向如圖3－14c 所示的均勻分佈。相當的轉矩T成為桿件的極限轉矩，其值（由方程式3－29 ）為

$$T_u = \int_0^r 2\pi\rho^2\tau_y \, d\rho = \frac{2\pi r^3\tau_y}{3} \tag{3-31}$$

當此轉矩值達到T_u時，即使不增大轉矩，亦將發生更進一步的扭轉。應變硬化的效應，終於變得顯著，而且發生的應力也大於τ_y 。

在桿件內首次發生屈伏的轉矩T_y ，可在（3－9）式中將τ_{max}代以τ_y 而得

$$T_y = \frac{\tau_y J}{r} = \frac{\pi r^3\tau_y}{2} \tag{3-32}$$

比較（3－31 ）式及（3－32 ）式，可知極限轉矩與屈伏轉矩的比值為

$$\frac{T_u}{T_y} = \frac{4}{3} \tag{3-33}$$

由本計算結果，我們可觀察到，在桿件內屈伏開始後，只要轉矩增加三分之一，即可使桿件達到極限載重－負荷量。

<u>殘餘應力</u>（ residual stresses ）

一受扭力桿件被加載重至彈性極限以外，其後再將載重移開，桿件中將存留一部份應力，此種應力稱為殘餘應力（ residual stresses ）。假定一實心圓桿荷重至極限轉矩T_u來說明其計算方法。桿件內因此產生的應力分佈如圖3－14c 所示，其後該轉矩完全被移去。當載重被移去時，於卸重過程中，在應力－應變圖上，材料順着一條平行於代表胡克氏定律的原始直綫（圖3－14a 中的$a-a$綫）前進。因此，當卸重時所產生的應力，可自直綫彈性行態的方程式求得（3－9與3－10 式）之。

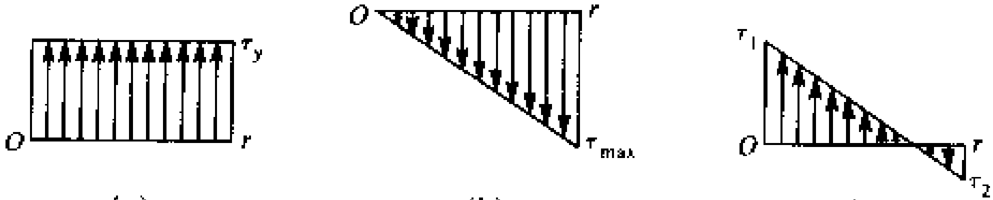


圖 3.15　殘餘應力

當負荷載重所生，與卸去載重後所留的應力重疊，表示如圖 3 − 15 。當荷重所達成的應力表示在圖上的第一部份；此相當的轉矩爲 $T_u = 2\pi r^3\tau_y/3$ ，在圖 3 − 15b 中，卸重應力圖代表此相同的轉矩，只是現在的轉矩以相反方向作用，而其行態是屬於直綫型的彈性。最大應力是 $\tau_{max} = T_u r/J$ ，或 $\tau_{max} = 4\tau_y/3$ 。由于載重與卸重，用疊加應力所得的殘餘應力，表示在圖 3 − 15c 內。在桿件中心的殘餘應力爲

$$\tau_1 = \tau_y$$

而在截面外邊的殘餘應力爲

$$\tau_2 = \tau_{max} - \tau_y = \tau_y/3$$

以後一個應力的方向與 τ_1 相反。此計算殘餘應力的程序，可同樣用於其他形狀的應力 - 應變圖。

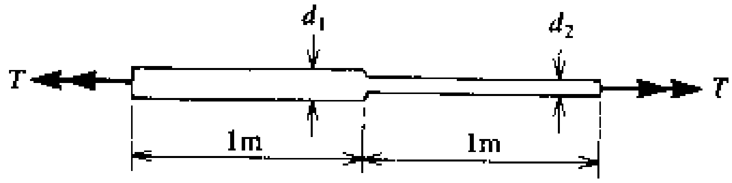
習　　題

3.1 − 1　設扭角爲 6° 時，最大剪應力爲 90N/mm² ，求其直徑 d = 50mm（ G = 80kN/mm² ）之鋼軸長度。

3.1 − 2　設扭角爲 90°時，最大剪應力爲 90N/mm² ，求鋼綫（ G = 80kN/mm² ）的長與直徑比（ L/d ）爲若干？

3.1 − 3　設容許剪應力爲 τ_w = 20N/mm² 每單位長的扭角爲每 4 m 1° ，（假定 G = 80kN/mm² ）。問承受轉矩 T = 3.6 kNm 之圓桿所需的最小直徑爲若干？

3.1 − 4　一受扭力桿件，其一半桿長的直徑 d_1 = 50mm 另一半桿長的直徑 d_2 = 38mm（見習題圖 3.1 − 4 ）。設扭角 ϕ 不超過 0.01 弳時

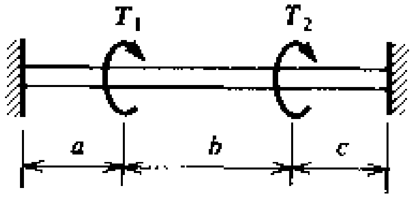


習題圖 3.1 - 4

，其容許轉矩 T 爲若干？（假定 G = 80kN/mm² ）

3.1 − 5　一直徑爲 d 的實心圓桿，加上一個轉矩 T，在與桿軸成 45° 角方向，度量桿件表面上的最大正交應變 ϵ。試以 T、d 與 ϵ 來導出剪力彈性模數 G 的公式。

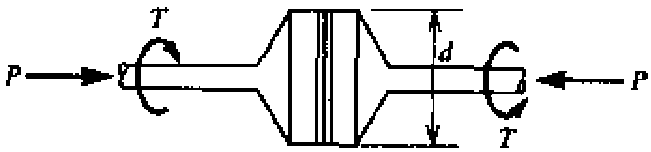
3.1 − 6　習題圖 3.1 − 6 示二固定端的圓桿，設 $T_1 = 2T_2$ 及 $a = c = L/4$，$b = L/2$ 時，求其中段內的轉矩爲若干？



習題圖 3・1 - 6

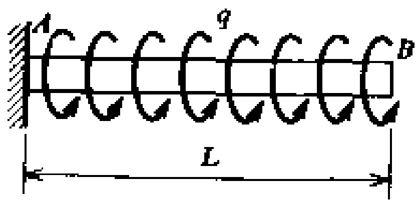
3.1 − 7　設容許工作剪應力爲 $\tau_w = 20N/mm^2$，一桿軸以每分鐘 120 轉轉速傳遞 150kW。試求其所需的直徑。

3.1 − 8　一個簡單凸緣形聯合子，將一轉矩自一桿軸傳至另一桿軸，如習題圖 3.1 − 8 所示。兩個聯合子盤（直徑 d）係圓形，受一正交力 P 緊壓在一起。設該 P 力係均勻分佈在兩個聯合子盤面上，兩盤間之摩擦係數爲 f。求由聯合子傳遞的最大轉矩 T，但傳遞時兩盤盤間並無滑動發生。



習題圖 3・1 - 8

3.1 − 9　一個圓形截面 AB 桿件，其左端爲固定（見習題圖 3.1 − 9），全桿件上受到分佈強度 q 的轉矩。試導出一在桿件 B 端的旋轉角 ϕ 的公式。



習題圖 3・1 - 9

3.1 − 10　於圖 3 − 5 內所示，並在例題 2 中討論過的桿件，其扭角 ϕ 二倍於直徑 d_b 的等截面圓桿的扭角時。問其 d_b/d_a 之比值爲若干？

3.1 − 11　一個實心圓（直徑 $d = 80mm$）桿，同時受到 $P = 200kN$ 的軸向拉力載重，與 3.4kNm 的轉矩 T。試計算該桿件的最大拉應力，最

大壓應力及最大剪應力。

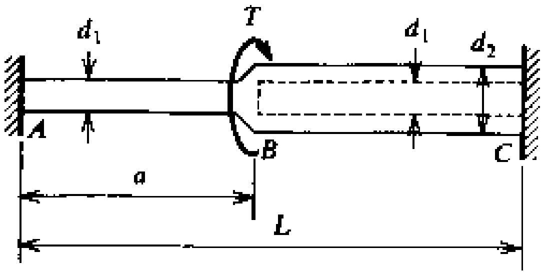
3.2－1　設計一空心圓軸與一同樣材料的實心圓軸，以相同的最大剪應力傳遞同一轉矩 T。設空心軸內半徑爲外半徑的 0.8 倍，求(a)空心軸重與實心軸重之比值，及(b)空心軸外直徑與實心軸內直徑之比值。

3.2－2　一根空心鋁軸（$G = 28 kN/mm^2$）長 2 m，其外直徑爲 100mm 直徑爲 90mm，(a)設在兩端皆受轉矩扭轉，當最大剪應力爲 70 N/mm^2 時，總扭角 ϕ 爲若干？(b)對於實心軸負荷同樣轉矩並產生同樣最大應力時，其所需的直徑 d 爲若干？

3.2－3　船用空心螺旋槳軸在轉速達每分鐘 100 轉時，產生最大剪應力爲 $35N/mm^2$ 傳遞 6MW。若內軸徑爲 $d/2$，求軸之外直徑 d。

3.2－4　兩端皆嵌入之 ABC 桿，在 B 截面上承受轉矩 T（見習題圖 3.2－4）。該桿長自 A 至 B 爲一實心圓截面（直徑＝d_1），由 B 至 C（外直徑＝d_2；內直徑＝d_1）爲空心圓截面。試導出一表示 a/L 比值的算式，使在 A 端與 C 端二者之反應轉矩（reactive torque）在數值上爲相等。

3.3－1　當扭轉角 ϕ 等於0.01弳時，習題3.1－4 的桿件內儲存若干應變能？



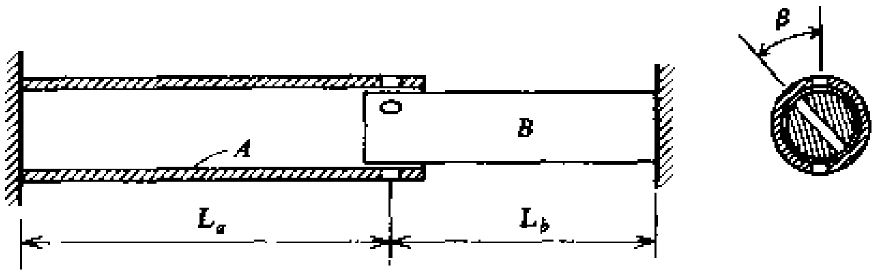
習題圖 3.2－4

3.3－2　試求習題 3.1－6 的桿件內儲存之應變能。

3.3－3　試求習題 3.1－9 的桿件內儲存之應變能。

3.3－4　兩個同長度同材料的實心圓桿，具有不同的截面積 A_1 及 A_2。設兩桿件承受同樣大小的轉矩 T，求所儲存之應變能量的比值。

3.3－5　如習題圖 3.3－5所示，一空心管 A 套於實心桿 B 的一端。B 桿端有一洞穿之孔，與貫穿 A 桿之直徑兩端的相對孔成一 β 角。於是扭轉桿件 B 使兩桿之孔眼正對在一直綫上，並放一梢釘在穿孔內。當此系統歸於靜力平衡時，兩桿件內的總應變能爲若干？（令 J_a 及 J_b 各代表桿 A 及桿 B 的極慣性矩，兩桿之剪力彈性模數 G 相同。）



習題圖 3-3-5

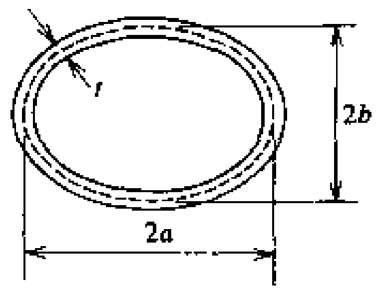
3.3－6　一端有飛輪的實心圓軸（$G=80\text{kN/mm}^2$）以每分鐘 120 轉的轉速旋轉。設該軸長 1.6 m，軸之直徑爲 50mm，飛輪重 450N，飛輪的廻轉半徑爲 250mm 當該軸在另一端突然停止，由此求其最大剪應力。（提示：使旋轉飛輪的動能等於該軸的應變能。）

3.4－1　厚 30mm 的空心圓管，內直徑 230mm，承受 $T=180$ kNm 的轉矩。(a)用薄壁管近似理論及(b)精確扭力理論，求管中的最大剪應力。

3.4－2　一個圓截面薄壁管軸，內直徑 100mm，承受 6kNm 的轉矩。設容許剪應力爲 90N/mm^2 (a)用薄壁管近似理論及(b)用精確扭力理論，求所需的管厚。

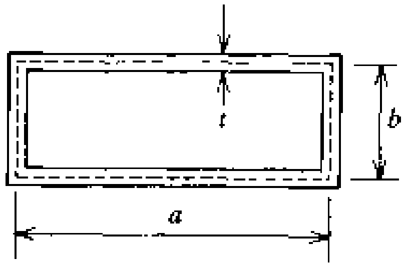
3.4－3　一個薄壁圓管與一同材質及同截面積的實心圓桿承受扭力。設兩者之最大剪應力相同，問管之應變能與實心桿應變能之比值爲若干？

3.4－4　一個橢圓形截面的薄管（見習題圖 3.4－4）承受一轉矩 $T=6\text{kNm}$。假如 $G=80\text{kN/mm}^2$，$t=5\text{mm}$，$a=75\text{mm}$，$b=50$ mm，求剪應力 τ 與每單位長的扭角 θ。〔注意：橢圓面積爲 πab，其周長約爲 $1.5\pi(a+b)-\pi\sqrt{ab}$〕。



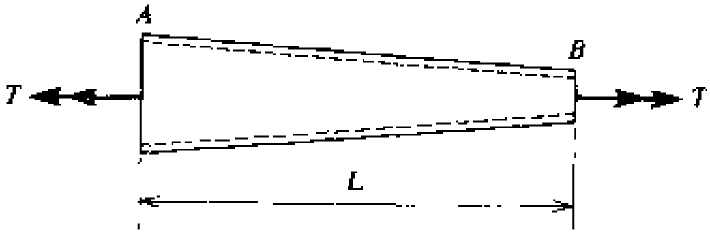
習題圖 3-4-4

3.4－5　一個矩形截面的薄管（見習題圖 3.4－5 圖），其厚度 t 爲常數。承受一轉矩 T。設截面積爲一常數，問管中剪應力 τ 如何隨比值 $\beta = a/b$ 而變？又扭力常數 J 如何隨 β 而變？



習題圖 3.4－5

3.4－6　一根長條錐形薄壁圓管（見習題圖 3.4－6）承受轉矩 T。該管壁厚度 t 與長度 L 皆爲常數。在 A 及 B 兩端至截面中間綫的直綫各爲 d_a 及 d_b。試導出該管扭角 ϕ 的公式。



習題圖 3.4－6

3.5－1　假定桿件之材料性質依胡克氏定律（$\tau = G\gamma$），用方程式（3－30），就一根實心圓形截面桿件，導出方程式（3－7）。

3.5－2　承受一轉矩 T 的實心圓桿（半徑 $= r$），其構成材質，在剪力之應力－應變圖所示係由方程式 $\tau^n = B\gamma$ 代表，式中 n 及 B 爲常數。(a) 試導出一在截面外邊剪應力之公式。(b)假定在損壞時，極限剪應力及應變各爲 τ_u 及 γ_u，$\tau_u^n = B\gamma_u$，試導出極限轉矩 T 的公式。

3.5－3　倘應力分佈如圖 3－14b 所示，假定已知截面外邊剪力應變爲 γ_{max}，並使用圖 3－14a 中所示的應力－應變曲綫，試導出作用於一個實心圓桿上轉矩 T 的公式。（注意：$\gamma_{max} \geq \gamma_y$，及 $T_u \geq T \geq T_y$）當 $\gamma_{max} = \gamma_y$ 時，$T = T_y$，並且當 γ_{max} 變成很大時，T 近於 T_u。試以觀察來核算所導出之結果。

3.5－4　倘桿件材料之應力－應變圖如圖3－14a 所示，試求一空心圓截面桿（見圖 3－6）之極限轉矩 T_u 與屈伏轉矩 T_y 之比值。

3.5－5　試用方程式（3－29）證實圖 3－15c（$\tau_1 = \tau_y$，$\tau_2 = -\tau_y/3$）所示之殘餘應力所代表的轉矩爲零。

第四章　剪力及彎曲力矩

4·1 樑之各種型式

一根桿件，若承受之力，係與其軸線成直角起作用者，稱爲樑（ beam ）。在本章內我們僅將考慮若干最簡單型式之樑，例如在圖 4 － 1 內所示諸樑。在每一個例內，假定該樑均有一個對稱的平面，與圖本身的平

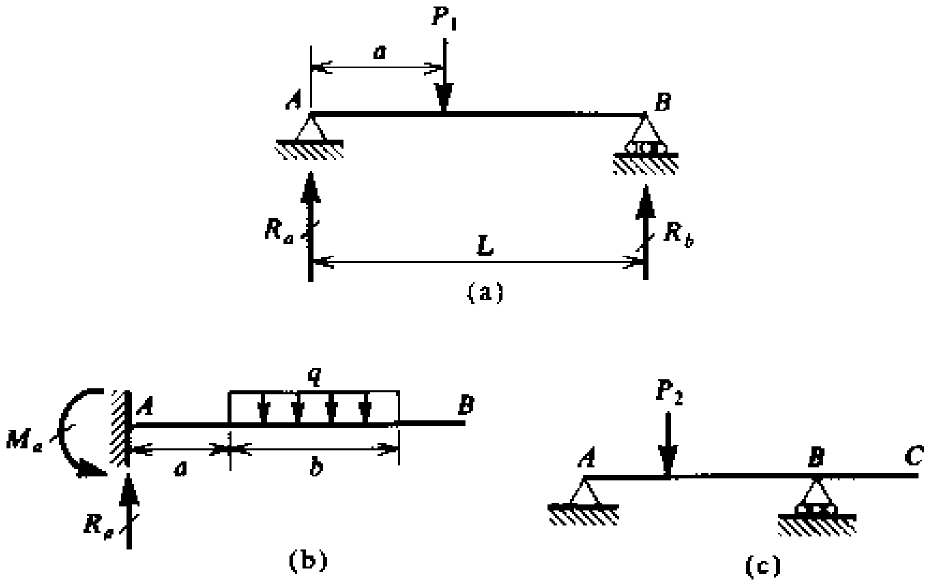


圖 4·1　樑之各種型式

面平行。因此樑的截面，具有一個垂直的對稱軸。此外，並假設所加的載重，係作用於對稱平面之內，並因此該樑的彎曲，亦將發生在該平面之內。以後在第八章，我們將考慮一種更爲常見的彎曲，在此種彎曲中，樑可能具有一個不對稱的截面。

在圖 4 － 1a 內所示之樑，一端具有一個釘（ pin ）支承，另一端則具有一個滾支（ roller ）承（或輥軸支承）。被稱爲簡支樑（ simply supported beam ）或簡樑（ simple beam ）。一根簡支樑的主要特徵，爲該樑的兩端在彎曲時，均一律可以自由旋轉。但在橫的方向內，（即在與其軸線成直角的橫方向內），則均不能移動。此外，樑的一端可在其軸方向移動自由（亦即在水平方向移動）。一根簡支樑的兩個支承，均可支持垂直的反力，或向上作用或向下作用。

在圖 4 － 1b 內所示之樑，其一端建入其他構材內而成固定(fixed)者而另一端爲可以自由(free)活動者，該樑稱爲懸臂樑(cantilever beam)。在固定支承端，該樑既不能旋轉亦不能在軸向移動位置。至於在其自由端，則可以旋轉並在軸向能移動位置。在附圖中的第三個例，表示一根懸伸(overhang)於支承以外的樑，該樑係簡支於 A 及 B 兩點，且在 C 點具有一個自由活動端。

在樑上的載重，可能爲集中力(concentrated forces)如圖 4 － 1a 及 c 所示的 P_1 及 P_2 力，或爲分佈載重(distributed loads)如圖 4 － 1b 所示的載重 q。分佈載重係按其強度(intensity)表示之。強度係按沿樑之軸線在每個單位距離內之力的單位數量來表示。如爲均佈載重，如圖 4 － 1b 所示的情形，其強度爲一定不變的。在另一方面，如具有變化的載重，其載重強度將依照沿該樑軸線的某一距離的函數而變的。

在圖 4 － 1 內所示的幾種樑均爲靜定的，因所有在各樑上的反力均可用靜力的平衡方程式決定。例如在簡支樑上支承載重 P_1 (圖 4 － 1 a)這種情形，兩個反力均一律爲垂直，彼等的數量，可由其兩端取力矩之和而求得之。因此我們可以得到

$$R_a = \frac{P_1(L-a)}{L} \qquad R_b = \frac{P_1 a}{L}$$

樑在其支承以外附有懸伸部分者(如圖 4 － 1 c)，支承反力可用以上同樣方法求得。

至於懸臂樑(圖 4 － 1b)上負載重 q 作用時，可用一個垂直力 R_a 及一個力偶 M_a 作用在固定支承上而使之平衡，如附圖所示的情況。從在垂直方向各力之總和，我們可以斷定

$$R_a = qb$$

而由在 A 點上力矩的總和，我們可求得

$$M_a = qb\left(a + \frac{b}{2}\right)$$

反力力矩(reactive moment) M_a ，如圖內所示的情形，其作用作反時針走向。

在以上的幾個例內，說明靜定樑的反力(力及力矩)，如何可用靜力學來計算。決定靜不定樑的反力，需要考慮關於樑的彎曲作用，此一主題將延至第七章內再行討論。

圖 4 － 1 內所示，諸理想化的支承狀況，在實際情形中，只能偶然遇到。茲舉一個實例，在長跨徑橋樑的樑，有時在其兩端採用釘及輥軸支承之，但在較短跨徑之樑，對於支承的水平移動，通常均起有一些鉗制。在大多數狀況下，此種鉗制對於樑的作用影響很小，可以略去不計，如在第 7 － 8 節內所指出。但若爲一很柔韌之樑，並假定其兩端的鉗制甚爲堅

固者，即需要考慮此等影響。若作此項考慮，需要作靜不定分析，將在第 7－8 節內討論之。

4·2 樑內之應力合力

茲舉一個實例，在此讓我們考慮一根懸臂樑，在其自由端有一傾斜載重 P 作用於該樑上。若在一個 mn 截面處將該樑截斷，並將該樑的左側部分當作一個隔離體（圖 4－2b ）隔離開來，我們可以看出，該樑被移去的部分（即右側部分）加於其左側部分的作用力，必定會將左側部分保持平衡狀況。在我們研究此工作階段，截面 mn 上的應力分佈尚屬未知，但我們的確明瞭這些應力的合力，必定會和載重 P 平衡。將合力分解成為一個軸向力 N（ axial force N ），與該截面成垂直作用並通過該截面的重心，一個剪力 V（ shear force V ）與該截面成平行作用，及一個彎力矩 M（ bending moment M ），在樑的平面內起作用。在樑的一個截面上作用的軸向力、剪力及彎力矩等通稱為應力合力（ stress resultants ）。如為靜定樑，應力合力可用平衡公式決定之。因此繪在圖 4－2 內的懸臂樑，我們可由 4－2 圖第二部分的隔離體圖，寫出三個靜力公式。分別從水平向及垂直向內各力的總結，可得成立下列兩式

$$N = P\cos\beta \qquad V = P\sin\beta$$

再從在一個通過該截面 mn 重心的軸上，取力矩總和，則得

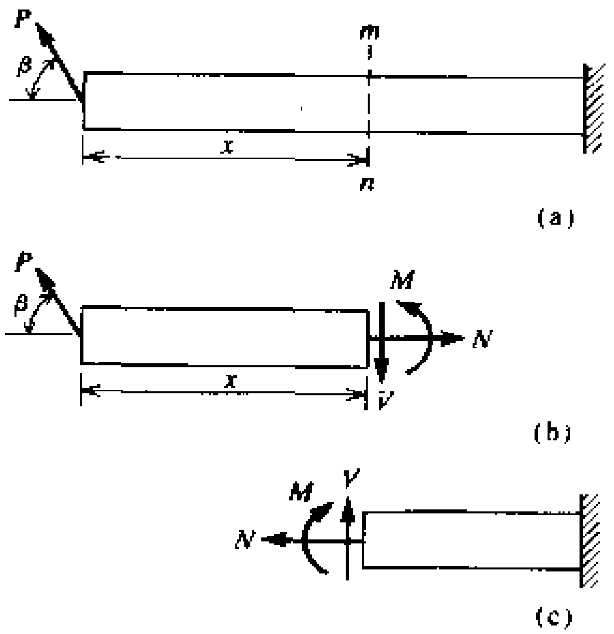


圖 4-2 應力合力 N、V 及 M

$$M = Px \sin \beta$$

式中的 x 爲從自由端至截面 mn 間的矩離。如此，利用一幅隔離體圖及靜力平衡公式，我們即能計算應力合力而無困難。由軸向力N單獨作用在樑內所引起的應力，已在第一章內加以討論。在下一章內我們將看到如何求出與彎力矩 M 及剪力 V 結合在一起所發生的各項應力。

應力合力N、V 及 M 如圖4－2b 內所示之方向作用時，將被假定爲正號。但此種正負號慣例，只在討論該樑左側部分之平衡時可以適用。若所考慮者爲該樑之右側部分，我們將能看出應力合力具有相等之數量，但方向相反（參閱圖4－2c ）。於是我們必須認識清楚一件事實，即應力合力之代數的正負號，並非與其在空間的方向有關係，如向左的或向右的，不如說是與在作用時所觸及的材料相關之方向有關係。爲舉例說明此一事實，N、V 及 M 所採用之正負號慣例另在圖4－3內繪出，其中應力合力係按作用在樑的一個元體上表示。我們可看出一個正軸向力，係從該力作

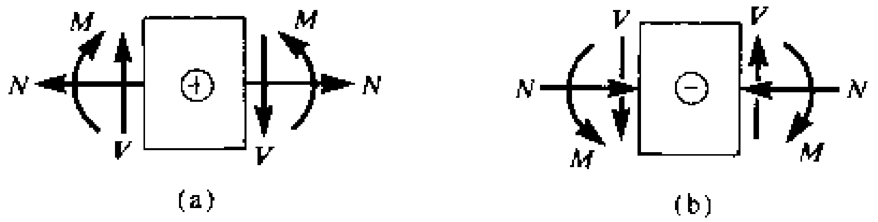


圖4-3　應力合力之符號慣例

用的表面上指向離去的方向（拉力），一個正剪力，係在該力作用的表面上依照順時針走向起作用，一個正彎力矩，爲一個將該樑的上部分起壓縮。

【例題】I　一根簡支樑 AB 負荷兩項載重，一個集中載重 P 及一個力偶 M_0 ，其作用如圖4－4a 內所示的情形。試求在下述之樑的截面位置時所起的剪力及彎力矩：(a)在樑中間之左側一小段距離時，及(b)在樑中間之右側一小段距離時。

在該樑分析工作中的第一步，爲求出其反力 R_a 及 R_b 。在樑的兩端 A 及 B 取力矩，得兩個平衡方程式，從而求得

$$R_a = \frac{3P}{4} - \frac{M_0}{L} \qquad R_b = \frac{P}{4} + \frac{M_0}{L}$$

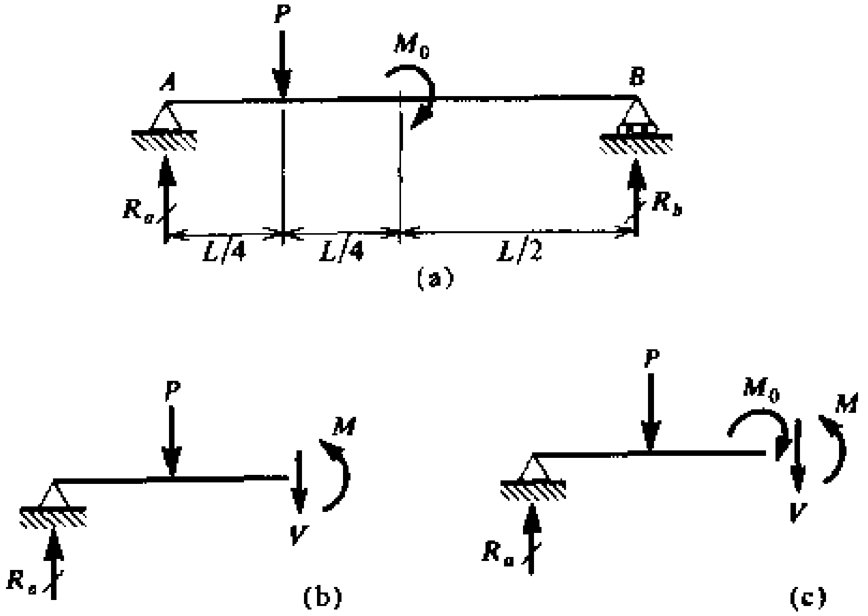


圖 4.4 例題 1

下一步，適在樑中間的左側，截取一截面，可任意就該樑的一半作隔離體圖。在本例中我們選在該樑左側一半處，而與其相當之圖如圖 4 － 4b 內，力 P 及反力 R_a 均予表出，未知的剪力 V 及彎力距 M，亦將同樣出現於該圖內，兩者一律按正號表示。力偶 M_0 並未出現於該圖中，因該樑是在施加 M_0 點的左側被截斷之故。取垂直方向內各力的總結，求得

$$V = R_a - P = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L}$$

此式表示剪力為負值；因此，該剪力係與圖 4 － 4b 內所假定的相反方向作用。在一個經由截面的軸線上取力矩（圖 4 － 4b ），可得下式

$$M = \frac{R_a L}{2} - \frac{PL}{4} = \frac{PL}{8} - \frac{M_0}{2}$$

由此可見，彎力矩可以為正值或為負值，全視在該公式內各項相對的數量而定。

如欲獲取適在樑中間右側截面上的各項應力合力，可在該截面處將樑切斷，仍繪出一幅適當的隔離體圖（圖 4 － 4c ）。此圖與前一幅唯一不同之處，係力偶 M_0 現在該樑截面的左側部分作用。若再總結在垂直方向內各力之和，且仍然在經過截面的一條軸線上取力矩，我們可獲得

$$V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} \qquad M = \frac{PL}{8} + \frac{M_0}{2}$$

從上列的結果可以看出，剪力值並不因截面從力偶 M_0 的左側移向右側而受改變，但彎力矩則按代數學的方式增加，其量等於力偶 M_0 。

【例題】2　一懸臂樑，A端為自由端，B端為固定端，承受一項分佈載重，其強度 q 係依直線變化。（見圖 4 － 5a　）。試求距離自由端 x 處的剪力 V 及彎力矩M 。

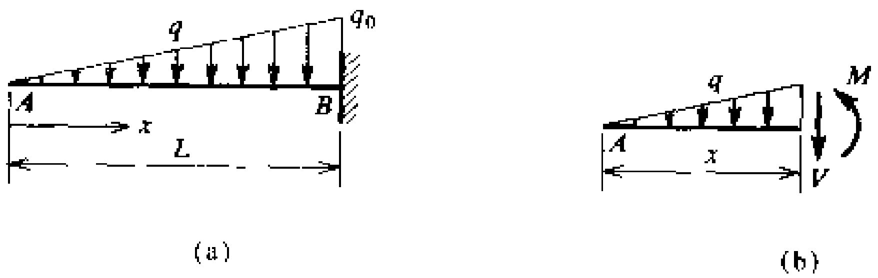


圖 4．5　例題 2

我們從距離樑左端 x 處切斷該樑，並將樑的一部分孤立成為一個隔離體（圖 4 － 5b　）。照前一例題，將剪力V及彎力矩M假設為正號。分佈載重的強度 $q = q_0x/L$　，且因此在圖 4 － 5b 內之隔離體上的全部向下載重等於 $q_0x^2/2L$　。因此由垂直方向諸力的平衡可得

$$V = -\frac{q_0x^2}{2L} \tag{a}$$

由上式可見，在自由端 A處即（ $x = 0$ ）處的剪力為 $V = 0$ ，而在固定端 B處，即（$x = L$）處的剪力為：$V = -q_0L/2$

為求樑內的彎力矩，我們可對一個經過截面的軸線，寫出其力矩平衡式，而得

$$M = -\frac{q_0x^3}{6L} \tag{b}$$

再就樑的兩端，我們即可看出，在（ $x = 0$ ）時的彎力矩將等於零；而於（ $x = L$ ）時，彎力矩將等於－ $q_0L^2/6$　。公式(a)及(b)，可用以獲取樑上任何一點的 V 及 M 值。又由觀察可得剪力及彎力矩一律在樑的固定端達其最大值。

4．3　載重、剪力及彎力矩間之關係

在一根樑上作用之載重、剪力及彎力矩間之各種關係，將在此處獲得。讓我們試行考慮一根樑上兩個截面間 dx 距離切下的一個元體（圖4－6a ）。若在該元體左側作用的剪力 V 及彎力矩 M 爲正值，則彼等將具有如圖內所示的方向。就一般情形說，剪力及彎力矩將沿樑之軸線量得的距離 x 而改變。故在該元體的右側表面上，剪力及彎力矩兩者將一律比在左側表面上之值稍微不同。若分別將 V 及 M 內所增加之量，用 dV 及 dM 來表示，我們即可看出，在右側表面上的相當數值將爲 $V+dV$ 及 $M+dM$。

在該元體上作用的載重，可爲分佈載重，一個集中載重或一個力偶。假設爲強度 q 的分佈載重，我們可自圖4－6a 內看出全部載重（假設在 q 向下起作用時爲正值）等於 $q\,dx$ 。於是由垂直方向內各力的平衡得

$$V-(V+dV)-q\,dx=0$$

或

$$\frac{dV}{dx}=-q \tag{4-1}$$

因此，如果有強度 q 的分佈載重作用於該樑上，則剪力將沿樑而改變，其改變率與 x 的關係將等於 $-q$ 。由此結論，若 $q=0$ ，剪力 V 爲一常數。

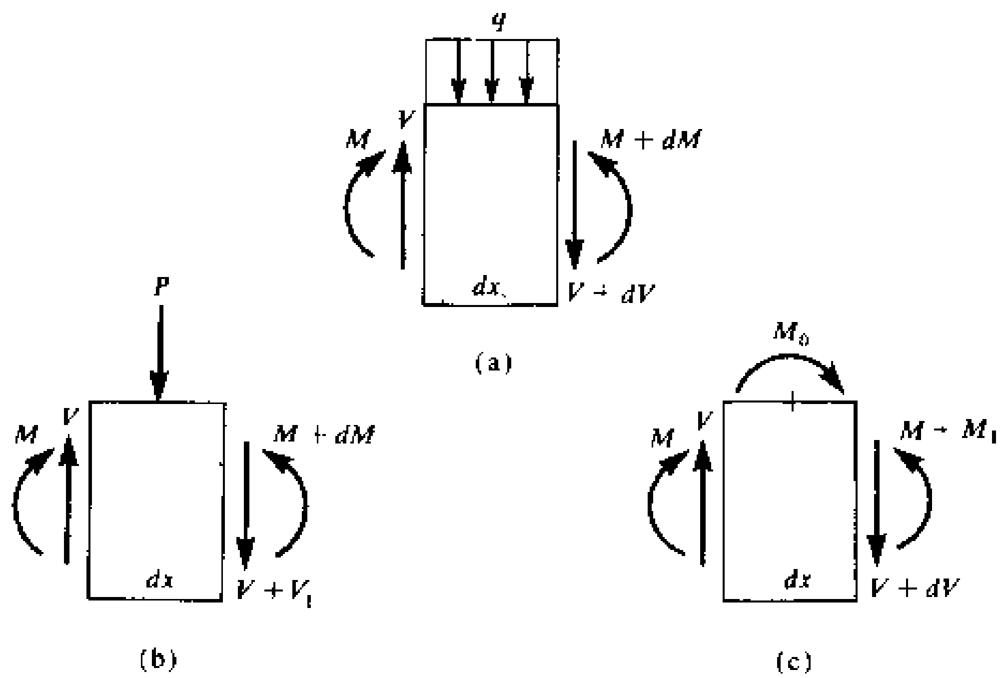


圖4-6　用以導出載重，剪力及彎曲力矩關係的樑的元體

圖 4 － 6a 內所示，對經過該元體左側表面的軸線上取各力矩和可得

$$M + q\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) + (V + dV)\,dx - (M + dM) = 0$$

將一切微分的乘積略去不計，則由上式可得下列之關係式

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{4-2}$$

此方程式表示彎力矩的改變率，等於剪力的代數值。其條件為，具有分佈載重（或無載重）作用於該樑上為然。

至此，讓我們假設有一集中載重 P 作用於該元體上（見圖 4 － 6b ）。由該元體的垂直向平衡，我們可看出，在該元體兩側間的剪力有一個突然的改變，或成不連續。此時剪力的增加量 V_1 等於載重 P 的負值

$$V_1 = -P \tag{4-3}$$

因此，當我們將載重施力點的左側移至右側時，剪力將突然減少一個等於 P 量。

在圖 4 － 6b 內所示該元體的左側邊緣上，其改變率（見公式 4 － 2 ）為 $dM/dx = V$，在右側邊緣上，其改變率為 $dM/dx = V + V_1$。因此我們可以作一結論。在一個集中載重 P 的施力點上，其改變率 dM/dx 突然減少一個等於 P 量。

最後考慮的情況，為一個力偶 M_0 載荷（見圖 4 － 6c ）。由垂直向的平衡，我們由計算獲得 $dV = 0$。此式表示，當我們由施力點左側移至右側時，剪力將保持固定不變。由該元體的力矩平衡可得下式

$$M + M_0 + V\,dx - (M + M_1) = 0$$

或

$$M_1 = M_0 \tag{4-4}$$

式中 M_1 為彎力矩的增加量。此方程式表示，當沿該樑從左向右移時，由於外加的力偶 M_0 在樑內的彎力矩，有一突然的增加。

（ 4 － 1 ）至（ 4 － 4 ）各方程式，對於在樑內剪力及彎力矩的變化作全面的探討工作頗為有用，將在下一節加以說明。

【例題】 試證明方程式（4－1）及（4－2）可適用於前一節例題2內討論的懸臂樑，其載重係依直線形變化（見圖4－5）。在前一節內的公式(a)及(b)為

$$V=-\frac{q_0x^2}{2L}\qquad M=-\frac{q_0x^3}{6L}$$

求其導數 dV/dx 得

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{q_0x}{L}$$

注意在本題內，載重的強度 q 為 q_0x/L。我們可看出方程式（4－1）業已滿足。此外，求導數 dM/dx，則得

$$\frac{dM}{dx}=-\frac{q_0x^2}{2L}$$

此式等於剪力 V；因此，方程式（4－2）的條件亦能滿足。

4·4 剪力圖及彎力矩圖

在一根樑內的剪力 V 及彎力矩 M，通常依其截面位置的距離 x 而變化。在設計樑時，需要明瞭在該樑上所有一切截面上的 V 及 M 值。求取此項資料的一種方便方法，係用一條曲線來表示彼等如何順沿該樑的軸線而變化。為繪出此項曲線，我們將用橫座標作為截面的位置，並以縱座標作為剪力或彎力矩與該位置相當的值。此類曲線稱為剪力圖與彎力矩圖（shear force and bending moment diagram）。

為舉例說明剪力圖或彎力矩圖的作圖方法起見，讓我們考慮一根負荷一個集中載重 P 的簡支樑（圖4－7a），該樑的反力為

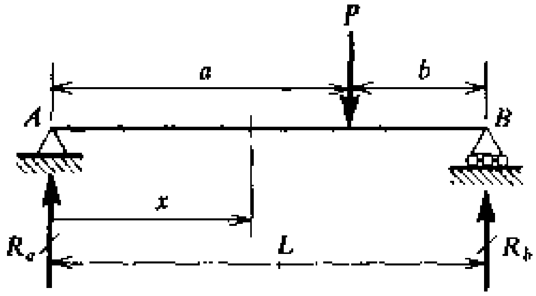
$$R_a=\frac{Pb}{L}\qquad R_b=\frac{Pa}{L}$$

在 P 的左側任何一個截面上，亦即取一個截面，其位置是 $0<x<a$；依平衡條件可得結論如下

$$V=\frac{Pb}{L}\qquad M=\frac{Pb}{L}x\tag{a}$$

從以上兩個式子，我們明瞭自支承 A 至該載重的施力點，其剪力將繼續保持為一常數。至於彎力矩將依 x 距而作直線變化。如 $x=0$，則彎力

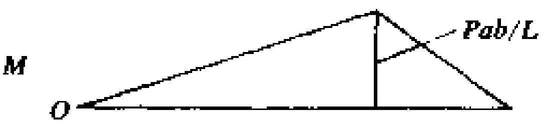
矩爲零；如 $x=a$，則彎力矩將等於 Pab/L。與此相當部分的剪力圖及彎力矩圖分別如圖 4－7b 及 4－7c 所示。



(a)



(b)



(c)

圖 4·7 簡支樑負一個集中載重之剪力圖及彎力矩圖

對於一個在載重 P 右側的截面，即 $a<x<L$，我們可得

$$V=\frac{Pb}{L}-P=-\frac{Pa}{L} \tag{b}$$

$$M=\frac{Pb}{L}x-P(x-a)=Pa\left(1-\frac{x}{L}\right) \tag{c}$$

我們又一次明瞭剪力爲常數，而彎力矩爲 x 之直線函數。在 $x=a$ 時，彎力矩等於 Pab/L，而在 $x=L$ 時，彎力矩爲零。

整個樑的剪力圖及彎力矩圖如圖 4－7b 及 c 所示。由此看出，彎力矩圖的傾斜度 dM/dx 等於 V（方程式 4－2），而剪力圖的傾斜度 dV/dx 等於 $-q$（即爲等於零），而與方程式（4－1）相一致。載重 P

的施力點，在剪力圖上有急劇的改變（等於 P ），在彎力矩圖的傾斜度，有與之相當的改變。

在由載重 P 的右側所導出的剪力及彎力矩式(b)及(c)時，我們將考慮樑左側部分的平衡，即有 R_a 及 P 兩個力在那部分上作用。在本例中如考慮樑的右側部分，其上只有 R_b （等於 Pa/L ）作用，將較簡單。按照此一程序，我們可以直接得到下列的方程式

$$V=-\frac{Pa}{L}\qquad M=\frac{Pa}{L}(L-x)$$

此兩式與在以前所得的方程式(b)及(c)相同。在前一例題中，構成剪力圖的兩個矩形，具有相同的面積一事頗堪注意。此種結果並非偶然，因若求方程式（4－2）的積分，我們即可得到

$$\int_A^B dM=\int_A^B V\,dx \tag{d}$$

在式中的上下限 A 及 B ，指出此積分係就該樑的整個長度從 A 端至 B 端求取之。此方程式的右側代表剪力圖的全部面積。此方程式的左側，經積分後，即得 B 端及 A 端兩個彎力矩的差額 M_b-M_a 。

若爲一簡支樑，在其兩端的力矩均爲零。因此在該方程式左側的積分亦將消失。如此，我們即可得一結論。在本例內，剪力圖的全部面積必須爲零。

在以力偶形式作用於樑上時，應用方程式(d)時，必須小心謹慎。因爲在那時彎力矩內有不連續性存在。在該方程式左側的積分項內，不能越過一個不連續性以求其積分。代替的辦法，可先求出在樑上力偶左側部分的積分值，於是再求出在樑上力偶右側部分的積分值，將兩者的結果加在一起，求得該積分之最後值。

若有幾個集中載重作用在一根簡支樑上（圖4－8a ），則須爲介於樑上各載重施力點間的每一區域分別定其 V 及 M 各式。仍從樑的左端起量 x 作爲該樑第一個區間（ $0<x<a_1$ ）而得下式

$$V=R_a\qquad M=R_a x \tag{e}$$

對於該樑的第二區間（ $a_1<x<a_2$ ），可得下式

$$V=R_a-P_1\qquad M=R_a x-P_1(x-a_1) \tag{f}$$

對於該樑的第三區間（ $a_2 < x < a_3$ ），與其取該樑的左側部分，反不如取其右側部分較爲有利。照此辦法可得

$$V = -R_b + P_3 \tag{g}$$

與

$$M = R_b(L - x) - P_3(L - b_3 - x) \tag{h}$$

最後，對於該樑的最後一部分，我們求得

$$V = -R_b \qquad M = R_b(L - x) \tag{i}$$

由(e)到(i)各式，我們可以看出，在樑的每一區間，其剪力將保持固定不變而爲一常數，並因其剪力圖具有圖 4 － 8b 所示的形狀。而在樑上每一部分的彎力矩，爲 x 的直線函數。因此與其相當的彎力矩圖，用一根傾斜直線來代表。爲幫助畫出這些條線，我們可將 $x = a_1$、 $x = a_2$ 及 $x = a_3$

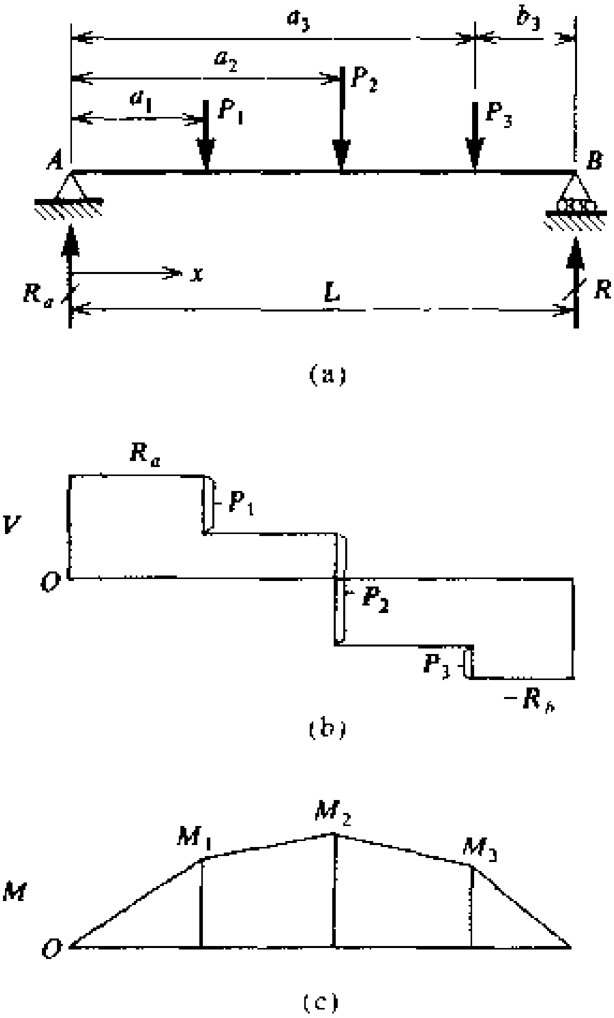


圖 4.8 簡支樑負若干個集中載重的剪力圖及彎力矩圖

等分別代入方程式(e)、(f)及(i)內而獲得在各集中載重下的彎力矩。照此作法，我們可得下列各彎力矩值

$$M_1 = R_a a_1 \qquad M_2 = R_a a_2 - P_1(a_2 - a_1) \qquad M_3 = R_b b_3$$

利用以上諸數值，彎力矩圖（圖 4 － 8c ）即可很容易的繪出。應加注意者，相當於剪力圖內每一不連續點，在彎力矩圖的傾斜度上，均有與其相符的改變。

在樑設計中，找出該樑的彎力矩中具有最大值或最小值的截面，通常頗為重要。如為一負集中載重之樑，如前例情形。該最大彎力矩永遠出現在集中載重的作用點上。從方程式（ 4 － 2 ），我們明瞭在彎力矩圖上任何一點的傾斜度，等於在該點的剪力。因此，在剪力改變其正負號處的截面，彎力矩必具有最大或最小值。若我們沿樑的 x 軸進行，剪力將從正號值變為負號值，（如在圖 4 － 8b 所示之情形）。於是在彎力矩圖上的傾斜度，亦將由正變為負。因此我們一定會有一個最大彎力矩在此一截面上。與此正好相反，在剪力從負號值變為正號值時，則將指出一個最小的彎力矩。就一般情形而言，剪力圖可能在幾處與水平軸線相交。與每一如此交點符合一致。在彎力矩圖內，將有一個最大值或最小值。所有這些最大值及最小值，必須一律加以研究，以便找出在該樑內數值最大的彎力矩。

在下一步，讓我們考慮一個負均佈載重的簡支樑（圖 4 － 9a ）。在本例內，反力 R_a 及 R_b 均等於 $qL/2$。因此，在距樑的左端 A 距離為 x 處的截面上，我們得到

$$V = \frac{qL}{2} - qx \qquad M = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \tag{j}$$

從兩個方程式內的第一個，我們可以看出，剪力圖係由一條傾斜的直線所構成。該直線的縱標，在 $x = 0$ 及 $x = L$ 兩處，分別為 $qL/2$ 及 $-qL/2$，如圖 4 － 9b 所示。並且彎力矩圖為一拋物線形曲線，而對該樑的中點成對稱（圖 4 － 9c ）。在樑的兩端，其彎力矩為零，其最大值則出現於該樑中點，在該處的剪力將改變其正負號。此一最大值，可由 $x = L/2$ 代入(j)式而得。如此演算可得：$M_{max} = qL^2/8$

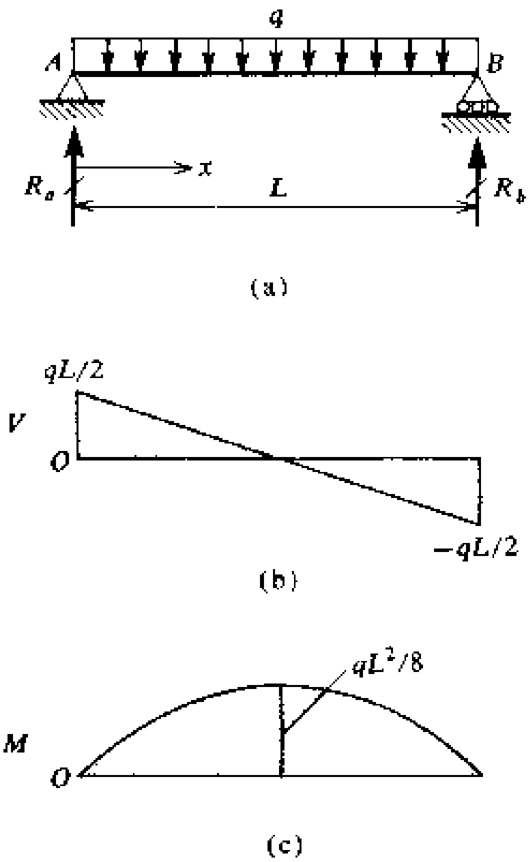


圖 4・9　簡支樑負均佈載重之剪力圖及彎力矩圖

【例題】1　一根簡支樑在跨徑的一部分載有強度爲 q 的均勻載重。試確定該樑的剪力圖及彎力矩圖（圖4－10a）。

我們開始求出該樑兩端的反力

$$R_a=\frac{qb}{L}\left(c+\frac{b}{2}\right)\qquad R_b=\frac{qb}{L}\left(a+\frac{b}{2}\right)\tag{k}$$

爲求各部分的剪力及彎力矩，我們必先分別考慮該樑的三個區間。關於該樑左側無載重部分（$0<x<a$），我們得

$$V=R_a\qquad M=R_a x\tag{l}$$

次在該樑的載重部分的某一截面上，其剪力可從反力 R_a 內減去在該截面左側作用的載重 $q(x-a)$ 求得。在同一區段內的彎力矩，可從反力 R_a 的力矩內減去在該截面左側載重的力矩求得。照此辦法我們可得

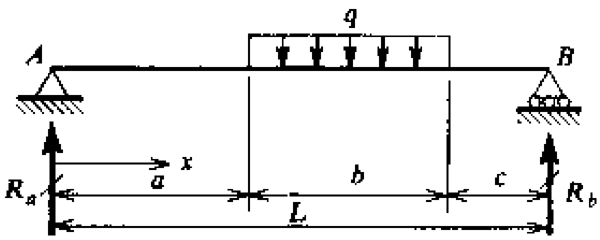
$$V = R_a - q(x-a) \tag{m}$$

$$M = R_a x - q(x-a)(x-a)/2 \tag{n}$$

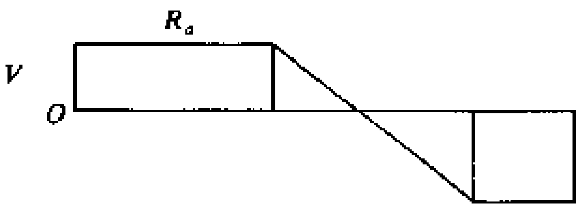
至於在該樑右側的無載重部分，我們求得

$$V = -R_b \qquad M = R_b(L-x) \tag{o}$$

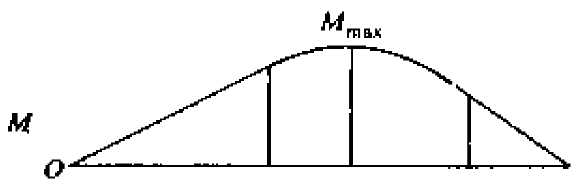
應用(l)至(o)各式，我們可很容易繪出剪力圖及彎力矩圖。（圖4－10b），係由相當於該樑兩處無載重部分的兩條水平直線與相當於有載重部分的一條斜線所構成的剪力圖。彎力矩圖（圖4－10c）則由相當於該樑兩處無載重部分的兩條斜直線，及相當於有載重部分的一條拋物曲線所組成。在4－10c 圖內的斜直線與拋物曲線，正切於彼等相遇之兩點上。此一結論，必須在所有各點上的剪力，並無在數量上有突然的改變。因此，由於方程式（4－2）之故，在彎力矩圖上之傾斜度，不可能有任何突出改變。最大彎力矩是在剪力改變正負號點上；其值可由適當合用的 x 值代入方程式(n)決定之。



(a)



(b)



(c)

圖4・10　例題1

【例題】2　試繪出如（圖4－11a）所示，懸臂樑之剪力圖及彎力矩圖。

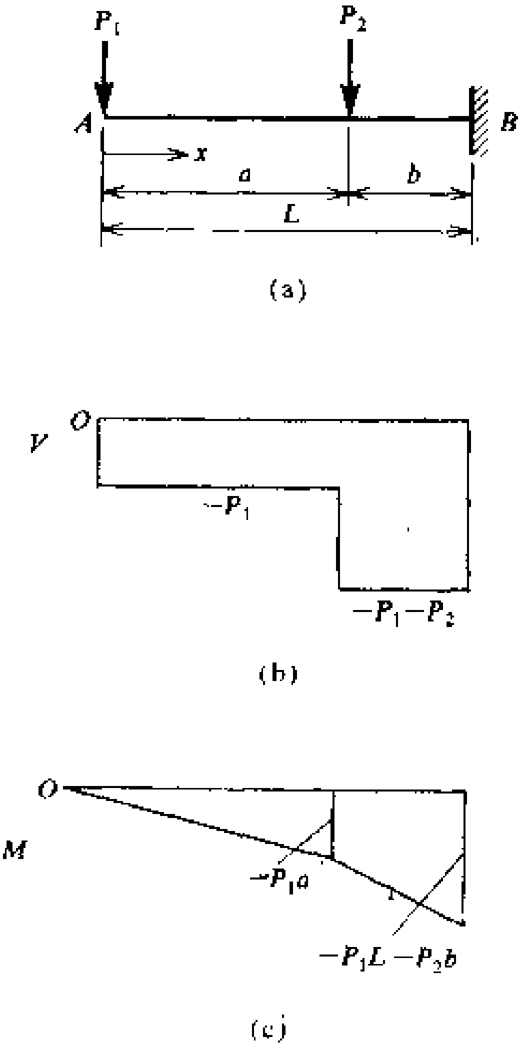


圖4・11　例題2

從樑的左端量 x 距離，並考慮 $0 < x < a$ 這一區間，我們可得

$$V = -P_1 \qquad M = -P_1 x$$

該樑的右側部分（ $a < x < L$ ），我們可得

$$V = -P_1 - P_2 \qquad M = -P_1 x - P_2(x - a)$$

與以上各方程式相當的剪力圖及彎力矩圖，如圖4－11b 及4－11c 所示。彎力矩圖係由兩條斜直線所組成，其傾斜度分別等於在該懸臂樑上各相當部分的各個剪力。剪力圖的全部面積並未消失，將等於 $-P_1L-P_2b$ ，此值亦等於在該樑 B 端的彎力矩。

若有多於一個載重在一根樑上作用時，則剪力及彎力矩可將各個載重分開，在樑上各別作用時的數量總結加在一起而得。例如，我們可以看出

，在前例中，該剪力圖（圖 4－11b）係將載重 P_1 及 P_2 將每一個單獨在該樑上作用，分別求得兩個剪力而疊合之。同樣，亦可應用於圖 4－11c 所示的彎力矩圖。

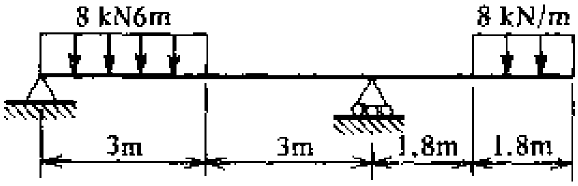
習　　題

4.2－1　若 $P_1 = 36$kN，$L = 6$ m，及 $a = 2$ m 。試確定在圖（4－1a）內簡支樑中點的剪力 V 及彎力矩 M。並求出在樑上的最大剪力及最大彎力矩。

4.2－2　試求出圖（4－1b）所示之樑，距左端距離 a 處之剪力 V 及彎力矩 M 諸公式。

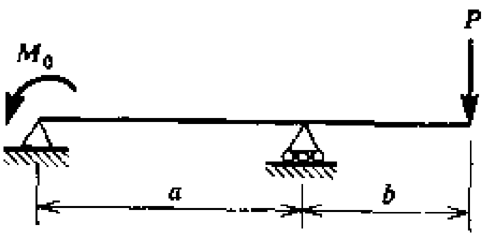
4.2－3　若 $a_1 = b_3 = 1$ m，$L = 4$ m，$P_1 = 5$kN，$P_2 = 0$，及 $P_3 = 10$kN，試求圖（4－8a）所示簡支樑中點的剪力 V 及彎力矩 M

4.2－4　試求習題圖 4.2－4 內之樑，在距左端 3 m 處截面上的剪力 V 及彎力矩 M。



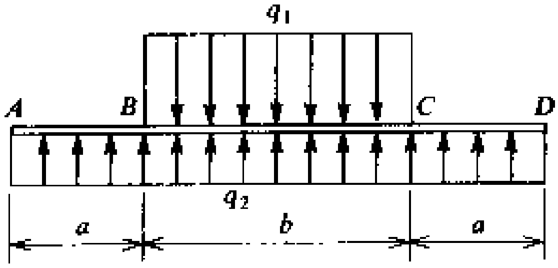
習題圖 4-2-4

4.2－5　在習題圖 4.2－5 內之樑，若 $M_0 = 16$kNm，$P = 36$kN，$a = 2.5$ m 及 $b = 1.5$ m。試確定在距該樑左端支承 2 m 處截面上的剪力 V 及彎力矩 M。



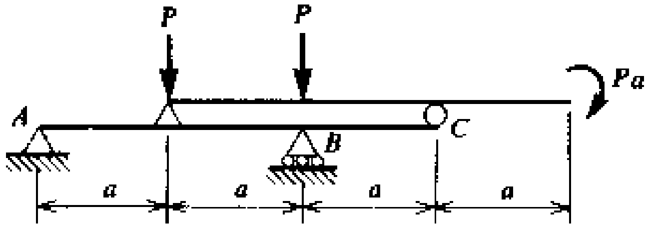
習題圖 4-2-5

4.2－6　$ABCD$ 樑負強度爲 q_1 及 q_2 的均佈載重，如習題圖 4.2－6 所示之情況。試求在 B 點及在梁中點上的剪力 V 及彎力矩 M。假設 $a = 2$ m，b = 4 m，及 $q_1 = 40$kN/m 。



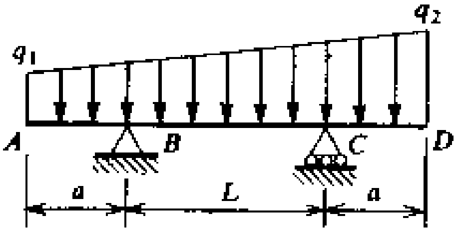
習題圖 4·2-6

4.2－7　試決定在載重如習題圖 4.2－7 內 ABC 樑上，數字最大的彎力矩。



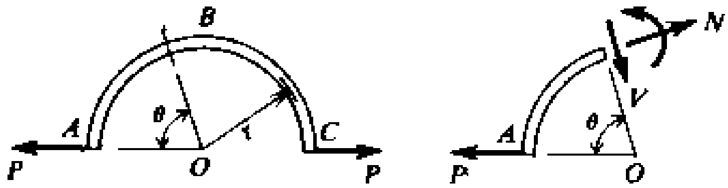
習題圖 4·2-7

4.2－8　在習題圖（4.2－8）所示 $ABCD$ 樑上，具有外伸的兩端上負一其強度依直線變化的分佈載重。若在該樑中點的剪力永遠為零，則 a/L 之比值應為若干？



習題圖 4·2-8

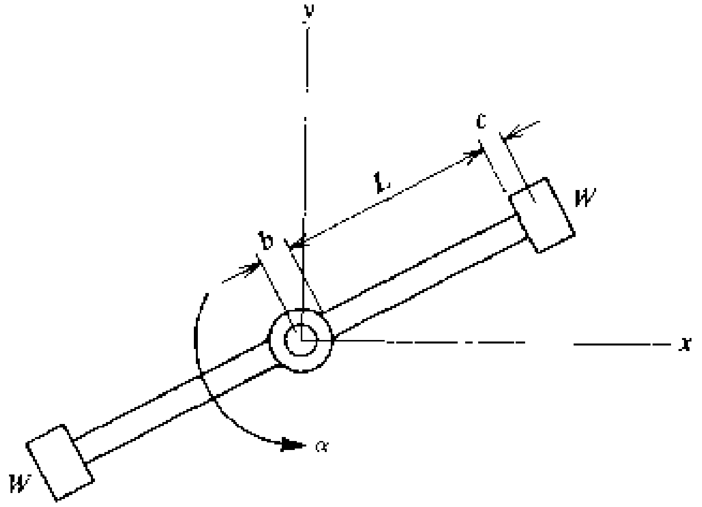
4.2－9　一根 ABC 彎曲桿件受到兩個大小相等方向相反的 P 力，如習題圖 4.2－9 所示之情況。桿件的軸線為一半徑 r 的半圓形。試確定在一個用 θ 角（見附圖）劃定的截面上的軸向力 N、剪力 V 及彎力矩 M。



習題圖 4·2-9

4.2－10　習題圖 4.2－10 所示之裝置，在一個光滑的表面上圍繞着

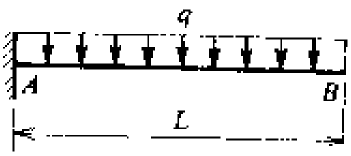
z 軸（是垂直的）以角速度 α 旋轉於一個水平方向的平面內。該裝置的兩臂，其單位長度的重量均為 w，在兩臂末端，各承重 $W = 2wL$。試導出在兩臂內的最大剪力及最大彎力矩公式。假設 $b = L/10$ 及 $c = L/15$。



習題圖 4.2-10

凡屬於第 4-4 節諸習題，除另行聲明者外，應按比例尺繪出其剪力圖及彎力矩圖，並在所有一切的臨界縱標上加以標記，此項臨界縱標，包括最大值及最小值。

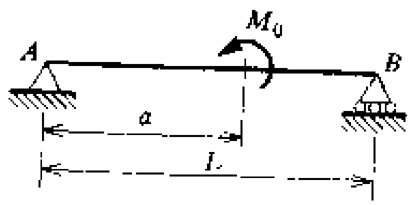
4.4-1 繪出懸臂樑負荷均佈載重的剪力圖及彎力矩圖（習題圖 4.4-1）。



習題圖 4.4-1

4.4-2 作圖 4-8 內簡支樑的剪力圖及彎力矩圖。假設 $a_1 = b_3 = a$，$P_2 = 0$，及 $P_1 = P_3 = P$。

4.4-3 作習題圖 4.4-1 內簡支樑的剪力圖及彎力矩圖。



習題圖 4-4-3

4.4－4　作習題圖 4－4a 所示簡支樑的剪力圖及彎力矩圖，假設 $M_0 = PL/2$ 。

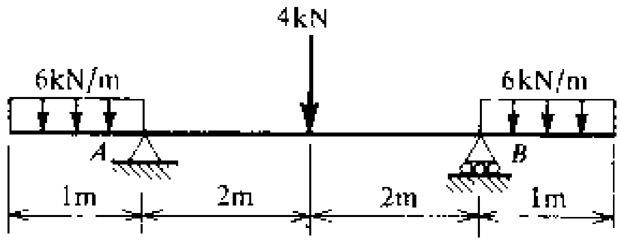
4.4－5　繪出圖 4－5a 所示懸臂樑負荷一項直線變化載重的剪力圖及彎力矩圖。

4.4－6　繪出在習題 4.2－4 圖內所示外伸樑的剪力圖及彎力矩圖。

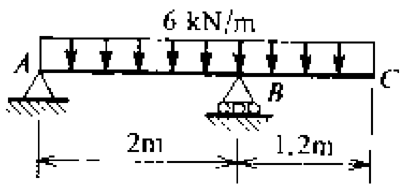
4.4－7　作習題 4.2－5 圖所示外伸樑的剪力圖及彎力矩圖。若 $M_0 = 16\ \text{kNm}$，$P = 36\ \text{kN}$，$a = 2.5\ \text{m}$ 及 $b = 1.5\ \text{m}$。

4.4－8　繪出習題 4.2－8 圖內樑之剪力圖及彎力矩圖。假設 $a = L/4$ 。

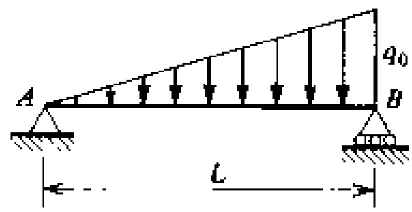
4.4－9 至 4.4－14 。作習題 4.4－9 至 4.4－14 各圖所示諸樑的剪力圖及彎力矩圖。



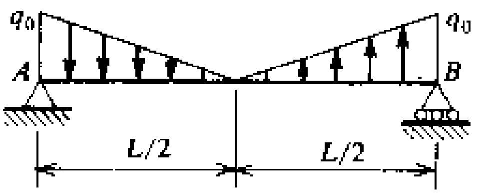
習題圖 4-4-9



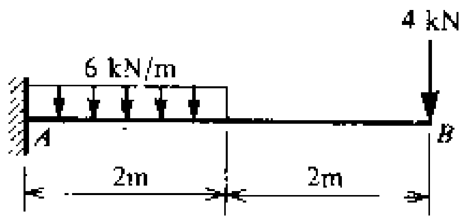
習題圖 4-4-10



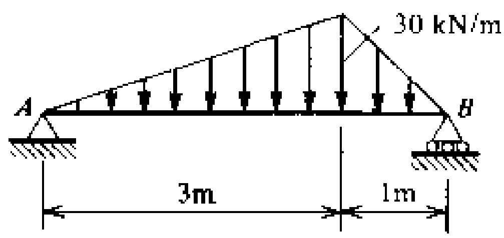
習題圖 4-4-11



習題圖 4-4-12

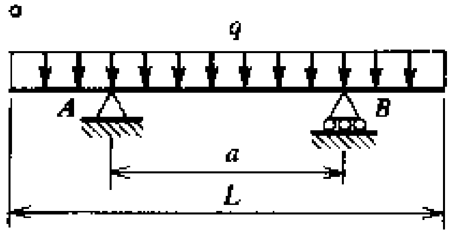


習題圖 4-4-13



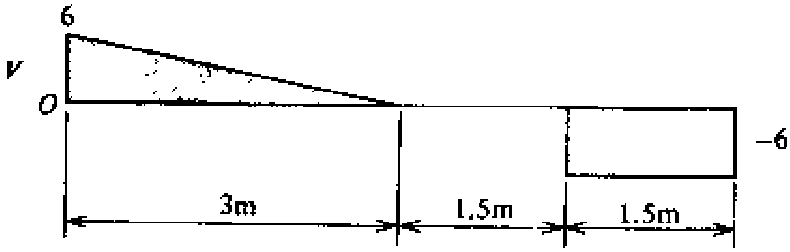
習題圖 4-4-14

4.4 − 15 一根樑之兩端具有相等的外伸部分（見習題圖 4.4 − 15），負荷強度爲 q 的均佈載重，全長爲 L。試求兩個支承間的距離 a，俾在樑中間的彎力矩與兩個支承上的彎力矩在數字上爲相等。畫出在此種情況下的剪力圖及彎力矩圖。



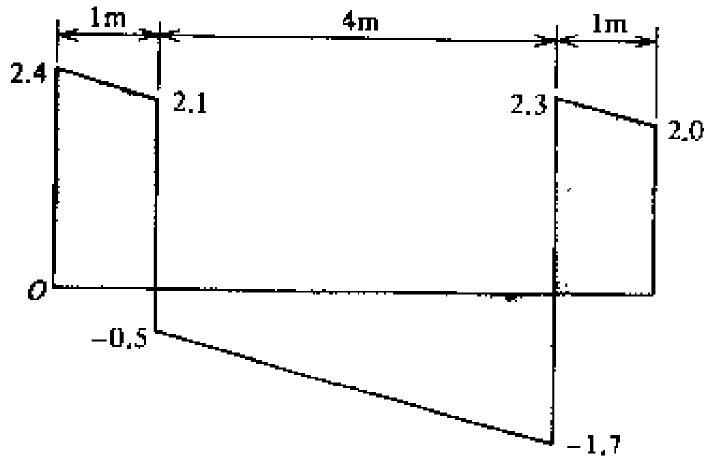
習題圖 4.4-15

4.4 − 16 一簡支樑的剪力（以 kN 爲單位）如習題圖4.4−16所示。試確定在該樑上的載重及其彎力矩圖。



習題圖 4.4-16

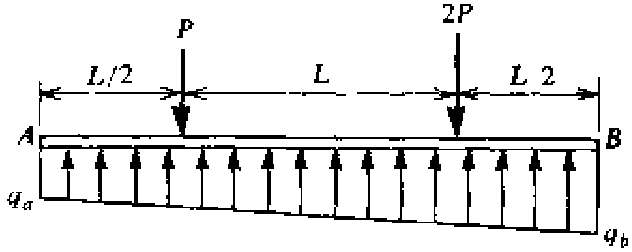
4.4 − 17 一樑之剪力（以kN 爲單位）如習題圖 4.4 − 17 所示。在樑內的最大正彎力矩及最大負彎力矩爲若干？（假設在樑左端的彎力矩等於0）。



習題圖 4.4-17

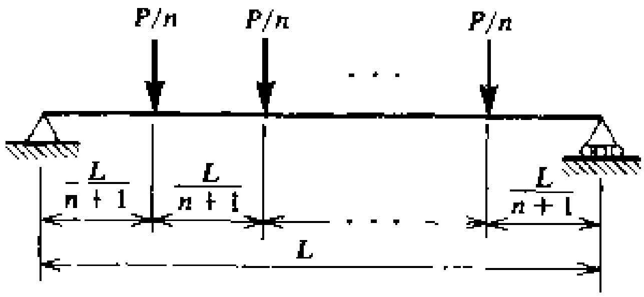
4.4 − 18 一根 AB 樑（見習題圖 4.4 − 18）其長度爲 2 L，在圖中所示的位置上負荷載重 P 及 $2P$。該樑被安置在一個地基上，地基施加一

種連續分佈的反力於該樑上。假設分佈反力自 A 至 B，其強度作直線變化。試求出在 A，B 兩端的分佈反力強度 q_a 及 q_b 。並決定在樑內的最大彎力矩值及其位置。



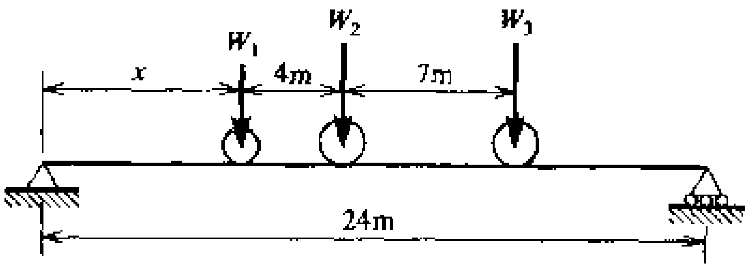
習題圖 4-4-18

4.4－19　在一根簡支樑上的載重，係由 n 個間隔相等的集中載重所組成（見習題圖 4.4－19）。施加的全部載重為 P 。因此每一集中力等於 P/n。樑之長度為 L，各載重的間隔為 $L/(n+1)$。(a)試為樑內最大彎力矩導出一公式。(b)應用該公式試為幾個接續的 n 值（$n=1$，2，3，4………）確定其最大彎力矩。(c)將這些結果與在樑內強度等於 q 的均佈載重所引起的最大彎力矩作一比較。但 $qL=P$。



習題圖 4-4-19

4.4－20　三個輪重，同在一簡支樑上移動如習題圖 4.4－20 所示。試用距離 x 確定三個輪子的位置，使樑上產生最大彎力矩。假設 $W_1=18$kN，$W_2=W_3=72$kN，並決定該梁的最大彎力矩值。



習題圖 4-4-20

第五章　樑內之應力

5．1 樑內正交應力

爲了介紹樑內應力這個主題，讓我們考慮一根負荷兩個力 P 之樑，如圖 5－1a 所示。此樑中央區段並無剪力，却受一等於 Pa 的一定彎力矩（constant bending moment）（5－1b 及 c）。此種具有一定彎力矩的情況，謂之純彎曲（pure bending）。

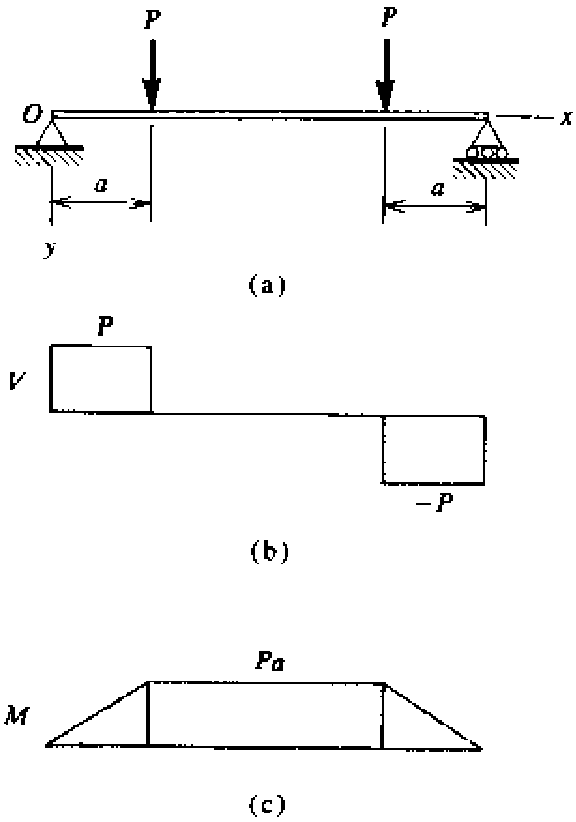


圖 5．1　中間區段受純彎曲之樑

爲求得由純彎曲產生的內應力之分佈狀況，必須考慮樑的變形問題。我們將假定 xy 平面（圖 5－1a）爲樑之對稱面，並假定載重皆作用於

此一平面內。因此，彎曲撓度亦將發生在此平面內。在彎力矩M作用下，樑軸將彎成一圓弧（見圖5－2a），而樑的截面，如mn 及 pq，原爲平面者，則仍維持平面，並與樑之縱纖維成正交。此樑的橫截面在純彎曲狀況下仍維持平面的事實，能由小心從事量度應變，在實驗上或理論基礎上加以確認。在後一種情形中，僅須注意到載重的對稱必須使所有樑元體均作同樣變形，這也祇有一切橫截面仍維持平面方屬可能。此一結論，不論樑之材料是否*爲直綫彈性變化，皆屬相符。將圖5－2a 所示作爲一彎曲變形的結果，我們看出橫截面mn 及 pq 共同繞着垂直於xy 平面之軸旋轉。因此，在樑凸出邊上的縱纖維被拉長，而在凹入邊上的被縮短。至此，在樑上部的纖維在壓縮狀態，而在下部的呈拉伸狀態。在樑的頂部與底部間某處的面內，縱纖維的長度不變。在圖5－2a 內的點綫ss 即

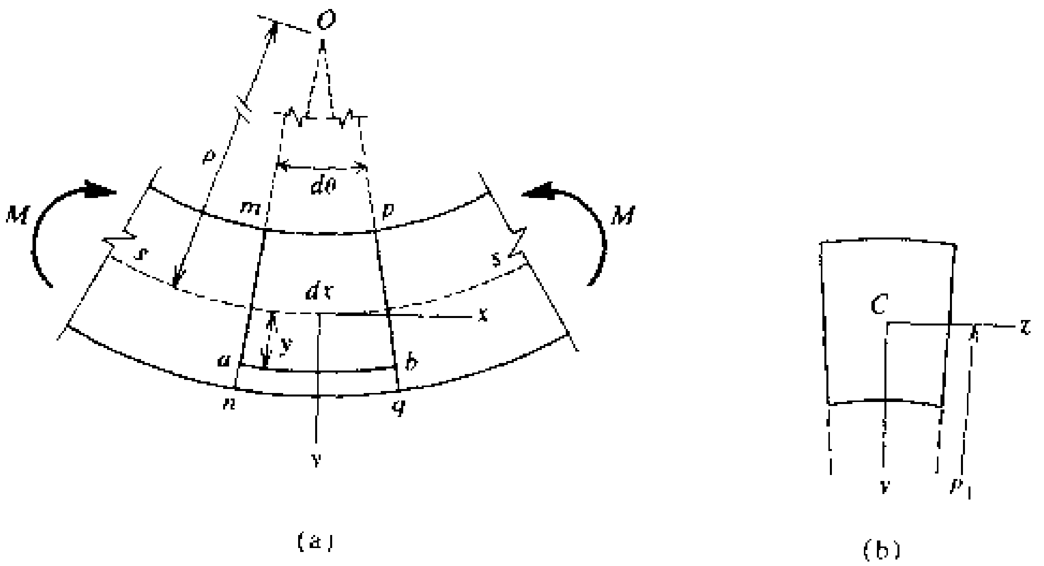


圖5・2　受純彎曲樑之變形

係表示此面，稱爲樑之中性面（neutral surface）。中性面與橫截面的相交處，稱爲橫截面的中性軸（neutral axis）。例如，圖5－2b 內所示的z軸即爲橫截面的中性軸。變形後，兩相鄰橫截面mn 及 pq 的平面相交於O點，是爲樑縱軸的曲度中心（centre of curvature）。該兩平面間之夾角以$d\theta$ 來表示，其曲度半徑（radius of curvature）則以ρ來表示。由該圖的幾何性質可知

---

* 見參考書5.1。

$$\kappa=\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx} \tag{5-1}$$

式中 k 爲曲度（curvature），等於曲度半徑的倒數，而 dx 爲相鄰兩横截面 mn 及 pq * 間元體的長度。

離中性面 y 距離的一般縱纖維 ab 的伸長，可求得如下。該纖維的總長爲（$\rho+y$）$d\theta$，或（$1+y/\rho$）dx。因此纖維原有的長度爲 dx，所以得知其伸長爲 $y\,dx/\rho$，而相當的應變爲

$$\epsilon_x=\frac{y}{\rho}=\kappa y \tag{5-2}$$

此方程式表示縱向應變 ϵ_x 直接與曲度成正比，亦與離中性面 y 之距離成正比。當所考慮的纖維在中性軸以下，距離 y 爲正號，應變亦爲正號（拉力）。當纖維在中性面以上，y 與 ϵ_x 皆爲負號，表示材料在受壓力。方程式（5－2）祇是從變形桿件的幾何性質導得，該方程式與材料性質無關。所以，當樑的材料具有任何樣式的應力－應變圖時，該方程式皆可合用。

由樑的實驗，表示纖維內的軸應變附帶有横應變，如在簡單的拉力或壓力情形（見1.4節）。中性面下縱纖維的伸長亦附帶有横收縮，而中性面上將有横膨脹。此類横應變的結果，就像在圖5－2b 所說明的矩形横截面的特殊情形。矩形各邊變爲互相傾斜，而横應變爲

$$\epsilon_z=-\nu\epsilon_x=-\nu\kappa y \tag{5-3}$$

式中 ν 爲卜桑氏比值。因爲此種畸變（distortion），在一切横截面內的直線，原來與 z 軸平行的，爲要與截面各邊成正交而彎曲起來。其曲度半徑 ρ_1 將大於同一比例之 ρ。在數字上，ϵ_x 大於 ϵ_z（見方程式5－3）；因此，我們可得

$$\rho_1=\frac{\rho}{\nu} \qquad \kappa_1=\nu\kappa \tag{5-4}$$

式內 $k_1=1/\rho_1$ 爲 yz 面的曲度。

對於一彈性材料之樑，具直線型的應力－應變圖（胡克氏材料），我們得 $\sigma=E\epsilon$，所以，樑內的正交應力（見5.2式）爲

* 在本章內，我們僅考慮曲度 k 的絕對值。以後，在6.1節內將採用曲度的適當符號慣例。

$$\sigma_x = \kappa E y \tag{5-5}$$

我們明瞭此種應力，如圖5－3a 中所示，係隨距中性軸距離 y 作直線的變化。在中性軸的下側起拉應力，在上側起壓應力；此種應力的合力作用必與作用在橫截面上的彎力矩 M 相同。

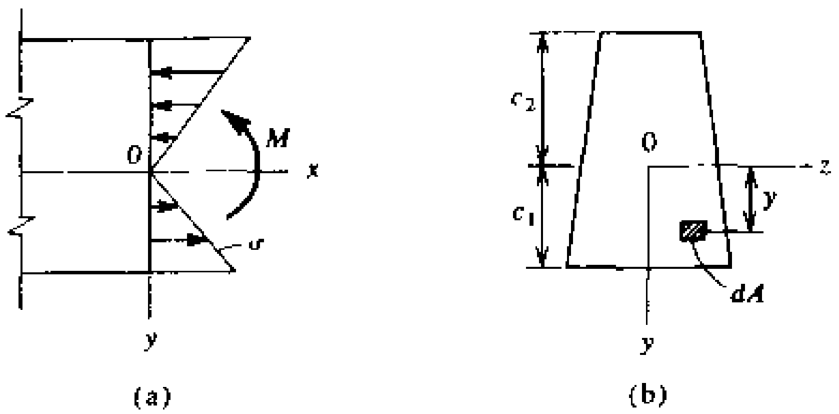


圖5.3　在一根樑內之應力分佈

令 dA 表示距中性軸 y 距離的橫截面內的元體面積（圖5－3b ）。那時在該面積上作用的元體力(elemental force)爲 $\sigma_x dA$。因爲作用於橫截面上沒有正交應力的合力，所以在橫截面的全面積上 $\sigma_x dA$ 的積分必等於零，故

$$\int \sigma_x \, dA = \int \kappa E y \, dA = 0$$

因爲曲度 k 與彈性模數 E 皆爲常數，由此方程式斷定

$$\int y \, dA = 0 \tag{5-6}$$

係屬於純彎曲狀況下之樑。此方程式的符號表示橫截面面積對中性軸，即 z 軸的第一力矩等於零。因此，我們知道中性軸將通過橫截面的重心。此種性質可用來定出具任何形狀的橫截面樑的中性軸。惟 y 軸必須限於如前說明的對稱軸，亦必須通過橫截面的重心。因此，y 與 z 軸（見圖5－3b ）的原點乃位於重心。而且，兩軸亦爲橫截面的主軸（見討論面積主軸的附錄 A ）。

元體力 $\sigma_x dA$ 對中性軸的力矩爲 $\sigma_x y dA$，在全部橫截面面積上所有此

類元體力矩的積分，必須等於彎力矩M，因此成立

$$M = \int \sigma_x y\, dA = \kappa E \int y^2\, dA = \kappa EI \tag{5-7}$$

式中

$$I = \int y^2\, dA \tag{5-8}$$

是橫截面積對 z 軸的慣性矩（ moment of inertia），亦即中性軸（ neutral axis）。方程式（5－7）可重寫成此種樣式

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{5-9}$$

式中表示樑縱軸的曲度與彎力矩M成正比。與EI 量成反比。此 k 量通稱爲樑之撓曲剛度（ flexural rigidity ）。

合併方程式（5－5）及（5－9），我們得下列樑內的正交應力方程式

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \tag{5-10}$$

在該方程式內，當樑上部產生壓力，y 方向向下爲正，M值亦爲正。（見圖5－3）

樑內最大拉應力與壓應力發生在距中性軸最遠的兩點。以 c_1 及 c_2 各別表示拉力及壓力至最外纖維的距離，如圖5－3b 內所示，並假定M爲正，我們從方程式（5－10）得

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{S_1} \qquad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{S_2} \tag{5-11}$$

式內 $S_1 = I/c_1$ 及 $S_2 = I/c_2$ 稱爲橫截面面積之截面模數（ section moduli ），假如橫截面對 z 軸成對稱，則 $c_1 = c_2 = c$ ，最大拉應力與壓應力數值相等

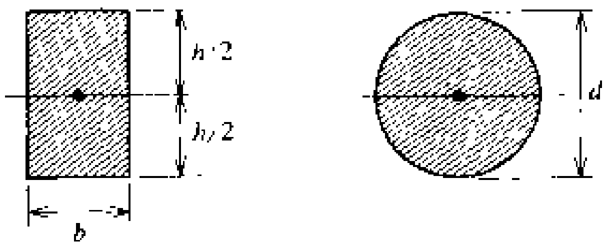
$$(\sigma_x)_{\max} = -(\sigma_x)_{\min} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \tag{5-12}$$

式中的截面模數爲

$$S = \frac{I}{c} \tag{5-13}$$

對寬度 b 高度 h 的矩形橫截面積（見圖5－4a ），慣性矩與截面模數爲

$$I=\frac{bh^3}{12}\qquad S=\frac{bh^2}{6}\tag{5-14}$$



(a)　　　(b)

圖 5.4

對直徑為 d 的實心圓形橫截面（圖 5－4b ），其

$$I=\frac{\pi d^4}{64}\qquad S=\frac{\pi d^3}{32}\tag{5-15}$$

其他各種型式的橫截面性質，如寬翼緣樑、工型樑及槽型樑等在各種手册中皆列表刋出。為用來解答本書中各問題，在附錄C中列有此類截面的摘要表。

在前一段內，樑內正交應力分析係由純彎曲發展而來，意謂並無剪應力作用在橫截面上。帶有剪應力的變形，即含有橫截面的扭曲（ warping ），故彎曲前的平面截面在彎曲後不再保持平面。此種扭曲，使行態造成更為複雜。但經精密分析得知，由撓曲公式（ 5 － 10 式）計算的正交應力，並未受剪應力存在與隨帶的扭曲而有重大的改變（見參考書5.2 ）。因此，當我們遇有不均勻的彎曲時，要計算正交應力，亦有理由援用純彎曲理論。至於剪應力的計算將在5.3節中詳加考量*。

【例題】1　兩端挑出之樑 AB 受有載重與支承如圖 5.5 所示。試求樑內最大正交應力及樑中心點撓度 δ 。假設該樑的横截面為圓形，直徑 $d=250\text{mm}$ ，再假設 $a=340\text{mm}$ ，$L=1.5\text{ m}$ ，$P=120\text{kN}$ ，及 $E=200\text{kN/mm}^2$。

在支承點間部分，該樑係在純彎曲狀態，其彎力矩為

$$M=Pa=40.8\text{ kN m}$$

---

*關於梁理論的歷史發展。在參考書5.3中將敍述Galileo, Mariotte , Jacob, Bernolli, Euler, Girard, Parent, Coulomb, Saint-Venant 以及其他學者等的貢獻。

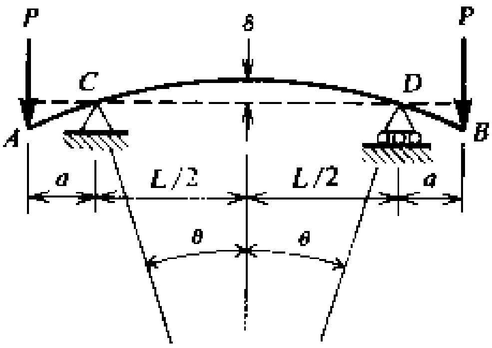


圖 5．5　例題 1

橫截面之截面模數 $S=\pi d^3/32=1.534\times10^6\mathrm{mm}^4$，故得最大正應力（由5．12 式）。

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{S}=\frac{40.8\times10^6}{1.534\times10^6}=26.6\ \mathrm{N/mm^2}$$

從5－9式得圓弧 CD 的曲度半徑 ρ（見圖5－5）

$$\rho=\frac{EI}{M}=\frac{200\times10^3\times191.8\times10^6}{40.8\times10^6}=940\ \mathrm{m}$$

式內 $I=\pi d^4/64=191.8\times10^6\mathrm{mm}^4$。從圖 5－5 得知，撓度 δ 為

$$\delta=\rho(1-\cos\theta) \tag{a}$$

式中 θ 為等於 $L/2\rho$，其量為0.000798弳。因為角度小，我們用 $\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$ 式得

$$\delta=\frac{\rho\theta^2}{2}=\frac{L^2}{8\rho}=0.299\ \mathrm{mm}$$

【例題】2　圖 5－6內所示之樑 ABC，係由槽形截面構成，其截面

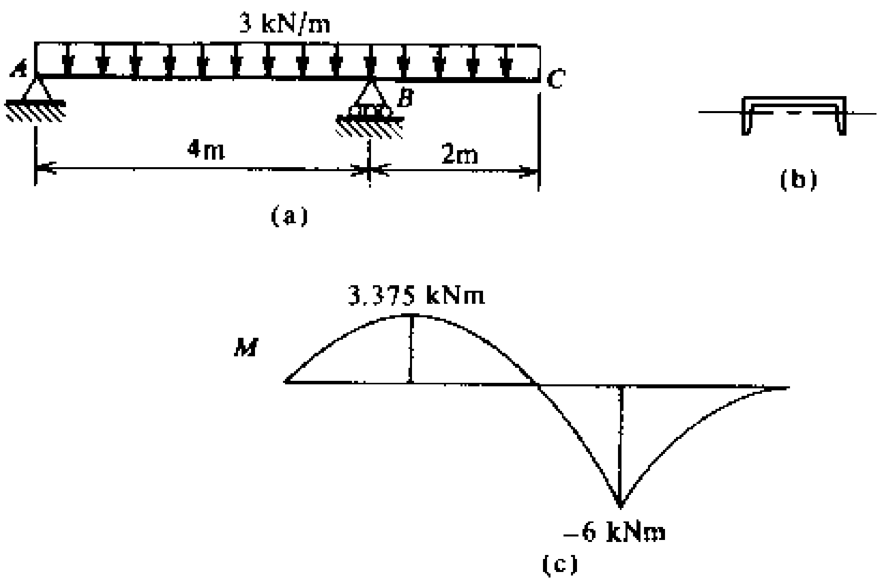


圖 5．6　例題2

擺正的方向如圖 5－6b 所示。該槽形樑截面爲 381 × 102 × 55.1kg，如附錄 C 中表 C－4 所列者。試計算樑內最大的拉應力與壓應力。

圖 5－6c 表示該樑的彎力矩圖，從該圖得知最大正力矩與負力矩分別爲 3.375 及 −6.0kN。樑之截面模數，可從附錄 C 中截面性質表 C－4 中查得。樑頂與樑底的截面模數分別爲

$$S_1 = \frac{580 \times 10^3}{2.52} = 228{,}000 \text{ mm}^3 \qquad S_2 = \frac{580 \times 10^3}{7.64} = 75{,}900 \text{ mm}^3$$

現在我們可由方程式 $\sigma = M/S$ 計算應力。在最大正力矩點，最大拉應力與壓應力分別爲

$$\sigma_t = \frac{3.375}{0.0759} = 44.5 \text{ N/mm}^2 \qquad \sigma_c = -\frac{3.375}{0.228} = -14.8 \text{ N/mm}^2$$

同樣，在最大負力矩點上所起之應力爲

$$\sigma_t = \frac{6.0}{0.228} = 26.3 \text{ N/mm}^2 \qquad \sigma_c = -\frac{6.0}{0.0759} = -79 \text{ N/mm}^2$$

由上面的四個應力加以比較，我們得知，在樑內的最大拉應力爲 44.5N/mm^2 而最大壓應力爲－79N/mm^2。

5·2 樑之設計

樑之横截面的選擇，依所用的材料、構造型式、載重性質以及許多其他因素。如僅基於彎曲設計觀點而言，則所需横截面積的截面模數，可自方程式

$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_w} \tag{5-16}$$

求得之。式中 σ_w 爲容許的正交應力，而 M_{max} 爲最大彎力矩。假若 σ_w 的拉力與壓力大小相同。則選擇横截面形狀要成雙重對稱，且其重心在樑高之半，才合乎邏輯的選擇。假如拉力與壓力的容許應力大小不同，則宜選用一個不對稱的横截面，使受拉力及壓力兩側的最外纖維（至重心）距離，各與相當的工作（容許）應力一樣，具相同的比值。在選擇樑截面時，通常習慣，不僅考慮所需的截面模數，也要儘量減小横截面的面積，以便將樑的自重減至最小。

當設計鋼樑或鋁樑時，經常要參考標準結構形狀的性質及尺寸（例如

參考書 5.4 及 5.5 ）。爲避免另查參考書的需要，本書將一些結構鋼的截面表酌改摘要列入附錄 C ，以供解答問題之用。例如914×419×388kg ,UB意謂截面統用梁（ universal beam ），而有公稱深914mm 與每m 388kg 重。將此截面指定一名稱，來認定該結構截面。工形（或RSJ）與槽形截面（或UC)等。如附錄 C 中所示，皆設有類似的名稱。用角鋼（或 L 形）的邊長與厚度以指定角鋼截面，例如203 × 152 × 22.1角鋼。

在比較各種橫截面形狀時，我們首先考慮一寬爲 b 深爲 h 的矩形（圖 5 － 4a）。該截面模數爲

$$S=\frac{bh^2}{6}=\frac{Ah}{6}=0.167Ah \tag{a}$$

式中 A 表示橫截面面積。一個已知面積的矩形橫截面，在增加深度 h 時、就變得非常經濟，這是使人容易瞭解的。不過，這種增大也有個限度，因爲假如截面變得太窄，在樑的側面就變成不穩定。非常狹窄的矩形截面可受橫屈挫（ lateral buckling)（或稱側屈挫 sideways buckling），而非由於材料強度的不足 * 。

對直徑 d 的圓截面（圖 5 － 4b)的截面模數

$$S=\frac{\pi d^3}{32}=\frac{Ad}{8}=0.125Ad \tag{b}$$

將同面積的圓截面與正方形截面比較，我們得知，正方形的邊長爲 $h=d\sqrt{\pi}/2$ ，因此由(a)式得

$$S=0.148Ad$$

將此結果與(b)式比較，顯示正方形截面比同面積的圓形截面更爲經濟。

沿橫截面的深度來考慮應力分佈，得到的結果是，爲求經濟的設計，樑的大部分材料，應儘可能使遠離中性軸。對於已知橫截面面積 A 及深度 h 的最良好情況，是希望把面積各半分配於距中性軸的兩邊各 $h/2$ 處，如圖 5 － 7a 所示。

於是

$$I=2\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{Ah^2}{4} \qquad S=0.5Ah \tag{c}$$

* 關於樑的橫屈挫的討論見參考書 5.6 。

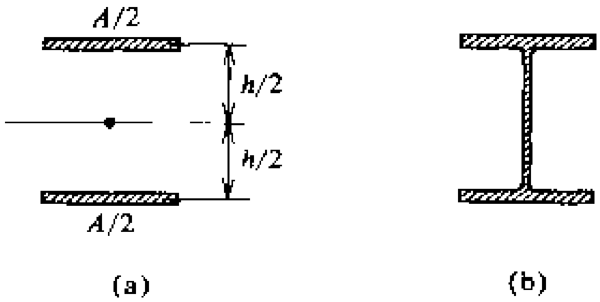


圖 5・7

此種理想的極限，在實際上使用寬翼緣截面，或具有大部分材料在翼緣上（ wide flange section ）的工字樑，庶幾可以接近理想（圖 5 － 7b）。因爲在樑的腹鈑需要有一部份材料加上，故極限情況(c)永不能實現。對於標準寬翼緣截面，我們大致可得

$$S \approx 0.35Ah \tag{d}$$

將(d)與(a)加以比較，顯示一個寬翼緣截面較同面積同深度的矩形截面要經濟得多。加之，由于寬翼緣樑具較大的寬度，較同深度同截面模數的矩形截面樑，就側面的屈挫而言，更要穩定得多。由此簡單的討論，我們可知，在金屬結構中何以廣泛使用寬翼緣樑的理由。

【例題】1　(a)求 AB 樑應有的截面模數。該樑支承如圖 5 － 8 所示的分佈載重。若 $q = 60\text{kN/m}$ 及容許彎應力 $\sigma_w = 110\text{N/mm}^2$，樑重不計。(b)從附錄 C 表內選一寬翼緣截面並將樑重考慮在內。

(a)求出最大彎力矩的截面位置，將有助於作一剪力圖，如圖 5 － 8 所示。支點的反力分別爲

$$R_a = 188.57\ \text{kN} \qquad R_b = 171.43\ \text{kN}$$

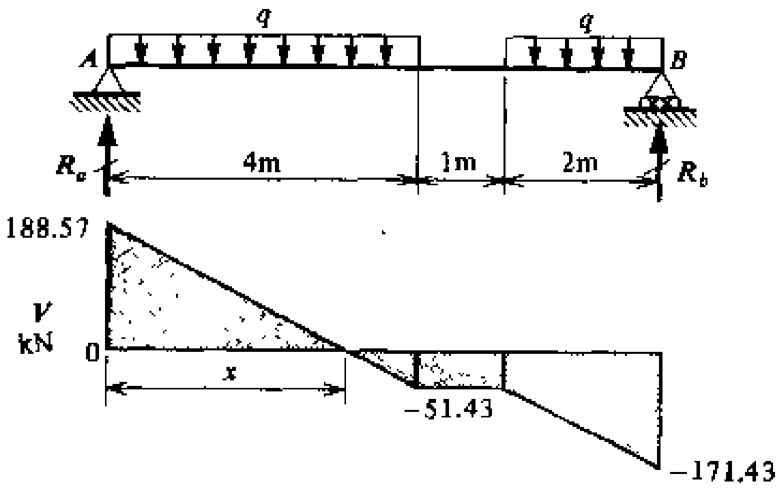


圖 5・8　例題 1

用下列方程式以求出剪力爲零的 x 距離。

$$R_a - qx = 0$$

令 $x = R_a / q = 3.143\text{m}$。在距左端 A 起，該距離 x 處的彎力矩爲最大，其值爲

$$M_{max} = R_a x - qx^2/2 = 296.32\ \text{kN m}$$

所需的截面模數，由方程式（5－16）爲

$$S = \frac{296.32 \times 10^6}{110} = 2.694 \times 10^6\ mm^3 = 2694\ \text{cm}^3$$

(b)我們查看附錄 C 中的寬翼緣截面表即 $C-1$ 表，在表列最輕截面而具有所需的截面模數是 762 × 267 × 147kg UB 。當然，此表爲摘要表因此更輕的截面，在實際採用時可能更適合些。

假設樑的自重（147 × 9.81 N/m）加在樑上的其他載重，則其最大力矩將會增加到 305.15kNm。所需的 S 將增加到 2774cm^3。因此，所選截面的截面模數將爲 $2774\ \text{cm}^3$。仍然是滿意足夠的。假如所選的斷面的 $4471\ \text{cm}^3$ 不能滿意，要再選一個新截面，而在計算彎力矩時，用新選截面的樑重，重複各項步驟。

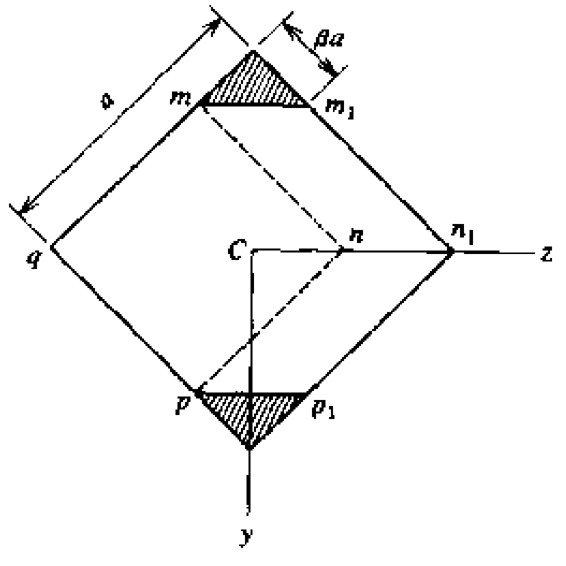


圖 5-9　例題 2

【例題】2　一正方形截面樑（圖 5－9）在對角線的平面受到彎曲。試說明當切下該截面的相對兩角隅時，則樑的最大應力將會降低，圖中陰影淺線部份爲截面的兩個切下角偶。

正方形對 z 軸的全部慣性矩與其截面模數分別爲

$$I_z = \frac{a^4}{12} \qquad S_z = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$$

式中 a 爲正方形邊長。現在讓我們切除兩個隅角，因此每邊縮短了 βa，此時 β 爲介於零與一間之數。新截面包含一個正方形 $mnpq$，邊長爲 a

$(1-\beta)$，及兩個平行四邊形 mm_1n_1n 及 nn_1p_1p。此減少的橫截面對於 z 軸的慣性矩爲

$$I_2=\frac{a^4(1-\beta)^4}{12}+\frac{2\beta a\sqrt{2}}{3}\left[\frac{a(1-\beta)}{\sqrt{2}}\right]^3=\frac{a^4(1-\beta)^3(1+3\beta)}{12}$$

相當的截面模數爲

$$S_2=\frac{I_2\sqrt{2}}{a(1-\beta)}=\frac{\sqrt{2}a^3(1-\beta)^2(1+3\beta)}{12}$$

若我們欲求 β 値使截面模數成爲最大，由上式求得 $\beta=1/9$。將 β 値代入 S_2 式，得 $S_{max}=1.053S_1$。由此可得，切除兩隅角時所增加的截面模數約爲5%，而最大彎應力則被減少相當的數量。

此一結果很容易了解，當我們想到，截面模數爲慣性矩與截面深度一半之商。由于切除隅角，使截面的慣性矩減小，比樑深的減小作更小的比例。因此，事實上截面模數將會增加。

5.3 樑內之剪應力

我們早已認識到，當樑受橫向載重而彎曲時常會有彎力矩 M 與剪力 V 同時作用在每一個橫截面上。在5.1節內，我們已推求過結合着彎力矩的正交應力分佈，在本節內我們將研究此剪應力的分佈。

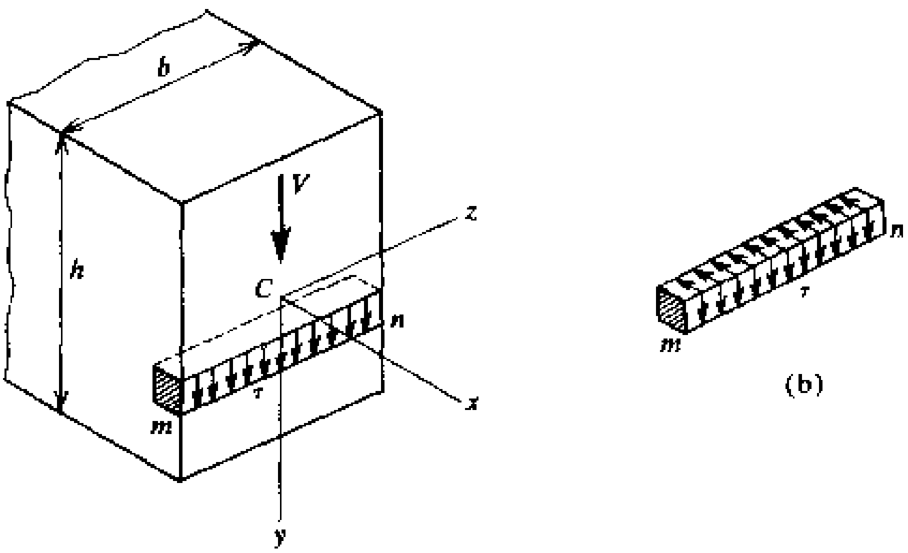


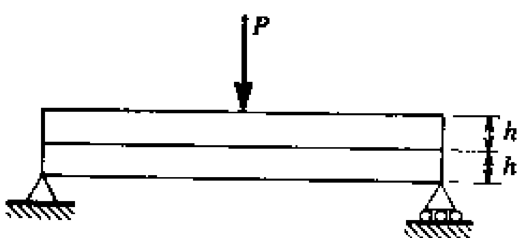
圖5.10　在矩形截面樑內之剪應力

讓我們先以最簡單的矩形横截面樑，寬度爲 b 高度爲 h 者（圖 5－10a）作開始。自然先假設此樑的剪應力 τ 與剪力 v 平行，卽與横截面的垂直邊平行。第二假定，我們令剪應力在樑的全寬內平均分佈。使用此兩種假定，我們能完整地推定作用在横截面上的剪應力分佈。

如圖 5－10a及 b 內所示，自樑的兩相鄰横截面與兩平行於中性面的兩平行面間，切出一個小元體。則在元體垂直面上有一平均分佈的垂直剪應力，這與前述兩個假定相符合的。我們自 1.9 節內所討論的剪應力得知，在元體一邊上的剪應力跟着與該邊垂直的一面上亦有相等的剪應力（圖 5－10b）。因此，在該樑的水平層間，與垂直横截面上的横向剪應力一樣，亦將有水平剪應力存在。在該樑內的任一點上，此類互補剪應力（complementary shear stresses）的大小相等。

此種水平與垂直剪應力的相等性，導致樑頂與樑底剪應力間一個有趣的結論。假如我們考慮在圖 5－10 內所示的元體，係在樑頂或樑底，顯然因爲在樑外面沒有應力，而水平剪力必定爲零。所以在樑頂或樑底（$y = \pm h/2$）的垂直剪應力也必定爲零。

樑內水平剪應力的存在，可由一項簡單的實驗來說明。取兩條高度爲 h 的相同矩形桿件，疊置在簡支承點上，如圖 5－11a所示，然後加上一個集中載重 P。假如兩桿件間沉有摩擦力，則兩桿件的彎曲現象發生時將互不發生影響，兩桿件將會在其上部有壓力及其下部有拉力。其情況一如圖 5－11b 所示。上層桿件的下部縱纖維將沿下層桿件的上部縱纖維滑動。假如，不用兩桿件爲例，我們用一深度等於 $2h$ 的實心桿件，則沿着中性面必定會有剪應力產生，其大小用以阻止如圖 5－11b 所示的滑動發生。因爲此種阻止滑動的現象，在單獨一根深度爲 $2h$ 的桿件，要比兩根深度均爲 h 疊放一起但互相分開的桿件更爲強勁。



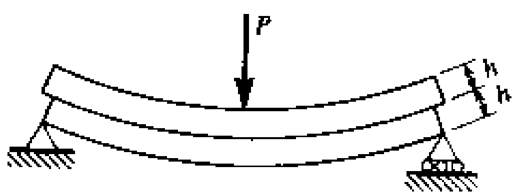
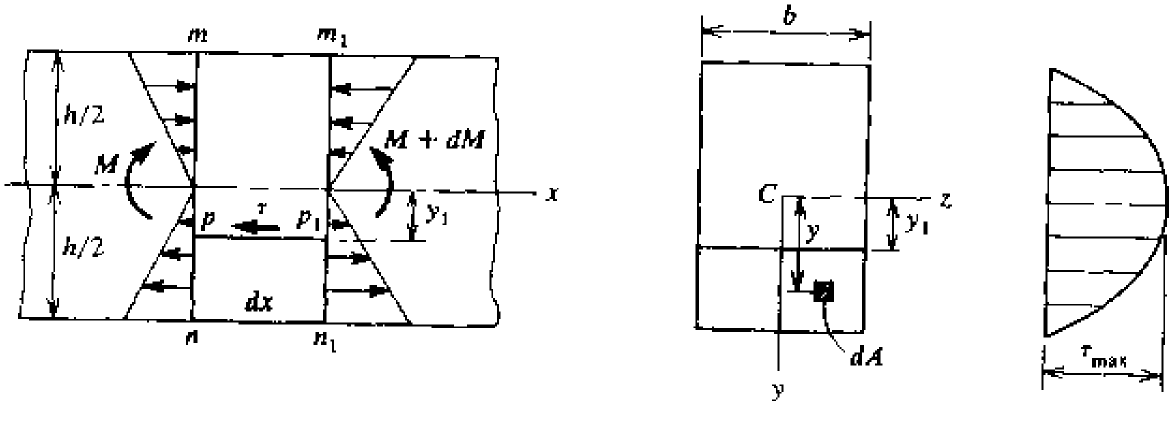


圖 5・11

那早已說明過的，在橫截面內任一點的垂直剪應力 τ 在數值上是等於同一點上的水平剪應力。後者可從切自樑內相距 dx 的兩臨近橫截面 mn 及 m_1n_1 的一個元體平衡條件計算得到。該元體的底面為樑之下層面且無應力。其上層面與中性面平行，距該面為一可變的距離 y_1。存在於樑內同



(a)　(b)　(c)

圖 5．12　矩形截面樑內之剪應力

高度的水平剪應力 τ，就影響到該元體。元體兩端受由彎力矩所產生的正交彎曲應力 σ_x 而起了作用。又，兩端面上有垂直剪應力，但並不在水平方向（x 方向），故不計入元體的平衡方程式中，故未顯示於圖 5－12a 內。

假如該兩個橫截面 mn 及 m_1n_1 的彎力矩相等，亦即假如該樑在純彎曲狀態下，np 及 n_1p_1 邊上的正交應力亦將相等。因此，該元體將在平衡狀態下剪應力 τ 必等於零。

在變動力矩之更普遍的情況，我們以 M 及 $M+dM$ 各別表示在橫截面 mn 及 m_1n_1 的力矩。作用於元體左端面積 dA 上的一個正交力將為（見方程式 5－10）

$$\sigma_x\, dA = \frac{My}{I}\, dA$$

佈滿在 pn 面上的全部元體力之和將為

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I}\, dA \tag{a}$$

同樣，作用於右面 p_1n_1 上的正交力之和爲

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{(M + dM)y}{I} dA \tag{b}$$

作用於元體上層面 pp_1 上的水平剪力爲

$$\tau b\, dx \tag{c}$$

由(a)、(b)及(c)式所得諸力必定在平衡狀態中；故得

$$\tau b\, dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I} dA$$

由此得

$$\tau = \frac{dM}{dx}\left(\frac{1}{Ib}\right)\int_{y_1}^{h/2} y\, dA$$

或，用方程式（４－２）

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_1}^{h/2} y\, dA \tag{5-17}$$

此方程式的積分，得如横截面（圖５－１２b）陰影部份對中性軸 z 的第一力矩（first moment）。換言之，該積分是在求剪應力 τ 對任意高度 y_1 面層處的横截面積的第一力矩。（當 y_1 自中性軸向上量時，該積分將爲所求剪應力的那層高度以上面積的第一力矩）。我們以Q表示這第一力矩，可將（５－１７)式寫成下式

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \tag{5-18}$$

我們要推定 τ 如何隨中性軸距 y_1 而變，因爲 V、I 及 b 皆爲常數，現在必須先審查變量Q隨 y_1 變化的情況。

取圖５－１２b 所示的矩形横截面，其陰影面積的Q爲

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) \tag{d}$$

上項結果，係由陰影面積乘其重心至 z 軸距離而得。由（５－１７）方程式內的積分式加以完成即可。現將(d)式代入（５－１８）方程式，得

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) \tag{5-19}$$

此結果表示剪應力隨 y_1 的變化，作拋物綫形，如圖 5－12c 所示。當 $y_1=\pm h/2$ 時，剪應力等於零，而在中性軸上剪應力爲最大（$y_1=0$）

$$\tau_{\max}=\frac{Vh^2}{8I}=\frac{3V}{2A} \tag{5-20}$$

此處是 $A=bh$ 爲橫截面面積。如此，最大剪應力（水平的或垂直的）比平均剪應力 V/A 大 50%。*

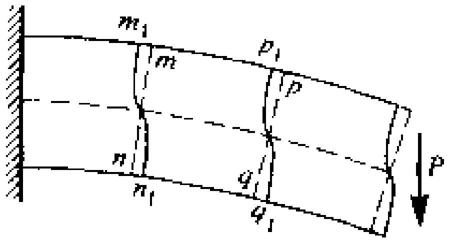


圖 5・13　由於剪力導致樑截面之扭曲

因爲剪應力 τ 從樑頂至樑底作拋物形變化，跟着剪應變 $\gamma=\tau/G$ 必定作同樣的變化。如此，截面原爲平面的乃變成歪曲。此種歪曲現象，可由一根樑在其兩側面繪有若干垂直綫（如圖 5－13 內之 mn 及 pq 綫）經彎曲後所表示者。所有垂直綫將不能保持直綫而變成曲綫，其最大應變將發生在中性面上。在 m_1、n_1、p_1 及 q_1 各點的剪應變爲零，而曲綫 m_1n_1 及 p_1q_1 均保持正交於彎曲後的桿件上下兩平面。在中性面，曲綫 m_1n_1 及 p_1q_1 的切綫與正交截面 mn 及 pq 間的夾角等於剪應變 $\gamma=\tau_{\max}/G$。祇要剪力 V 在樑上保持不變，則全部橫截面的扭曲皆爲同樣。故 $m_1m=p_1p$ 及 $nn_1=qq_1$。如此，由彎力矩所產生的縱纖維伸長與縮短，不受剪應變的影響，而正交剪應力的分佈，一如其在純彎曲的情形。

本問題的更精密研究，說明由于剪應變而生的橫截面扭曲在實質上，即使一分佈載重作用於樑上而剪力沿樑連續變化，也不致影響到縱向應變。對於集中載重，在載重附近的應力分佈更爲複雜，但此類不規則只限於局部，並不影響到全樑應力的分佈。如此，在非均勻彎曲的情況，頗有理由採用由純彎曲（5－10）式導得的撓曲公式。

工字樑之剪應力

---

* 上面所述的剪應力分析，應歸功於 D. J. Jourawski 氏（見參考書 5.7）

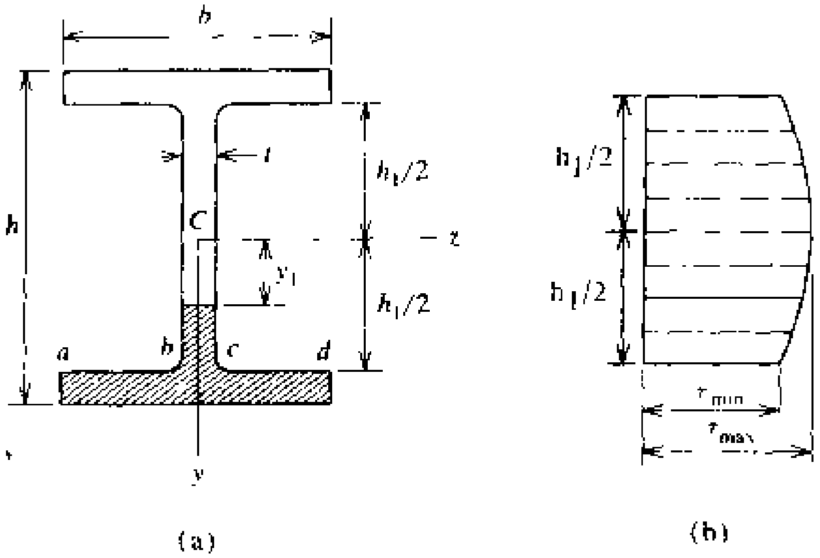


圖 5 • 14　在工字樑腹鈑內之剪應力

在考慮寬翼緣或工字樑腹鈑內剪應力的分佈時，所作的假定與矩形橫截面樑所作者相同：卽剪應力 τ 平行於 y 軸，並平均分佈於腹鈑全厚度 t 上，然後方程式（5－18）復可用來計算剪應力。茲就距中性軸爲 y_1 距的某一點，我們得知橫截面陰影部份對中性軸的第一力矩爲

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2}\right) + t\left(\frac{h_1}{2} - y_1\right)\left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2}\right)$$

由此得

$$Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right) + \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2\right)$$

所以，樑腹鈑中的剪應力 τ 爲

$$\tau = \frac{V}{It}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right) + \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2\right)\right] \tag{5-21}$$

我們由該方程式得知，τ 依腹鈑的全高依拋物線形變化，如圖 5－14b 所示。最大剪應力發生在中性軸上，如將 $y_1 = 0$ 代入方程式（5－21）卽得其應力。腹鈑中的最小剪應力，可將 $y_1 = \pm h_1/2$ 代入同式卽得。由此可得

$$\tau_{max} = \frac{V}{It}\left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} + \frac{th_1^2}{8}\right) \qquad \tau_{min} = \frac{V}{It}\left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8}\right) \tag{e}$$

通常，腹鈑厚度 t 要比 b 小得多，如此則 τ_{max}及 τ_{min}無太大區別，而腹鈑橫截面上剪應力的分佈幾近乎均勻。祇要單獨用腹鈑的橫截面積 h_1t 去除總剪力 V，卽得 τ_{max}的最近似值。從這一事實，當然可以推定分佈於腹鈑橫截面內的剪應力產生一幾等於 V 的總力。顯示腹鈑將負荷全部剪力，而上下翼緣祇負荷其中的一小部份。

在考慮翼緣內剪應力的分佈時，就不可假定橫過翼緣寬度 b 的剪應力爲常數。例如，我們知道 $y_1 = h_1/2$ 時，自由面 ab 及 cd（圖5－14a）上之剪應力等於零，而在接合點 bc 處的應力值用方程式 e 計算如上。此項觀察顯示在腹鈑與翼緣之接合點，剪應力的分佈係遵循一複雜的定律，用初級分析法尚不能估算。爲求減少在 b 及 c 點的應力集中，採用如圖所示的墳角（ fillets ）補救之。關於工字樑內剪應力分佈更多的討論，將在以後 8.4 節中提出。

【例題】1　負荷兩個集中載重 P（圖5－1a）之簡支樑，其橫截面的寬度 $b = 100$mm，高度 $h = 150$mm。自樑端至其中一個載重的距離 a 爲 450mm。假如該樑爲木製，$\sigma_w = 12\text{N/mm}^2$ 及 $\tau_w = 1.5\text{N/mm}^2$ 求 P 的容許値。

該樑的最大彎力矩 M 及最小剪力 V 爲

$$M = Pa \qquad V = P$$

又截面模數 S 及截面面積 A 爲

$$S = \frac{bh^2}{6} \qquad A = bh$$

現由方程式（5－12）及（5－20）得

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{6Pa}{bh^2} \qquad \tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3P}{2bh}$$

故載重 P 的極限値爲

$$P = \frac{\sigma_w bh^2}{6a} \quad \text{與} \quad P = \frac{2\tau_w bh}{3}$$

將諸值代入上列兩式，得

$$P = 10\,\text{kN} \quad \text{與} \quad P = 15\,\text{kN}$$

因彎力矩支配設計；故容許載重是 $P = 10$kN。

【例題】2　如圖5－15 中所示T型橫截面樑之 $b = 100$mm，$t =$

25mm，$h=200$mm，$h_1=176$mm 及 $V=45$kN，求腹鈑中所起的最大剪應力。

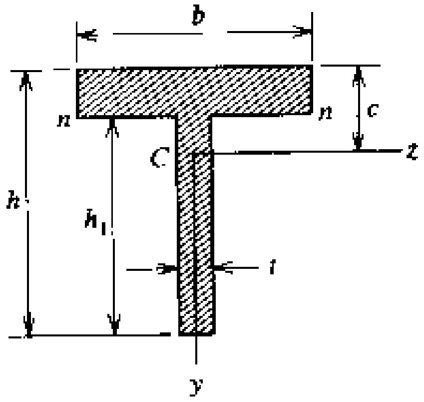


圖 5・15 例題 2

求至橫截面重心的距離 c 爲

$$c=\frac{(76)(24)(12)+(200)(24)(100)}{(76)(24)+(200)(24)}=75.8\text{ mm}$$

橫截面對中性軸的慣性力矩，可先求對 nn 軸的慣性力矩，然後用平行軸理論（見附錄 A）求之，該計算法如下

$$I=\frac{(100)(24)^3}{3}+\frac{(24)(176)^3}{3}-(6624)(51.8)^2=26.3\times10^6\text{ mm}^4$$

最大剪應力發生在中性軸上，先求中性軸下面積的第一力矩Q爲

$$Q=\frac{(24)(124.2)^2}{2}=185\times10^3\text{ mm}^3$$

將所得的Q與 I 及已知之 V 與 t 諸值代入方程式（5－18），得

$$\tau=\frac{VQ}{It}=\frac{(45\times10^3)(185\times10^3)}{(26.3\times10^6)(24)}=13.2\text{ N/mm}^2$$

此爲最大的剪應力。

5・4 圓形截面樑之剪應力

當樑之截面爲圓形時（圖 5－16a）不再有任何根據，假定所有剪應力皆與 y 軸成平行。事實上，我們很容易證明，在截面上 m 點(圖5-16a)的剪應力必與該邊相切。讓我們考慮一無限小的元體 $abcdfg$（圖 5－16b），爲一矩形平行六面體，其中一面 $adgf$ 在該樑的表面上，而另一面 $abcd$ 則在截面的平面內。假如作用於元體 $abcd$ 邊上的剪應力，有

如 τ_1 所示的方向。該剪應力 τ_1 能被分解成兩個分力，τ_r 在半徑的方向，τ_t 在邊的切線方向。（在考慮元體平衡時），我們早已證明過，假如一個剪力 τ 作用在元體的一面，則必有一數值相等的剪應力作用於該面成垂直的面上。將此觀念應用於圖 5 － 16b 所示的元體，我們可作一結論。假如一個剪應力 τ_r 在 $abcd$ 面上的半徑方向起作用，則在元體的 $adgf$ 邊上將會有一相等的剪應力 τ_r 發生。但因該樑的外表面上並無任何應力，則剪應力 τ_1 的半徑方向之分力 τ_r 當然必須等於零。所以，應力 τ_t 係作用於樑截面周邊的切線方向。

當我們研究各剪應力沿圓截面上距中性軸（圖 5 － 16a）y_1 距離的一根 pp 弦作用時，現在可應用此一結論。該弦兩端的各個剪應力為 τ，如圖所說明者，必定與圓截面的周邊相切。在弦中點 n 的剪應力，因對稱關係，非與 y 軸平行不可。當然在 p 點和 n 點剪應力的方向將相交於 y 軸上的某點。現在假定在 pp 綫上的任何其他一點的剪應力，亦被導向此同一點上，我們即將完全明白確定各剪應力的方向。

第二個假定，我們要把沿 pp 綫上一切點的剪應力的垂直分力令其相等。因為此一假定與矩形截面所用者完全相似，我們可利用方程式（5 － 18）計算此分剪應力。在此種情況下，b 將表示 pp 弦的長度。因剪應力與其垂直分力的方向現在均為已知，故截面上任何點剪應力的大小易於計算。

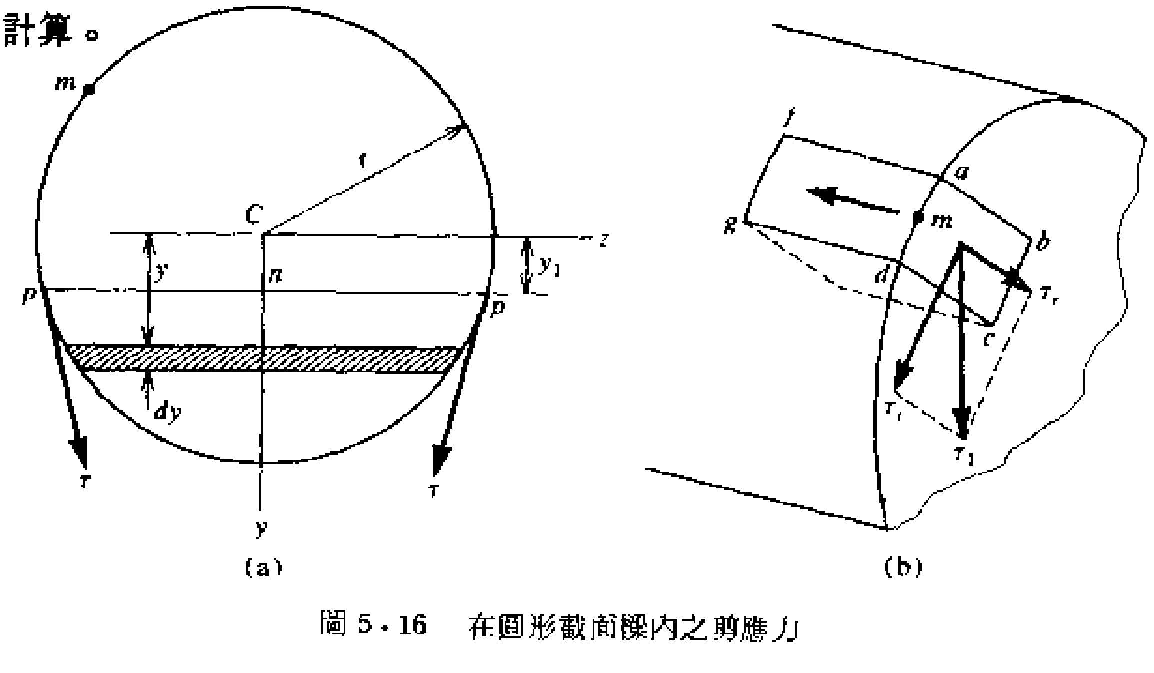


圖 5・16　在圓形截面樑內之剪應力

現在讓我們着手計算沿截面 pp 綫上各點的應剪力（圖 5 － 16a）。在應用方程式（5 － 18）計算此類應力的垂直分力 τ_y 時，我們必須求

出 pp 綫下弓形面積對 z 軸的第一力矩Q。圖中陰影綫所示的元體面積，其長度爲 $2\sqrt{r^2-y^2}$ 其寬度爲 dy，其中 r 爲圓截面之半徑，面積爲 $dA=2\sqrt{r^2-y^2}dy$。此細長條面積對中性軸的第一力矩爲 ydA 而全部弓形面積的全部第一力矩爲

$$Q=\int_{y_1}^{r}2y\sqrt{r^2-y^2}\,dy=\frac{2}{3}(r^2-y_1^2)^{3/2}$$

將此結果代入方程式（5－18），並把 $2\sqrt{r^2-y_1^2}$ 當作 b，則得剪應力的垂直分力

$$\tau_y=\frac{V(r^2-y_1^2)}{3I} \tag{a}$$

而周界上所有 p 點的總剪應力爲

$$\tau=\frac{\tau_y r}{\sqrt{r^2-y_1^2}}=\frac{Vr\sqrt{r^2-y_1^2}}{3I} \tag{5-22}$$

由該方程式得知，當 $y_1=0$ 可得 τ 的最大值。亦即在截面的中性軸上，其剪應力爲最大。將 $I=\pi r^4/4$代入，得

$$\tau_{max}=\frac{4V}{3\pi r^2}=\frac{4V}{3A} \tag{5-23}$$

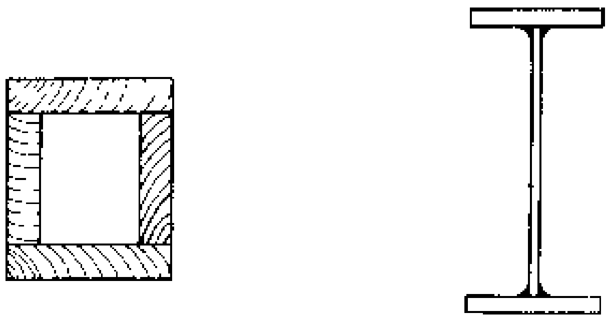
此一方程式表示，對一個圓截面，其最大剪應力，比用截面除剪力所得的平均值大三分之一。在中性軸上的剪應力 τ 與 y 軸平行，其大小在全截面上爲不變，因此，各剪力可由方程式（5－18） 直接計算出來。

以上所述的近似理論，對於計算實心圓樑提供了良好的精確度，與嚴密的理論相比，其誤差僅爲一小的百分數。用彈性理論以求精密的結果，見參考書 5.9。

倘若樑爲一薄壁而空心的圓截面，則我們可精確地假定，在中性軸的剪應力，均勻分佈於管壁的厚度上，所以，方程式（5－18） 可用來求最大的剪應力。

5.5 構成樑

在許多結構形式中，構成或合製之樑（built-up or fabricated beam），常受人樂用。此類樑的兩種例子，如圖 5－17 所示。第一個例子是由四塊木板用釘、螺栓、或膠、結合在一起，構成一個空心，正方形



(a) (b)

圖 5 - 17 構成樑(a)木箱樑(b)鋼大樑

的箱型樑；第二個例子是由三塊鋼鈑電焊在一起而形成一根大樑。構成樑的應力計算，是基於假定各部份均被堅固地連接着，當作用時一如整體的樑。其計算於是包含了兩方面：(a)使樑本身一如實心樑計算，及(b)設計那些連接物（釘子、銲接、螺栓等）以便確實使樑的作用一如實心樑。當設計樑本身時，可採樑之常用公式，酌留任何必須的螺栓孔位，使用減小後的截面面積計算之。那些連接物的設計，則基於構成樑的各部份間所傳遞總水平剪力。

在一根樑的任何兩部份間傳遞的水平剪力的簡單公式，可再參考5.3節圖5－12 得之。方程式（5－18） 的誘導，曾假定剪應力 τ 係均勻分佈於樑寬 b 內。在一般情形下，這種假定將不夠確當。不過，我們仍能計算作用在樑內一個元體上面的總水平剪力，如圖5－12a 內的元體 pp_1n_1n 。此總力等於 fdx ，此處 f 是沿該樑軸綫每單位距離的總剪力（作用於樑的全寬）。該 f 量被稱爲剪力流（ shear flow ），對矩形截面之樑而言，剪力流等於 τb 。作用於圖5－12 a 內元體上面之力 fdx ，被作用於元體兩端面的正交應力的合力之差所平衡。因此，倘照方程式（5－18） 的誘導法同樣情況着手，則將達成下列的剪力流方程式

$$f = \frac{VQ}{I} \tag{5-24}$$

此方程式在設計樑的各部份接頭時甚爲有用。因該式提供了傳導在各部份間的水平剪力。茲用一例題說明方程式（5－24） 的用途。

【例題】 一箱型樑（圖5－18） 係由幾塊木板（25mm×150mm）用螺絲釘連接而成。作用於截面的剪力V爲4kN，每個螺絲釘的剪力容許載重爲$F=1.10$kN。求螺釘所需的間矩S。

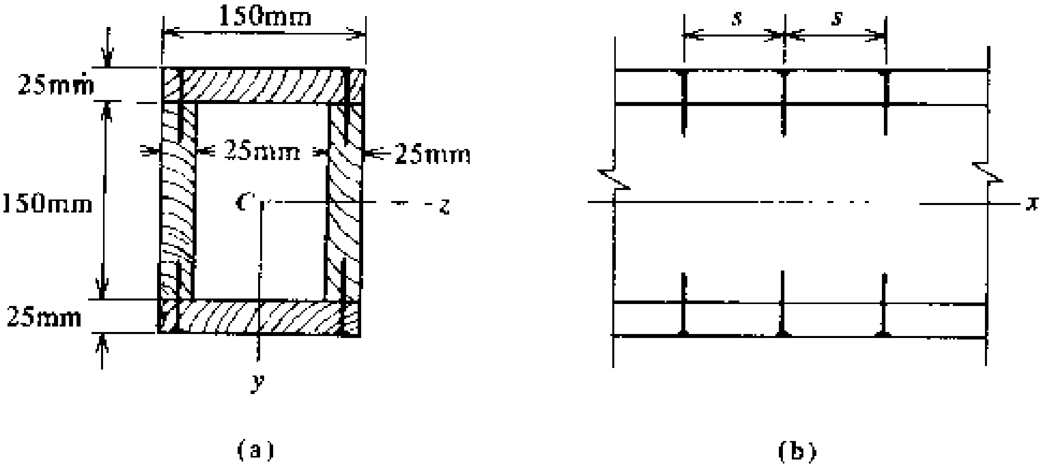


圖5．18　數值例題

在一塊水平板與兩塊垂直板間傳送的剪力流，能自方程式（5－24）求得。方程式中的Q是發生剪力截面以外的截面面積的第一力矩。即上邊板面積對中性軸所取的第一力矩；因此

$$Q=150(25)(87.5)=328\times10^3\ \text{mm}^3$$

全部截面對中性軸的慣性矩爲

$$I=\frac{150(200)^3}{12}-\frac{100(150)^3}{12}=71.88\times10^6\ \text{mm}^4$$

代入方程式（5－24），求得剪力流爲

$$f=\frac{4(328\times10^3)}{71.88\times10^6}=18.3\ \text{N/mm}$$

此每mm長的力必須由螺釘支承。因有兩行螺釘，每邊一行，每mm長的螺釘總載重量爲$2F/s$，此量必須等於剪力流。所以，我們得$2F/s=f$，或

$$s=\frac{2F}{f}=\frac{2(1.10)}{18.3\times10^{-3}}=120\ \text{mm}$$

使用此間距，或用一較少的，用螺釘釘上，可得安全的設計。

5.6 樑內主應力

使用方程式 $\sigma = My/I$ 及 $\tau = VQ/Ib$ ，我們就能確定作用於樑截面內任何一點的正交應力及剪應力。正交應力在樑的外緣最大，而在中性軸爲零；剪應力在外緣爲零，而在中性軸通常達到最大值。我們要對一根樑內各種應力有一更爲完全的分析，就要考慮這些剪力與正交應力的聯合效應。特別在使用第二章內所描述的分析技巧，使我們能確定在樑內任一位置的主應力及最大剪應力。

爲求瞭解在一根樑內各主應力的大小與方向如何在變化，我們先開始檢視矩形截面樑內的應力狀況（圖 5 － 19a）。在截面內選擇五個點，如圖中表明的 A、B、C、D 與 E 點。A 點與 E 點各在樑面上邊與下邊上。C 點在樑高中點。倘在截面上的彎力矩 M 及剪力 V 爲已知，則在各點上的應力皆能計算出來。這些應力可繪在由樑上各相當點切出來的小元體上（見圖 5 － 19b）。欲求主應力及最大剪應力，我們採用平面應力方程式（見 2.5 節）或用摩爾氏圓（2.6 節）皆可。各點主應力方向約略示於圖 5 － 9c 內，而最大剪應力則示於圖 5 － 19d 內。

從圖 5 － 19c 的簡圖內，我們能看出主應力的變化。在樑頂，主應力作用在水平方向。當我們移近中性軸時，主壓應力與水平成傾斜，而在中性軸（C 點）時，壓應力與水平成 $45°$ 的方向作用着。在 D 點時，主壓應力幾乎成垂直方向，當我們接近樑底時，主壓應力方向亦趨於垂直，此壓應力的大小繼續從樑頂至樑底在變化；到最後一點變爲零。在矩形樑內該應力的最大數值常發生在 A 點。雖然亦有可能發生在樑內另一點如 B 點者。相似的說明應用於主拉應力時，該應力，在我們從 A 點觀察到 E 點，其大小與方向兩方面皆有變化。

由研究樑在許多截面上的應力，我們將獲得一完整的圖示，表示主應力如何在變化。由此類數據，可能作出兩個系列的正交曲線，稱爲“應力軌跡圖（ stress trajectories ）”。該圖可提供全樑主應力的方向。圖 5 － 20a 表示一矩形截面，末端有一集中載重之懸臂樑的應力軌跡圖。圖中實線係用來表示主拉應力，虛線表示主壓應力。該兩組曲線作互相垂

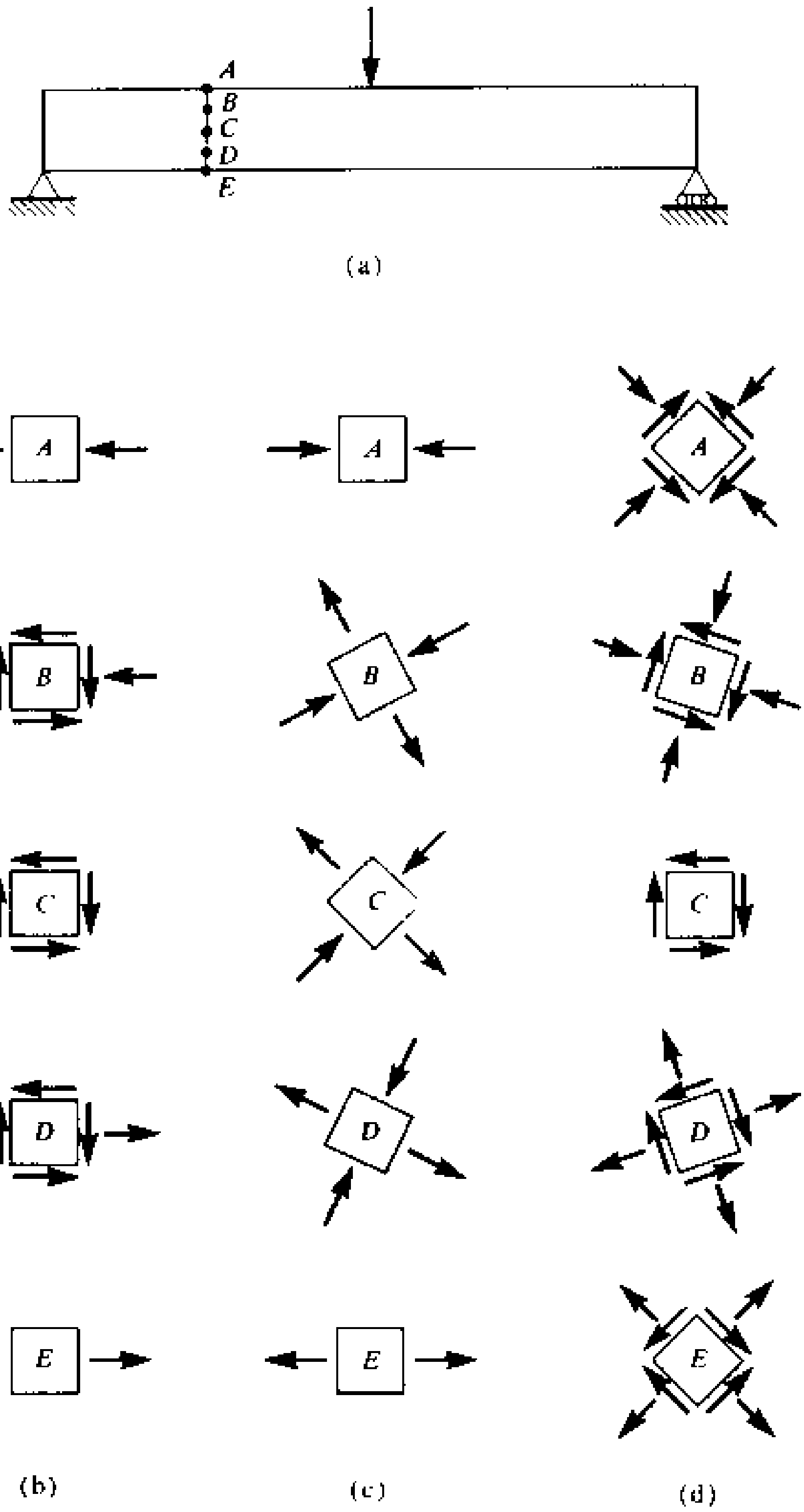


圖 5．19　矩形截面樑內之應力：(b)在 A、B、C、D 及 E 點之正交應力及剪應力；(c)主應力；及(d)最大剪應力

直相交。一切曲線與中性軸相交成 45° 角。在樑之頂面與底面，該處剪應力皆爲零,此應力軌跡圖，既有水平切線，又有垂直切線。一個矩形截面簡支樑，受均佈載重，其應力軌跡圖如圖 5－20b 所示。*

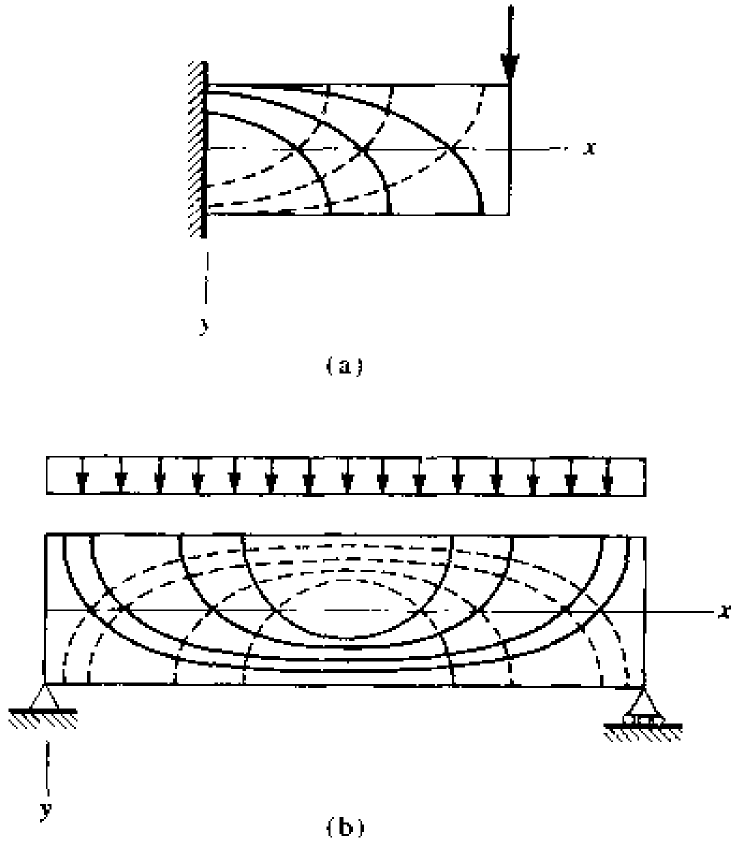


圖 5.20　主應力之軌跡圖，(a)懸臂樑及(b)簡支樑
（實線代表主拉應力，虛線代表主應力）

另一種曲線，是由樑內的應力關係畫得。通稱爲“應力等值線（stress contour）”。這種曲線係由許多主應力相等之點連接而成。爲了舉例說明，繪於圖 5－21 內者是一個矩形截面懸臂樑具代表性的應力等值線（只畫主拉應力線）。

具有其他形式截面之樑，亦可照矩形截面樑同樣方法作主應力的分析。雖然最大應力通常發生在樑的外緣，但具有寬翼緣樑或工字樑內的最大主應力可能發生在與翼緣相連的腹鈑內。最大剪應力通常發生在中性軸，但在某種極端的載重條件下，亦可發生在中性軸之上面或下面。矩形樑或

*應力軌跡圖首由“考爾門” Culmann 氏繪出（1866）（見參考書 5－10）。

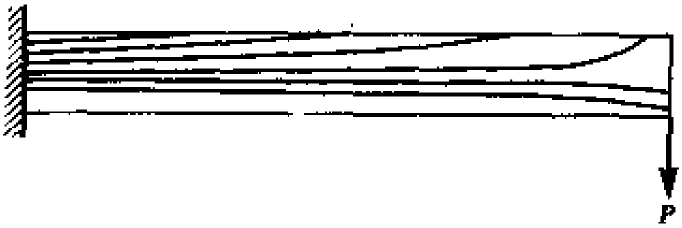


圖 5 · 21　懸臂樑之典型的應力等值線

寬翼緣樑的最大主應力與最大剪力位置的決定。見參考書 5.11 。

當分析樑之最大應力時，要始終牢記着，在靠近樑的支點，和靠近載重的作用點，以及靠近樑截面突然變化之處（如墳角，孔洞等），將有局部化的效應，會產生以常用的樑公式不能預計的高應力。這種局部化的應力稱爲“應力集中”（ stress concentrations ）。

5 · 7 非等截面樑內之應力

前節內所討論之樑，皆假定爲等截面的，並在整個樑的長度內，其截面都是不變的。不過，由等截面樑而導出的應力公式，也可使用於非等截面樑，而得良好結果。但截面大小的變化是漸進的而非突然的。例如，在一根具有些微漸縮桿件內，由于彎曲而產生的正交應力（見圖 5 − 22a）可用公式 $\sigma = My/I$ 計算。倘若漸縮角較小，如與以後一些精確結果相比較，算得的結果將會精確到百分之幾以內。

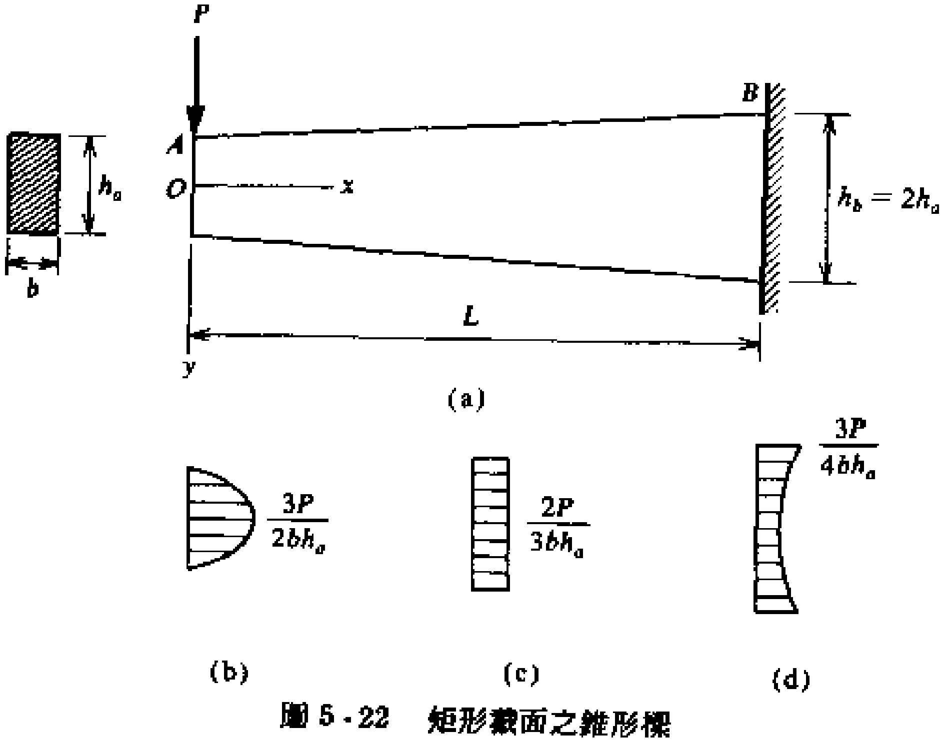


圖 5 · 22　矩形截面之錐形樑

不過，就剪應力而言，由等截面桿件導出的公式 $\tau = VQ/Ib$ 不再適用了。我們必須另行導出一個與樑高有變化效應相配合的新關係。爲此目的，讓我們考慮如圖5－23所示，從非等截面樑中切出來的一小段長度

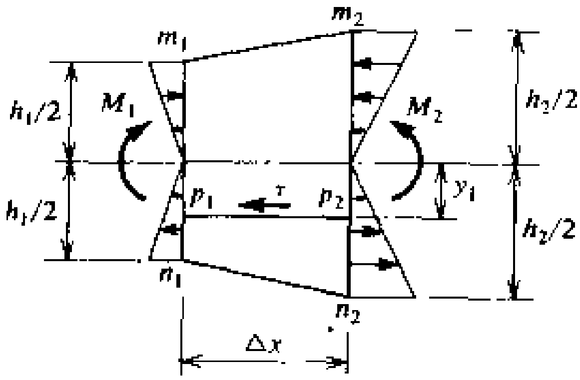


圖5-23　長度 Δx 之元體

Δx 的元體。在該元體左面 m_1n_1 的彎力矩爲 M_1，在右面 m_2n_2 的爲 M_2。該樑各面相當的高度各以 h_1 與 h_2 表示，而 y_1 爲中性軸至剪應力 τ 作用點間的距離（與等截面樑之圖5－12a 相比較）。

剪應力 τ 係從元體 $n_1p_1p_2n_2$ 的靜力平衡方程式得來。在元體的左右兩邊，各由正交彎應力而產生之力爲 M_1Q_1/I_1 及 M_2Q_2/I_2［見5.3節方程式(a)］。在這些式子內，I_1 及 I_2 爲兩截面的慣性矩，而 Q_1 及 Q_2 分別爲元體的 p_1n_1 及 p_2n_2 兩邊面積對中性軸的第一力矩。在元體頂面 p_1p_2 上的總力爲 $\tau b\Delta x$，此處 b 爲距中性軸 y_1 距離處的樑寬。因此，靜力平衡方程式變爲

$$\tau b\,\Delta x = \frac{M_2Q_2}{I_2} - \frac{M_1Q_1}{I_1} \tag{5-25}$$

對任何特殊之樑而言，將各數值代入該方程式即可用以求得剪應力的近似值。其程序如下：挑選需求剪應力的樑截面，然後在離開一小段距離 Δx 處，試取一臨近截面，在各個截面求取下列各項：①彎力矩 M；②在需求剪應力的截面以外的截面面積的第一力矩 Q（即在樑的外邊與求取剪應力 τ 的截面兩者之間的面積的第一力矩）；及③截面之慣性矩。代入這些數值方程式（5－25）內並求得 τ。假定的距離 Δx 愈小，其結果就愈精確。惟 Δx 太小，數字精度將受損失。因爲在方程式（5－25）內要

取兩項的差，由於 Δx 太小此兩項幾乎相等。方程式（5－25）係非常通用並且能用於許多實際情況求取截面有變化的樑之剪應力。

在矩形截面（不變寬度 b 與可變高度 h）樑的特別情況內，方程式（5－25）使 Δx 約等於零，可以轉換成一更精確的方程式。欲達成此結果，我們必須在截面，1與2求得 Q 與 I 值：

$$Q_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2\right) \qquad Q_2 = \frac{b}{2}\left(\frac{h_2^2}{4} - y_1^2\right)$$

$$I_1 = \frac{bh_1^3}{12} \qquad I_2 = \frac{bh_2^3}{12}$$

現在設 $h_2 = h_1 + \Delta h$，此處 Δh 是從截面 1 進至截面 2 時 h 的增值，我們從上式得

$$Q_2 = Q_1 + \frac{bh_1\,\Delta h}{4} \qquad I_2 = I_1 + \frac{bh_1^2\,\Delta h}{4}$$

在求這些式子時，包含 Δh 的平方與立方諸項，因爲比保留的各項小得多。習慣上可以棄去。現在亦須注意 $M_2 = M_1 + \Delta M$，我們將 Q_2、I_2 與 M_2 各式代入方程式（5－25）得

$$\tau b\,\Delta x = \frac{(M_1 + \Delta M)\left(Q_1 + \dfrac{bh_1\,\Delta h}{4}\right)}{I_1 + \dfrac{bh_1^2\,\Delta h}{4}} - \frac{M_1Q_1}{I_1}$$

爲了化簡上式，我們可用第二項的分母乘各項並展開之得

$$\tau bI_1\,\Delta x + \frac{\tau b^2h_1^2}{4}\Delta h\,\Delta x = \frac{M_1bh_1}{4}\Delta h + Q_1\,\Delta M + \frac{bh_1}{4}\Delta h\,\Delta M - \frac{M_1Q_1}{4I_1}bh_1^2\,\Delta h$$

在上式內，凡包含兩個小量之積的各項，皆可棄去。再用 Δx 去除。當 Δx 變成小而又小而達其極限時，$\Delta h/\Delta x$ 項將變爲 dh/dx，而 $\Delta M/\Delta x$ 項則變爲等於剪力 V 的 $\dfrac{dM}{dx}$。因此，上列方程式變爲

$$\tau bI_1 = \frac{M_1bh_1}{4}\frac{dh}{dx} + Q_1V - \frac{M_1Q_1bh_1^2}{4I_1}\frac{dh}{dx}$$

最後一步，我們以 bI_1 除各項，而且棄去下角不再需要的注脚數字。因此，在一個非等截面的矩形截面樑內，剪應力 τ 的方程式最後形式成爲

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I}\right)\frac{dh}{dx} \qquad \text{(5-26)}$$

此方程式對於一個寬度無變化而高度有變化的樑爲有效。樑高的變化倘若是逐漸的，亦可任意改變的。我們看出來截面上的剪應力不但與剪力有關，而且與彎力矩 M 與 h 對 x 的變率亦有關。

讓我們將示於圖 5－22a 的矩形截面懸臂樑剪應力的分佈，當作一個特例加以研究。該樑兩端的高爲 h_a，及 $h_b = 2h_a$，兩端間的高度是漸變的。所以，該量 dh/dx 爲一常數並等於

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_b - h_a}{L} = \frac{h_a}{L}$$

在左端 A 彎力矩爲零，而方程式（5－26）提供了在等截面樑內同樣的剪應力分佈情形（見方程式 5－18）。此種分佈情形作圖表示如圖 5－22b。其最大剪應力發生在中性軸，並等於 $1.5P/bh_a$。

在樑之中點（$x = L/2$），得下列各值

$$V = P \qquad h = 1.5h_a \qquad Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) \qquad M = \frac{PL}{2} \qquad I = \frac{bh^3}{12}$$

代入方程式（5－26）得

$$\tau = \frac{2P}{3bh_a}$$

上式的圖示如圖 5－22c。在此種特別情形下，我們所得的剪應力均勻分佈在樑的全高，其結果頗饒趣味。介於樑左端 A 與其中點間，剪應力的分佈，介於從圖 5－22b 的拋物線變化到圖示於 5－22c 的平均分佈。

在樑右端 B（$x = L$），得 $V = P$，$h = h_b = 2h_a$，及 $M = PL$。代入方程式（5－26）得

$$\tau = \frac{3P}{8bh_a}\left(1 + \frac{y_1^2}{h_a^2}\right)$$

上式的圖表如圖 5－22d。注意，在此截面上，其最大剪應力爲 $3P/4bh_a$，發生在樑的外緣。最小應力，等於最大應力之半，發生在 $y_1 = 0$ 的中性軸上。

一邊爲水平一邊爲漸縮的矩形截面樑的剪應力，可用與上面所描述的兩邊皆爲漸縮截面之樑相同的理論求得。在參考資料 5－12 中有此類討論可以參考。

在等截面樑內的最大正交應力，總是發生在最大彎力矩的截面上。不過，當樑爲非等截面時，情況可能並非如此。說明此可能性的一個例證，

如一實心圓截面錐形懸臂樑（見圖5－24），假定 $d_b/d_a = 2$，則距左端 x 距離，桿件的直徑 d 爲

$$d = d_a + (d_b - d_a)\frac{x}{L} = d_a\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

該相當位置的截面模數爲

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi}{32} d_a^3\left(1 + \frac{x}{L}\right)^3$$

所以，最大正交剪應力 σ 爲

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{Px}{S} = \frac{32Px}{\pi d_a^3\left(1 + \frac{x}{L}\right)^3}$$

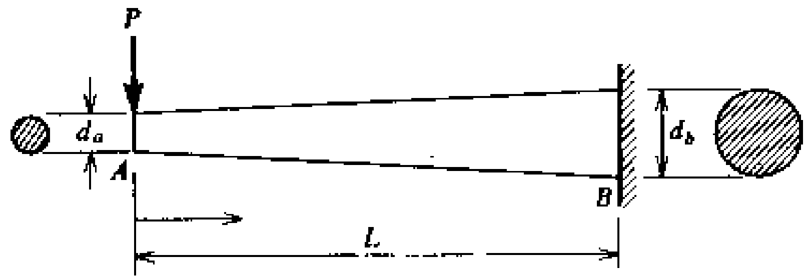


圖 2．24　圓截面的錐形樑

取上式的導數 $d\sigma/dx$ 並使等於零，我們便能求得當 σ 爲最大值時的 x 值。結果爲 $x = L/2$，而相當的最大應力爲

$$\sigma_{max} = \frac{128PL}{27\pi d_a^3} = 4.741\frac{PL}{\pi d_a^3}$$

在發生最大彎力矩的截面（支承點 B）上其應力爲

$$\sigma_b = \frac{4PL}{\pi d_a^3}$$

因此，在此種特例內，最大應力發生在樑長的中點，並且比在彎力矩達其最大值的固定端應力大百分之十九。如樑的縮度減小，則最大正交應力的截面將移向固定支承一側。對於具有縮度很小的樑，最大應力發生在 B 端，正和發生在等截面懸臂樑一樣。

我們嘗試在樑的所有截面，保持最大應力不變以求在一根樑內使用最小量的材料，但可用不同的截面。在理想情況下，每個截面的最大應力皆等於容許應力。我們將稱為"十足應力設計"（ fully stress design ）。此為一般通用的結構最小重量設計的規範。當然，因為在該樑的製造以及載重等原因，與設計所假定者不同的實際問題，理想的情況甚少達成。為保持最大應力不變（儘量接近實際情況）而設計的有變化尺寸，其中最熟悉的結構範例為汽車的鈑簧，與鈑樑橋的不等長蓋鈑鋼樑。

在末端負有集中載重的懸臂樑（圖 5 － 25） 可作一個十足應力設計

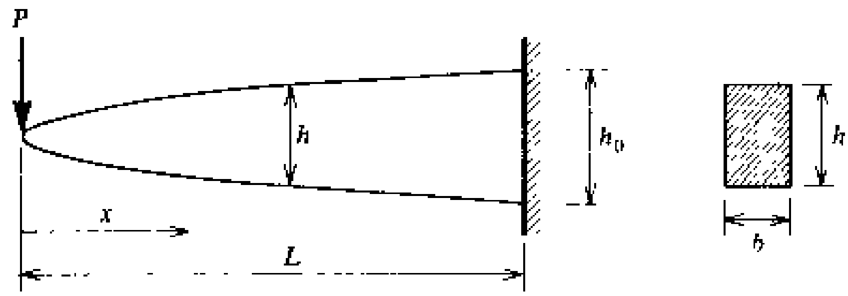


圖 5 · 25 具有固定不變的最大正交應力之樑（剪應力略去不計）

的簡單例子。該樑的截面被假定寬度 b 為不變而高度 h 為改變的矩形樑。要希望能保持不變的最大正交應力 σ_w。所以，下列方程式必須對每一截面均能適用

$$\sigma_w = \frac{M}{S} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6Px}{bh^2}$$

所以，該樑在支承處之高 h_0 為

$$h_0 = \sqrt{\frac{6PL}{b\sigma_w}}$$

任何其他截面之高為

$$h = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_w}} \quad \text{or} \quad h = h_0\sqrt{\frac{x}{L}}$$

最後的方程式表示樑的高度隨 x 作拋物線形的變化。因此，該樑所具一般的形狀如圖 5 － 25 所示。在載重端，截面面積為零，因為由于彎曲之故，只考慮正交應力。當然，剪應力亦同時存在，故樑的截面實際上必須具有充分的面積以傳遞剪力。

精確結果：

用彈性理論方法，可將矩形截面懸臂楔形樑內的應力求得。其截面

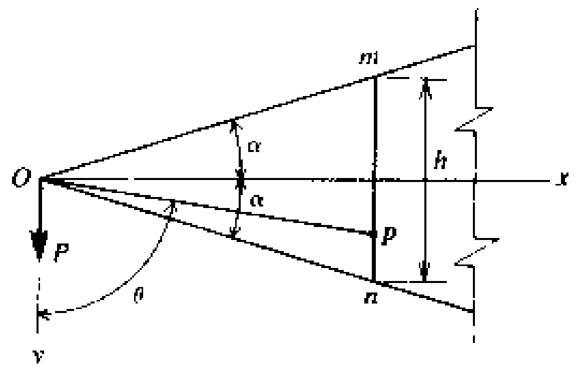


圖 5 . 26　矩形截面之懸臂形楔

mn 內任一點 *p* 的正交應力與剪力可由下列公式求得 *（見參考書 5 . 13）。

$$\sigma = -\frac{Pxy\sin^4\theta}{bx^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} \qquad \tau = \frac{Py^2\sin^4\theta}{bx^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} \qquad \text{(a)}$$

式內 x 與 y 爲 p 點的座標，θ 爲 Op 線與 y 軸間之夾角，b 爲楔形樑厚度（假定爲常數）。而 α 爲決定楔形縮度大小之角。將截面 *mn* 處的彎力矩看作 $M = Px$ ，且將在同一截面的楔樑高看作 $h = 2x\tan\alpha$ ，則上列方程式可被寫成更簡便的形式。又截面 *mn* 的慣性矩爲

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2bx^3\tan^3\alpha}{3}$$

將 M 、 h 及 I 式代入方程式(a)，得

$$\sigma = -\frac{My}{I}\,\frac{2\tan^3\alpha\sin^4\theta}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} \qquad (5\text{-}27)$$

$$\tau = \frac{P}{bh}\,\frac{8y^2\tan^3\alpha\sin^4\theta}{h^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} \qquad (5\text{-}28)$$

方程式（5 − 27） 的正交應力，在中性軸（ $\theta = \pi/2$ 、 $y = 0$ ）上等於零，在樑的外緣達到最大值。在樑的頂部，（ $y = -h/2$ ， $\theta = \alpha + \pi/2$ ），其應力爲

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2I}\,\frac{2\tan^3\alpha\cos^4\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} = \beta\frac{Mh}{2I} \qquad (5\text{-}29)$$

對於 α 角等於 0°，5°，10°，15°，及 20°時，因數 β 值，分別爲 1 ，1.00 ，0.970 ，0.947 與 0.906 。因此我們瞭解對於各種小的漸縮角而言，其應力的計算，依照精確理論與依照樑的公式 $\sigma = My/I$ 兩者之間，實無差異。

就剪應力而言，我們瞭解在中性軸（$y = 0$）上，式（5 − 28）提供 $\tau = 0$ ，最大應力係在外緣，在該處所起的最大應力爲

$$\tau_{max}=\frac{P}{bh}\frac{2\tan^3\alpha\cos^4\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\gamma\frac{P}{bh} \tag{5-30}$$

對於α角值等於0°、5°、10°、15°及20°時，因爲γ值分別等於3，3.00，2.91，2.84及2.72。因此，最大剪力將三倍於平均剪應力P/bh，並且發生在各外緣上。

假如我們將矩形樑（見方程式5－26）內求剪應力的近似理論，應用在圖5－26所示的楔形樑上，對截面mn上得

$$V=P \qquad Q=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right) \qquad I=\frac{bh^3}{12} \qquad M=Px \qquad \frac{dh}{dx}=\frac{h}{x}$$

將這些式子代入方程式（5－26）內，並注意$y_1=y$，得

$$\tau=\frac{12Py^2}{bh^3} \tag{b}$$

在中性軸上，該方程式提供$\tau=0$，與由方程式（5－28）計算的精確結果相一致。在外各邊緣，方程式(b)提供$\tau_{max}=3P/bh$，這與用方程式（5－30）計算小漸縮角的結果相符。因此，我們可作一結論。在非等截面樑內應用近似理論求剪應力，尚適合於設計目的。另一方面，公式$\tau=VQ/Ib$在應用於非等截面樑計算時，即會產生使人極易誤解的結果。

5.8 合成樑

凡由多於一種以上的材料組成之樑，稱爲合成樑（composite beam）。由兩種不同金屬組合並緊結在一起有如一根單樑［雙金屬樑（bimetallic beams）］作用的樑。鋼筋混凝土樑，以及夾心樑（sandwich beam）都是例子。我們可用5.1節內所述的彎曲理論分析這些樑。因樑的各截面當受純彎曲時仍爲平面，亦不論該樑是否爲一種材料所組成。我們由此種觀察而認爲合成樑從樑頂至樑底的應變變化係作直線形者（見方程式5－2）。作爲一個例證來看，假定兩種不同材料所構成的合成樑情況，其應變分佈圖如圖5－27b所示。該樑的截面圖如圖5－27a所示。起初，除非截面具有雙重對稱性，使中性軸在樑高之半，否則不能立知截面中性軸的位置。

作用於截面的正交應力，可由應變乘相當材料的彈性模數求得。在圖5－27例中，假定兩種材料在圖內標以1及2兩部，其模數各爲E_1及E_2。我們假定$E_2>E_1$，則得圖5－27c所示的應力綫圖。在距中性

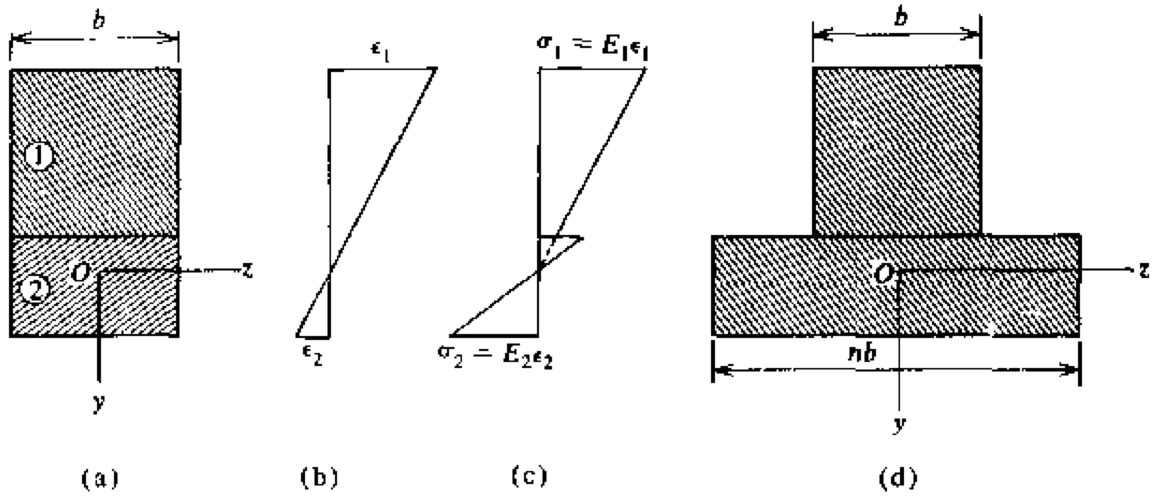


圖 5．27　兩種不同材料之樑：(a)截面，(b)應變變化，(c)應力變化，及(d)換算截面

軸任何距離 y 的正交應力 σ_x，可由下列方程式，分別求材料 1 及 2 的正交應力（與方程式 5 － 5 比較）

$$\sigma_{x1} = \kappa E_1 y \qquad \sigma_{x2} = \kappa E_2 y \tag{5-31}$$

中性軸的位置，可由作用於截面上的軸向合力爲零求出；所以

$$\int_1 \sigma_{x1}\, dA + \int_2 \sigma_{x2}\, dA = 0$$

在上式中，自然以第一個積分式爲求材料 1 截面面積上之值，而第二個積分式是求材料 2 截面面積上之值。我們將方程式（5 － 31） 中的 σ_{x1} 及 σ_{x2} 諸值代入前式，得

$$E_1 \int_1 y\, dA + E_2 \int_2 y\, dA = 0 \tag{5-32}$$

此方程式，可認爲係方程式（5 － 6 ）的一般形式，能用來定出圖 5 － 27 所示樑的中性軸位置。但對於由兩種以上材料所構成之樑，在方程式（5 － 32） 內，尙需另加相似的積分項。假如我們注意，這些積分式係代表各部截面面積對中性軸之第一力矩，則該方程式卽不難應用。

利用誘導方程式（5 － 7 ）的同一程序，可求得樑內彎力矩與應力間的關係

$$M = \int \sigma_x y\, dA = \int_1 \sigma_{x1} y\, dA + \int_2 \sigma_{x2} y\, dA$$
$$= \kappa E_1 \int_1 y^2\, dA + \kappa E_2 \int_2 y^2\, dA$$
$$= \kappa(E_1 I_1 + E_2 I_2) \tag{5-33}$$

此處 I_1 及 I_2 爲面積 1 及 2 分別對中性軸的慣性矩。要注意 $I = I_1 + I_2$，此處 I 爲整個截面面積的慣性矩。將方程式（5－31）及（5－33）合併，則得以彎力矩 M 爲函數的樑內諸應力

$$\sigma_{x1} = \frac{MyE_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \qquad \sigma_{x2} = \frac{MyE_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \tag{5-34a,b}$$

第一個方程式提供在材料 1 中諸應力，第二個方程式提供在材料 2 中諸應力。假如 $E_1 = E_2 = E$，則兩個方程式化簡成單獨一種材料的樑方程式 $\sigma_x = \frac{My}{I}$。下面的例題是說明一個合成樑的分析。

【例題】1　一根具有如圖 5－28 所示截面之樑，受 4kNm的正彎曲力矩。求該樑的兩種材料內之最大與最小應力。假定 $E_1 = 7\text{kN/mm}^2$，而 $E_2 = 140\text{kN/mm}^2$。

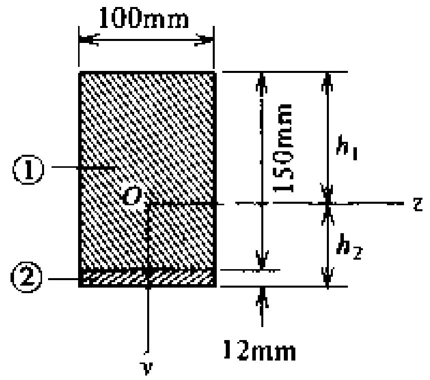


圖 5・28　例題 1

第一步，先定出截面中性軸的位置。假定中性軸如 5－28 圖所示。在材料 1 內，我們各以 h_1 及 h_2 表示自該軸分別至樑頂與樑底的距離。參照方程式（5－32），並採用N與mm單位。我們得知，在該方程式內的兩項，分別爲

$$E_1 \int_1 y\, dA = (7 \times 10^3)\left[\left(-\frac{h_1}{2}\right)(h_1)(100) + \left(\frac{150 - h_1}{2}\right)(150 - h_1)(100)\right]$$
$$= 105 \times 10^6(75 - h_1)$$
$$E_2 \int_2 y\, dA = (140 \times 10^3)[(150 - h_1 + 6)(12)(100)] = 168 \times 10^6(156 - h_1)$$

將此代入方程式（5－32） 並求其解，得 $h_1 = 124.8\text{mm}$ ，由此定得中性軸位置。

再應用平行軸定理，可求得對中性軸的慣性力矩 I_1 及 I_2

$$I_1 = \tfrac{1}{12}(100)(150)^3 + 100(150)(124.8 - 75)^2 = 65.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_2 = \tfrac{1}{12}(100)(12)^3 + (12)(100)(156 - 124.8)^2 = 1.2 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

我們再用直接計算法作一校核，$I = (\frac{1}{3})(100)(124.8)^3 + \frac{1}{3}(100)(37.2)^3 = 66.5 \times 10^6\text{mm}^4$ 等於 I_1 與 I_2 之和。

在材料1內的最大壓縮應力發生在 $y = -124.8\text{mm}$ 之樑頂。應力（得自方程式5－34a）爲-5.59N/mm^2。在兩種材料的接縫處，在材料1的應力（以 $y = 25.2\text{mm}$）得自方程式（5－34a）爲1.13N/mm^2，而在材料2的應力（以 y 之同值得自方程式5－34b）爲22.6N/mm^2。在樑之下邊（$y = 37.2\text{mm}$）材料2中的應力爲33.3N/mm^2。

換算截面法

換算截面法是分析合成樑的一種便利方法。計算的程序，是把包含多於一種材料的橫截面，變換成祇包含一種材料所組成的等效面積的橫截面。於是此等效的一種材料面積，稱爲換算截面（transformed section），採用具有一種材料之樑的普通方法來分析。

換算截面若與原樑相當，必具與原樑同一的中性軸及“力矩－抵抗能量”（moment-resisting capacity）。爲欲明瞭換算截面如何得來，可參考方程式（5－32）。因該式可確定中性軸的位置。我們用 E_1 除該方程式的各項，並引入一記號 $n = E_2/E_1$ ，稱爲“模數比”（modular ratio），則得

$$\int_1 y\, dA + \int_2 yn\, dA = 0 \tag{5-35}$$

此方程式表示，假如在材料2內各別元體面積 dA 均被因素 n 放大，則中性軸位置將不會改變，但必須以各別元體面積的 y 距離不被改變爲條件。換言之，我們可將橫截面當作包括兩部份：(1)面積1仍維原狀，(2)面積2則將其寬度乘 n 倍。因此，我們即得一全部爲材料1的新橫截面。

圖5－27a 樑的換算截面，如圖5－27d 所示。材料1仍然不變，但由材料2所佔之寬度則被乘以 n 倍。（注意：此係在作 $n>1$ 之例證說明所假定者，但此種假定並非必要）。現在可將換算截面當作完全爲材料1的截面。換算截面的中性軸，一如由方程式（5－35)所定出者，會在原樑（圖5－27a）同一的位置。再者，換算截面的彎力矩能量亦會與

原橫截面相同。此一結論可證之如下，因換算截面之 $\sigma_x = kE_1 y$，所以

$$M = \int \sigma_x y\, dA = \int_1 \sigma_x y\, dA + \int_2 \sigma_x y\, dA = \kappa E_1 \int_1 y^2\, dA + \kappa E_1 \int_2 y^2\, dA$$

$$= \kappa(E_1 I_1 + E_1 n I_2) = \kappa(E_1 I_1 + E_2 I_2)$$

此與方程式（5－33）具同一結果。因此，我們的結論，原樑與換算樑的力矩爲不變。

因爲該樑僅包括一種材料，換算截面的應力可用普通應力公式求得。因此其應力爲

$$\sigma_{x1} = \frac{My}{I_t} \tag{5-36}$$

式內 I_t 爲換算截面（$I_t = I_1 + nI_2$）對中性軸之慣性矩。方程式（5－36）與方程式（5－34a）相符。因之，我們的結論，原樑內材料 1 的應力與由換算截面求得的是一樣。不過，對原樑內材料 2 而言則不同。換過來說，用前一方程式（5－36）與方程式（5－34b）比較，則顯示換算樑內的應力要得到原樑內的應力，必須乘以 n 倍。因此，我們的結論，由于換算截面內包括材料 1，材料 1 的應力將爲“眞正”（true）應力，但包括材料 2 的範圍，其應力必須用模數比 n 加以換算方可。

換算截面法，很容易擴展到用兩種以上材料的情況，亦可將樑換算成具有任何適當的 E 值材料。其中樑的各部皆須經過適當轉換而成虛構的材料。當然，若轉換成原有材料中之一，則較簡單而合乎習慣。用那一材料爲準，則可任意選擇。

【例題】2　在例題 1 與圖 5－28 內所示樑的截面，係全用材料 1，

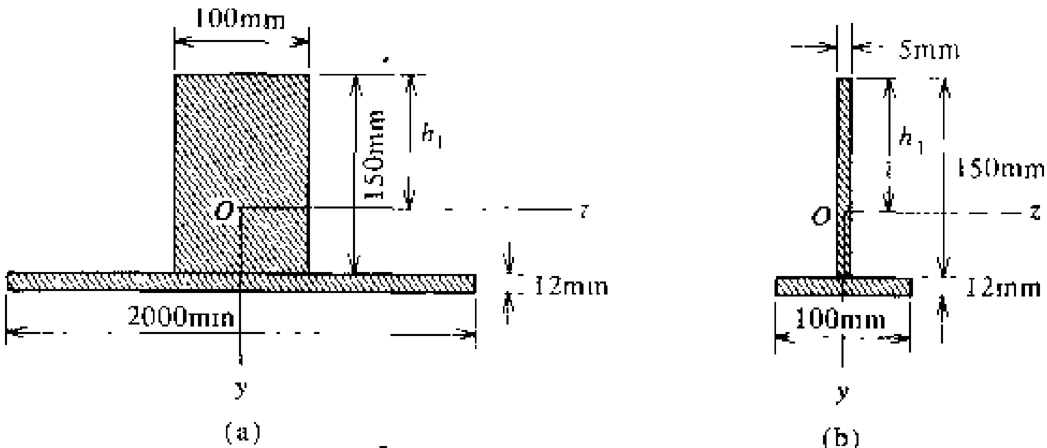


圖 5 - 29　例題 2 及 3

並用換算截面法分析者。所以，樑的上部在換算截面（見圖 5 − 29a）內保持不變，但下部則將其寬度乘以 $n = E_2/E_1$ ，在本例題內 n 爲 20 。

爲定中性軸位置，我們必求出換算截面的重心所在。計算各面積對樑頂的第一力矩，並除總面積，即可算得 h_1 值如下：

$$h_1 = \frac{100(150)(75) + 2000(12)(156)}{100(150) + 2000(12)} = \frac{4869}{39} = 124.85 \text{ mm}$$

換算截面的慣性矩爲

$$I_t = \tfrac{1}{12}(100)(150)^3 + 100(150)(49.85)^2 + \tfrac{1}{12}(2000)(12)^3 + 2000(12)(31.15)^2 = 88.98 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

換算截面在樑頂、在接縫，以及在樑底的應力分別爲

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(4 \times 10^6)(-124.85)}{88.98 \times 10^6} = -5.61 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(4 \times 10^6)(25.15)}{88.98 \times 10^6} = 1.13 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(4 \times 10^6)(37.15)}{88.98 \times 10^6} = 1.67 \text{ N/mm}^2$$

在原截面內諸應力，將與換算截面內材料 1 的應力相同，但與材料 2 則不同。所以，上面所計算的前一個應力，爲材料 1 在原截面內相當位置的應力。就材料 2 而言，在求樑的接縫與下邊的應力時，須乘以 n（等於 20 ）；由此得

$$\sigma = 20(1.13) = 22.6 \text{ N/mm}^2 \quad 與 \quad \sigma = 20(1.67) = 33.4 \text{ N/mm}^2$$

所得的結果，皆與例題 1 所得者相符。

【例題】3　爲了進一步說明換算截面法，讓我們將前一例題的截面換算爲材料 2 以求解答。在本題中，n 值爲 1／20 。在求換算截面時要注意到，包含材料 2 的部份的截面將不變動，包含材料 1 的部份的截面寬度因乘因數 n 而減小（見圖 5 − 29b）。

現在做照前例的同一步驟求

$$h_1 = \frac{5(150)(75) + 12(100)(156)}{5(150) + 12(100)} = 124.85 \text{ mm}$$

$$I_t = \tfrac{1}{12}(5)(150)^3 + 5(150)(49.85)^2 + \tfrac{1}{12}(100)(12)^3 + 100(12)(31.15)^2 = 4.449 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

在換算截面頂部、接縫處及底部的應力分別爲

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(4 \times 10^6)(-124.85)}{4.449 \times 10^6} = -112.25 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(4 \times 10^6)(25.15)}{4.449 \times 10^6} = 22.61 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(4 \times 10^6)(37.15)}{4.449 \times 10^6} = 33.40 \text{ N/mm}^2$$

欲求原截面的各應力，在材料 1 的應力必須乘以 n 來換算之；因此，我們求得在樑頂與接縫處的應力爲

$$\sigma = -\frac{1}{20}(112.25) = -5.61 \text{ N/mm}^2 \quad 與 \quad \sigma = \frac{1}{20}(22.61) = 1.13 \text{ N/mm}^2$$

在材料 2 中的應力對原有之截面是正相符合的。

讀者或許已注意到例題 2 與 3 的計算非常相像，並且在換算成一種材料與換算成另一種材料作比較，也沒有什麼便利之處。

換算截面法，在鋼筋混凝土樑的分析中應用甚廣，具有興趣的讀者可參考有關討論此類樑分析的鋼筋混凝土教科書。

夾心樑

一根夾心樑，在其上下兩邊各包括一薄層材料，稱爲貼面（ faces ）。在二者中間有一層厚的“心子”（ core)（見圖 5 － 30 ，表示一般性的截面）。通常這“心子”用的重量較輕，強度較低的材料，主要是用來

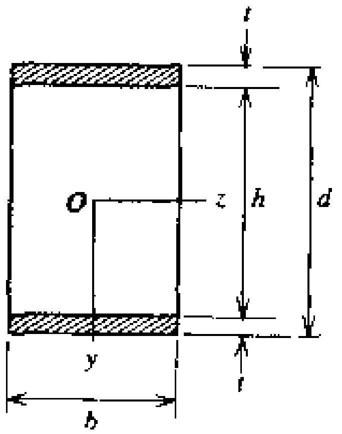


圖 5 - 30　夾心樑

當作填充物或間隔的。但是兩邊的貼面材料則屬於高強度的材料。夾心的構造，在需要重量輕而強度或勁度（ stiffness ）高時應用頗廣。

夾心樑的彎曲近似理論，以假設兩貼面承受全部縱向彎應力而發展之。這種假設尙稱合理，因爲心子與兩邊的貼面比較起來，心子在縱方向具有較低的彈性模數。因此，在樑（見圖 5 － 30)的最外緣的正交應力爲

$$\sigma_x = \frac{Md}{2I_f} \tag{5-37}$$

上式中的 $I_f = bt(h+t)^2/2$ 爲兩貼面對 z 軸的慣性矩。因爲兩貼面皆甚薄，樑心可假設能承受全部剪應力。所以，樑心的平均剪應力與剪應變分別爲

$$\tau = \frac{V}{bh} \qquad \gamma = \frac{V}{bhG_c} \tag{5-38}$$

上式中 V 爲剪力，G_c 爲樑心材的剪力模數。

更多的夾心樑的彎曲理論已被發展出來；例如，兩邊貼面的彎曲，可當作兩個單獨的樑來考慮。至於有關夾心樑，以及夾心構造板（plate）與殼（shell）分析的廣泛論述，見參考書與 5－14 。

5．9 彎曲與扭轉之結合

有時結構構材（structural members）既要承受彎曲載重又要承受扭轉載重；例如，傳送轉矩的圓軸，常受彎力矩以及扭轉偶力（tonsional couples）。在此種情況下，倘若已知應力的合力，要完全應力分析並無任何重要困難。應力合力包含彎力矩，扭轉偶力與剪應力。在截面內任一點，由于每個應力的合力而產生的應力，可用適當的公式求出。然後用第二章內導出的各種應力關係或應用摩爾氏圓來研究所選擇點的整個應力狀態。特別是可以算出各主應力與最大剪應力。在結構構材內，任何數的決定位置，皆可如此分析。並且，從這些結果，可得到適切的設計或一個新穎的設計。

考慮 5－31a 所示的圓桿件，作爲一個對彎曲與扭轉相結合的簡要說明。此懸臂樑在縱軸方向負荷一個轉矩 T 及一側面力 Q。在桿件的任一截面，距離支承 x 處，用靜力學求出應力的合力。此類應力的合力爲：(1)彎力矩 M 等於 $Q(L-x)$，L 爲樑長；(2)剪力 V 等於 Q；及(3)一扭轉偶力 T。要注意的是，在該圖內，樑的上部產生拉力時，彎曲力矩假定爲正值。

假如現在我們檢視位於桿件（圖中的元體 A）頂面上的元體，可知此一元體將會受到由于 M 所生的彎應力 σ_x 及由于 T 所生的剪應力 τ（見圖 5－31b）。此類應力係由方程式 $\sigma_x = My/I$ 及 $\tau = T\rho/J$ 求得。在直徑爲 d 的圓軸上，上項方程式爲

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi d^3} \qquad \tau = \frac{16T}{\pi d^3} \tag{5-39}$$

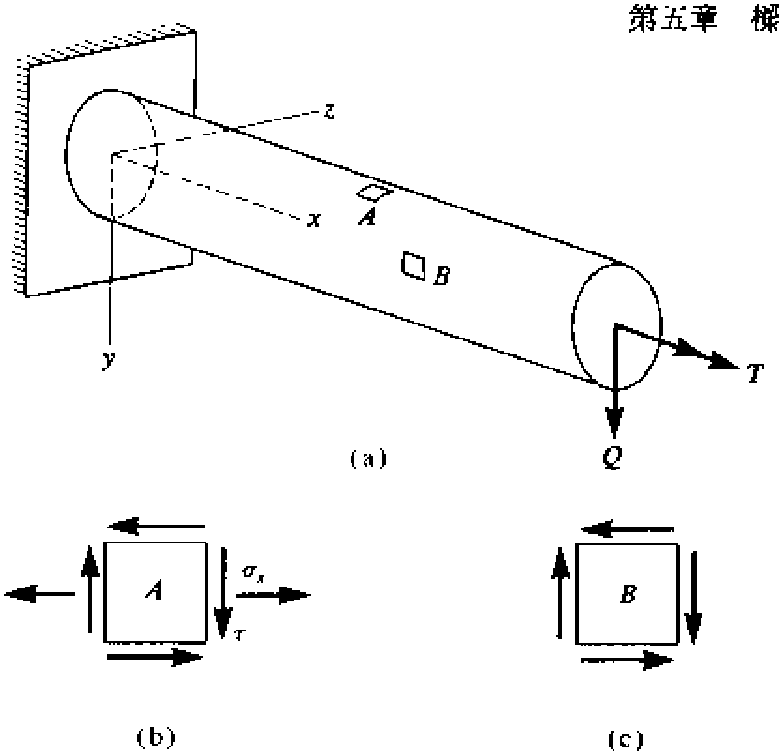


圖 5.31　合併之彎曲及扭力

已知 σ_x 及 τ，我們可求得在 A 點的一個旋轉任意角的元體上之各種應力。

由方程式（2－26）求得在 A 點上各主應力

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2} \tag{5-40}$$

又，由方程式（2－28），求得最大剪應力爲

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2} \tag{5-41}$$

爲了各種設計目的，導出以彎力矩 M 及扭矩 T 來表示的各種主應力與最大剪應力算式，將甚爲有用。將方程式（5－39）代入方程式（5－40）及（5－41），得

$$\sigma_{1,2}=\frac{16}{\pi d^3}\left(M\pm\sqrt{M^2+T^2}\right) \tag{5-42}$$

$$\tau_{max}=\frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2+T^2} \tag{5-43}$$

倘若正交應力與剪應力的容許值 σ_w 與 τ_w 爲已知。可用以代替 σ_1 或 σ_2 及 τ_{max} 代入以上兩個方程式，然後解方程式以求圓桿所需的直徑 d。當然，在彎力矩最大的桿端，選一元體 A，則最大應力亦可求得。

前面的討論假定元體選在桿頂。欲分析桿底應力，亦可做照類似程序爲之。通常彎應力最大之處，最大值之各種應力亦會發生。亦即，不論在最大彎力矩，截面之樑頂或樑底皆會發生。不過，有時需要考慮另外幾種可能性。例如，剪力 V（等於 Q）在中性軸產生最大剪應力。所以，我們亦須考慮在中性軸處桿件之邊緣上選一元體（元體 B）。此元體係在一種純剪力狀態（圖5－31c），是由兩部份組成的剪應力：(1)由公式 $\tau = T\rho/J$ 得來的轉矩 T 所產生的剪應力；及(2)由剪力公式 $\tau = VQ/Ib$ 得來的剪力 V 所產生的剪應力。此種元體的主應力發生在與軸成45°角的平面上。此類應力用在設計時，可用樑頂及樑底元體所得的各種應力加以比較，以確定最大的正交應力。從元體 A 及 B 所求得的各種剪應力，加以比較，以求樑內諸最大剪應力。

假如樑的支承情況較前述者更爲複雜，或其截面並非圓形，我們仍能在桿件的各點分析其應力以比較之。如此做法，自然要在具最大值的正交應力或剪應力之樑內選取各點。在很可能求得最大應力的各點上，比較其所得的各應力，就可合理地求到絕對最大應力。

5．10 彎曲與軸載重之結合

現在讓我們考慮同時承受彎曲載重與軸向力桿件的分析。此種類型的一個簡單例子，如圖5－32a 所示。該圖爲一懸臂樑，一傾斜力 P 作用

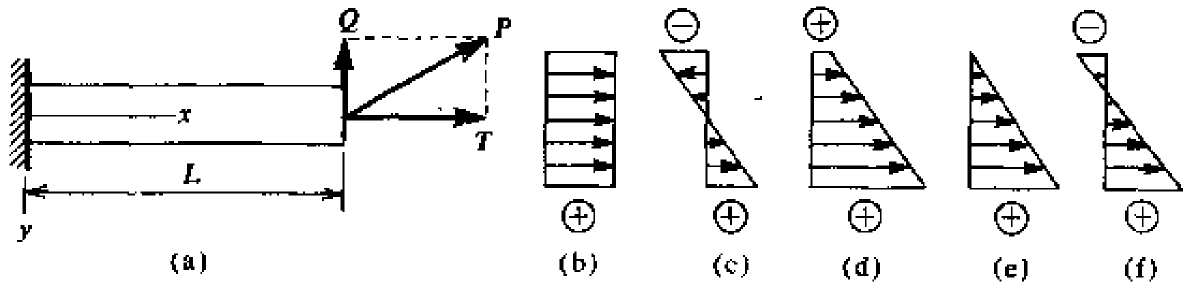


圖 5．32　合併之彎曲及軸向載重

於其上。該載重可分成兩個分力，一個橫向彎曲力 Q 及一個軸向力 T。要測定由此類力量在桿件內所產生的各種應力，就需要在兩種可能的情況間

加以區別：(1)樑的長度與其深度比較相對地短，致樑在彎曲狀態下相對地強勁有力。於是桿件的側向撓曲小，只在軸向力作用綫內產生一不重要的改變。在本例中，我們能互相單獨用 T 及 Q 求得各個應力，而將之重疊加起來。(2)樑是相對地細長而柔韌，在此情況下彎曲撓度可能大得改變了 T 力的作用綫方向。此種改變了作用方向的 T 力，再在樑內產生額外增加的彎力矩；因此，在軸向效應與彎曲效應間，有了一個交互的作用，或偶力作用 * 。在本節內只討論合於(1)的情況，且具有相對勁性的桿件。

在圖 5 － 32 a，樑內任一截面的各種結果應力之求得，係由 T 力所得的各軸應力與由 Q 所得的各種彎應力相加。此類應力的分佈，分別如圖 5 － 32 b 及 c 所示。最後諸應力，如圖 5 － 32a所示，可由下列方程式求得

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} \tag{5-44}$$

式中 N 為軸向力，M 為所考慮截面的彎力矩。以本圖所示懸臂樑而言，$N = T$ 及 $M = Q(L - x)$。應注意者，當樑產生拉力時，N 為正值。依據樑的符號慣例，M 亦為正值（見圖 4 － 3 ）。在此類條件下，方程式（ 5 － 44 ）內正交應力 σ 的符號以正號為拉力及以負號為壓力。最後的應力分佈，有賴於方程式內各項相對代數值。如在圖 5 － 32 d 所示，整個截面的應力分佈為拉力；或應力分佈為三角形（圖 5－32e ）；或截面係部分受拉力及部分受壓力（圖 5 － 32 f ）；或軸向力 N 為壓縮力時，甚至全部截面皆受壓力。在所有彎曲與軸向載重相結合的事例中，最明顯的事實是截面的中性軸（即，應力為零的軸綫）不再通過截面的重心，甚至可能落在截面以外。

【例題】　一個矩形截面的簡支樑（寬度 b 及高度 h ）承受一載重 P ，作用如圖 5 － 33 所示。假定距離 $a = 2h$ ，求樑內最大拉應力與最大壓應力。

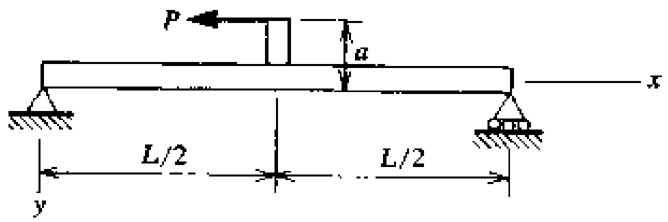


圖 5 . 33　例題

---

* 此後一效應，將在第十章柱內及高等材料力學中加以討論。

我們開始觀察到，在樑中間處彎力矩爲最大，而在樑的左半邊，軸向壓力等於 P 。因此，在樑中間偏左一小距離的截面上，其軸向力與彎力矩各爲

$$N=-P \qquad M=\frac{Pa}{2}=Ph$$

所以，我們從方程式（5－44）求得在樑底與樑頂的應力（$y=h/2$及 $y=-h/2$）如下

$$\sigma_b=-\frac{P}{bh}+\frac{6P}{bh}=\frac{5P}{bh} \qquad \sigma_t=-\frac{P}{bh}-\frac{6P}{bh}=-\frac{7P}{bh}$$

同樣，正在樑中心右邊截面上的應力（該處$M=-Ph$ 及$N=0$）爲

$$\sigma_b=-\frac{6P}{bh} \qquad \sigma_t=\frac{6P}{bh}$$

比較這些應力，我們知道樑內最大拉應力爲 $6P/bh$ ，而最大壓應力爲 $-7P/bh$ 。

偏心軸向力

當桿件受到一個適宜的偏心軸載重時，就會發生一個有趣的特別情況（見圖5－34）。該偏心力的作用，等於加在重心之力 P與彎曲偶力 Pe 兩者的相加作用。因此，在截面上任何一點的應力爲

$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{Pey}{I} \tag{5-45}$$

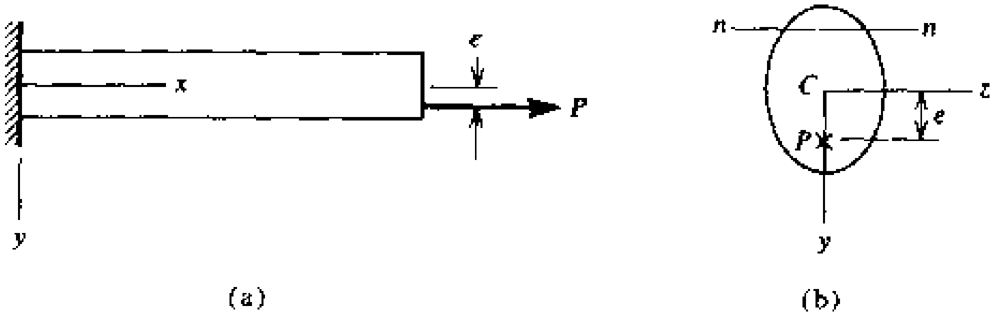


圖5．34　偏心軸向力之偏心軸向力

在方程式（5－45)內，使σ等於零，可得中性軸（圖5－34b 內的 nn 線）的方程式爲

$$y=-\frac{I}{Ae} \tag{5-46}$$

此方程式內的負號，表示當載重 P作用於 z 軸下的拉力，其中性軸在 z 軸

之上。如果偏心 e 減小，中性軸將遠離重心，如果 e 值增大，中性軸將移近重心。

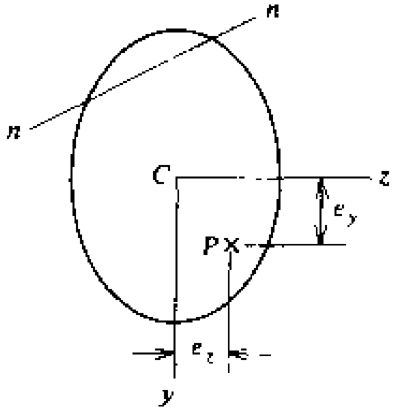
當偏心拉力 P 的着力點並不在截面的兩個主軸中的一個之上，則對兩個主軸皆同時會有彎曲的情況。用 e_y 與 e_z 表明 P 力的着力點座標（見圖 5－35a），我們知道對 y 與 z 的彎力矩在數值上各等於 Pe_z 和 Pe_y。於是在截面任何一點（一個受 y 與 z 座標限定之點）正交的合應力 σ 變爲

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{I_y} + \frac{Pe_y y}{I_z} \tag{5-47}$$

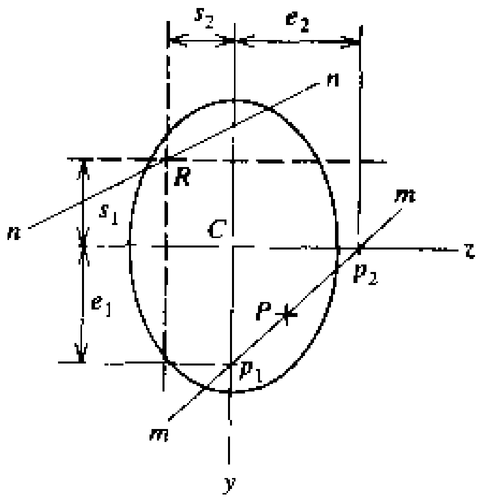
式中 I_y 及 I_z 分別爲對 y 軸及 z 軸的慣性矩。當 P 在 y 軸上而 e_z 等於零時，此方程式便化成方程式（5－45）。再者，若令 σ 等於零，即可求得中性軸方程式：此時方程式爲

$$\frac{Ae_y}{I_z}y + \frac{Ae_z}{I_y}z + 1 = 0 \tag{5-48}$$

式內的 y 與 z 均作直綫形。因此，中性軸爲一直綫，如圖 5－35a 中之 nn 綫。此綫是否與截面相交，則視截面形狀及軸向力 P 之着力點位置而定。此 nn 綫與 y 及 z 軸的相交點，可將方程式（5－48）內的 z 及 y 值各等於零，即可求得。



(a)



(b)

圖 5．35　對兩個主軸線產生彎曲

在P力的着力點與中性軸位置之間，有一個頗具趣味的關係存在。當P力沿着任一直綫移動時，中性軸則環繞一固定點R旋轉（見圖5－35b）。爲證明此一事實，我們首先觀察到P力能被分解成兩們平行的分力，一個在p_1作用，另一個在p_2作用。p_1的分力在主彎曲平面內作用。因此，相當的零應力綫，則平行於z軸，並位於距z軸$s_1 = I_z/Ae_1$之處（見圖5－35b及方程式5－46）。同樣，p_2的分力對y軸所產生的彎曲，其相當的零應力綫則平行於y軸，並位於距y軸$s_2 = I_y/Ae_2$之處。當兩個載重分力同時在起作用時，即有一中性軸nn存在，在圖中兩條虛綫相交處的R點，會在nn中性軸上。因此，當載重P沿mm綫移動時，R點則仍固定在原位，中性軸必通過此點。

橫截面之核心

當所加的軸向應力P（圖5－34)有一小偏心距，中性軸卽會留於橫截面之外。意指各正交應力，在全橫截面內會有一致的符號。這種情況，當一個壓力載重作用於拉力甚弱的材料時，如陶瓷材料或混凝土等，常常是重要的。在這種結果裡，可能需要保證在橫截面的任何點，載重皆不能產生拉力。在重心附近會有一個小區域，在此區域內作用的壓力載重P在整個橫截面內皆產生壓力。這區域稱爲截面的“核心”（core）［或稱爲“安定圈”（kern）］。

用下面的方法，可求得矩形截面的安定圈。如果載重沿着正向y軸上（圖5－36)，當其在距重心e_1距離的p點位置上時，中性軸就與截面的上緣相合。將$y=-h/2$、$I=bh^3/12$及$A=bh$代入方程式（5－46)，從而求得距離e_1。因此$e_1=h/6$如圖所示。照同樣方法，當載重p作用在正向z軸上的q點，離重心$b/6$距離，中性軸卽與截面之左邊相合。當載重沿p與q兩點間的直綫移動，則中性軸繞矩形截面隅角的m點旋轉。因此，pq綫卽爲該核心的一邊。其他的三邊，可依對稱關係確定之。並且我們得知該核心爲一斜長方形，其對角綫爲$b/3$及$h/3$。只要壓力載重P的着力點落在此斜方形內，中性軸就不會在該截面上相截

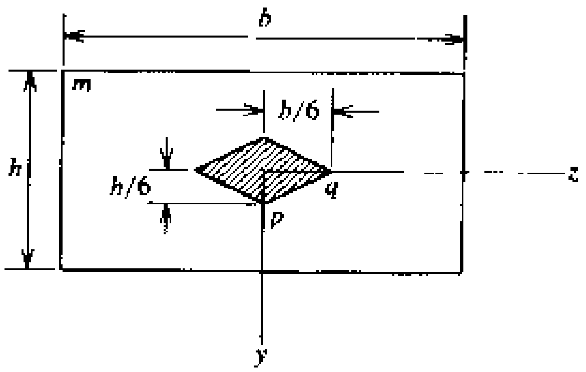


圖5．36　矩形截面的核心

，而全部截面皆受到壓力。其他形狀截面的核心，可採用一矩形截面核心圖的同一方法求得之。*

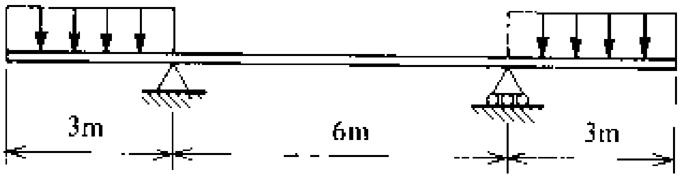
習　題

5.1－1　一條鋼綫（$E=200\text{kN/mm}^2$），直徑 $d=0.8\text{mm}$，盤繞於直徑500mm之滑車，求其最大應力。

5.1－2　一根薄鋼尺（$E=200\text{kN/mm}^2$），其截面尺寸爲 1mm×25mm，長度 $L=250\text{mm}$，兩端各受力偶被彎成對中心角爲 60°的圓弧。求該尺的最大應力爲若干？

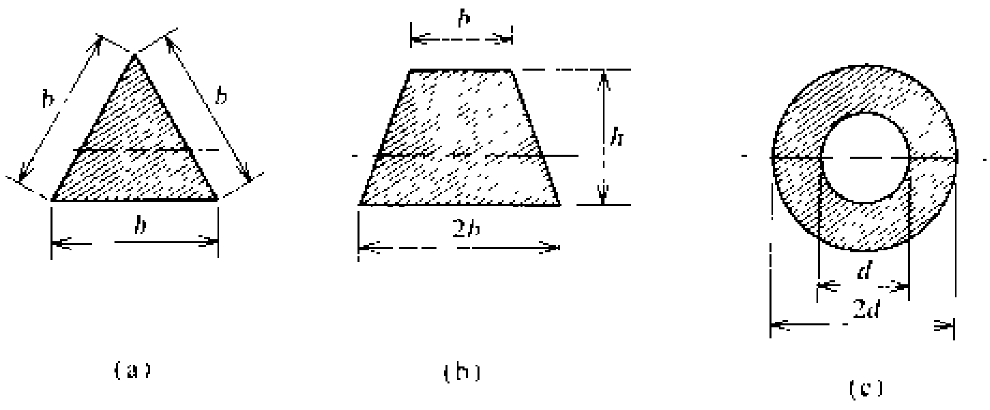
5.1－3　一根正方形截面 250mm×250mm 木樑，其荷重與支承如圖5－5所示。若 $L=2\text{ m}$，$a=0.3\text{ m}$，$E=10\text{kN/mm}^2$，樑內最大容許應力爲 $\sigma_w=7\text{N/mm}^2$，求容許載重 P 及跨度中間的撓度 δ。

5.1－4　一根具有兩端外伸部份之樑（見圖），在每端各負荷均勻載重 $q=150\text{kN/m}$。假定樑之截面爲914×305×289kgUB，其$E=200\text{ kN/mm}^2$。試求樑內最大正交應力及樑中間之向上撓度 δ。



習題圖 5·1-4

5.1－5　若容許應力（拉力或壓力）爲 σ_w，習題5.1－5 圖中所示每一種截面所能負荷的最大彎力矩 M_{max} 爲何？



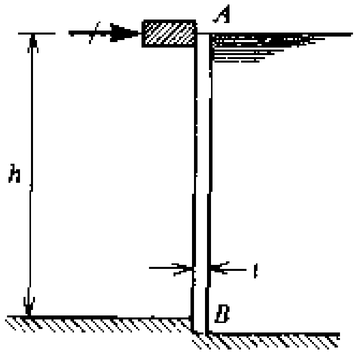
習題圖 5·1-5

* 橫截面的核心觀念原由Bresse 氏於1854年所引介。（見參考書5－15）。

5.1－6　假定樑頂溫度為T_1，樑底溫度為T_2（$T_2>T_1$），而頂與底間溫度變化作直線形。（材料的熱膨脹係數為α，彈性模數為E），該樑截面高h間一律受此不均勻的熱度。試求此矩形截面簡支樑（跨度長L）的曲度κ及最大撓度δ。

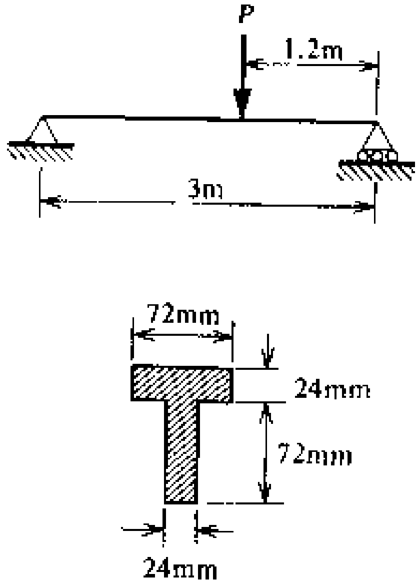
5.1－7　一根跨度長$L=4$ m之簡支樑，負荷強度$q=4$kN/m 的均佈載重。若該樑為矩形截面，其寬b=120mm及高$h=200$mm。試計算其最大彎應力。

5.1－8　一個高$h=6$ m（見圖）之木水閘，由一厚$t=300$mm在其頂底兩端簡支之AB樑構造而成。假設水的單位重量為9.8kN/m³，求該樑內所起的最大彎應力。



習題圖 5・1－8

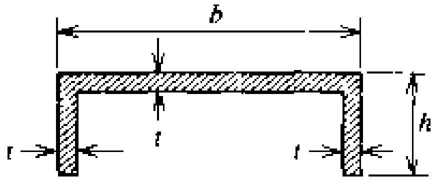
5.1－9　假如$P=5$kN　橫截面的尺寸如習題5.1－9圖所示。求圖內所示簡支樑因彎曲所生之最大正交應力。



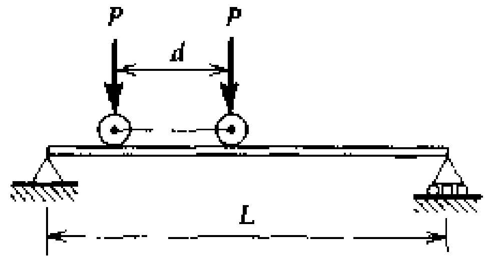
習題圖 5・1－9

5.1 － 10　一根槽形樑，其橫截面形狀如習題圖 5.1 －10 內所示。簡支於兩端，並在中間負荷一集中載重 P。假如受彎曲作用的工作拉應力為 140N/mm^2，壓應力為 84N/mm^2，求容許載重 P。（假定 $b = 600$ mm，$h = 250$mm，$t = 50$mm，及 $L = 3$ m）。

5.1 － 11　一根簡支樑負荷兩個相距 $d = 2$ m之輪載重（見圖）。各輪傳送的載重均為 $P = 14$kN，車軸可在樑上佔任何位置。該樑跨度 $L = 7$ m。假如該樑的截面採用 178 × 102 × 21.5kgRSJ，求樑之最大彎力矩。

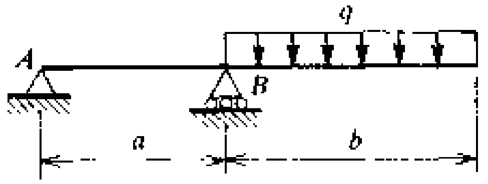


習題圖 5.1-10



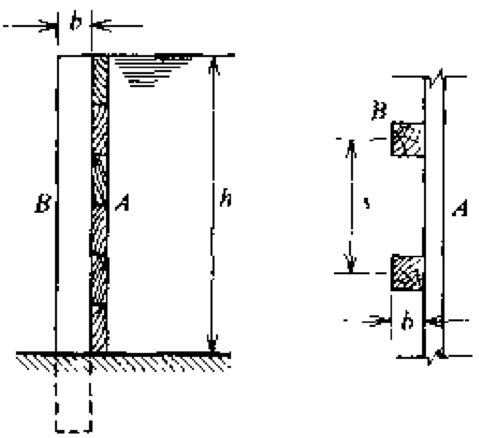
習題圖 5.1-11

5.2 － 1　一根圓形截面木樑支於 A 及 B 兩點，並沿其外伸部份負荷均佈載重 $q = 4$kN/m（見習題圖 5.2 － 1）。假如 $\sigma_w = 8\text{N/mm}^2$，$a = 1$ m及 $b = 2$ m。求所需直徑，但樑重不計。

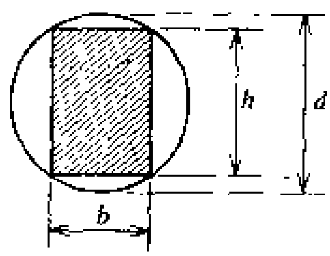


習題圖 5.2-1

5.2 － 2　一個木製水閘 A 由若干條水平板，並由下端固定的垂直樑 B 所支承（見習題圖 5.2 － 2）。假如水深 $h = 2$ m，垂直樑間距 $s = 1$ m，及 $\sigma_w = 3\text{N/mm}^2$，求所需垂直樑用正方形截面的尺寸 b。



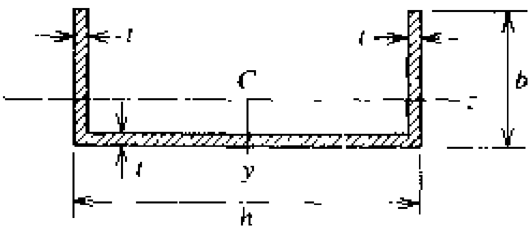
習題圖 5.2-2



習題圖 5.2-3

5.2 − 3　由直徑爲 d 的圓形木材切出一根矩形木樑（見習題圖 5.2 − 3）。得一最堅強樑，其 b 及 h 之尺寸應爲若干？

5.2 − 4　一槽形截面之樑（見習題圖 5.2 − 4）承受一個對 z 軸的彎力矩。假如 $b = 80\text{mm}$，$h = 200\text{mm}$，欲使截面的頂部與底部的彎應力之比爲 3 ∶ 1，槽樑的厚度 t 應爲若干？



習題圖 5.2 - 4

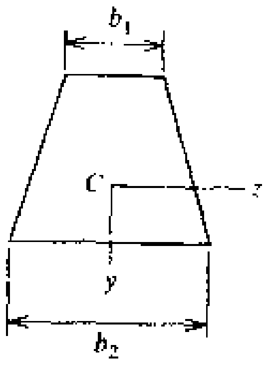
5.2 − 5　試從附錄 C 表中選擇一寬統一樑截面，使支承如圖 5 − 1a 所示的載重。假如 $P = 36\text{kN}$，$a = 2\text{ m}$，及 $\sigma_w = 140\text{N/mm}^2$，但樑重不計。

5.2 − 6　假定 $\sigma_w = 110\text{N/mm}^2$，不計樑重。(a)求一長 4 m 之簡支樑所需的截面模數 S，當該樑負荷一均佈載重 6kN/m 及一集中載重 18kN 置在樑之中央。(b)從附錄 C 之表中選擇一適當的統一樑，但不計樑重。

5.2 − 7　(a)假如一根懸臂樑，長度 $L = 1.5\text{ m}$，$\sigma_w = 100\text{N/mm}^2$，負荷一均佈載重 $q = 3\text{kN/m}$，並在自由端負荷集中載重 2kN，不計樑重。求其所需之截面模數 S。(b)自本書附錄 C − 3 表內選一適當的 I 字樑，但計其樑重。

5.2 − 8　假如第一根樑有一實心圓形截面（直徑 d_1），而第二根樑爲外徑 d_2 的圓管截面，今二樑之橫截面面積相等，求二樑截面模數之比 S_2/S_1。

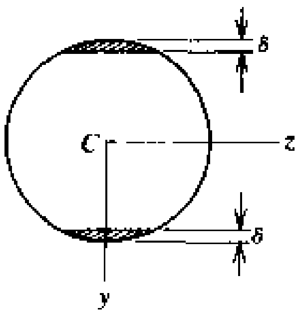
5.2 − 9　一根在純彎曲狀態下的等截面樑，其截面爲梯形（見習題圖 5.2 − 9）樑頂受壓力。假如其拉力與壓力的容許工作應力比值 $\sigma_t/\sigma_c = \beta$。試計算其最小樑重時上下底寬 b_1/b_2 之比。



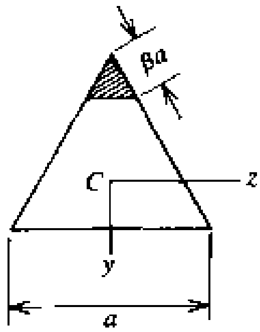
習題圖 5.2 - 9

5.2 － 10　一根圓形（直徑＝d）截面樑繞 z 軸彎曲（見習題圖 5.2 － 10）。為欲增加其截面模數，將兩個深度為 δ 有陰影線的弓形，自樑的上下側移去。求 δ 值使截面模數為最大值。

5.2 － 11　為求得一最強的彎曲截面，試求 β 的數值，用以限制自截面切去此等邊三角形（見習題圖 5.2 － 11）之量。



習題圖 5.2 - 10



習題圖 5.2 - 11

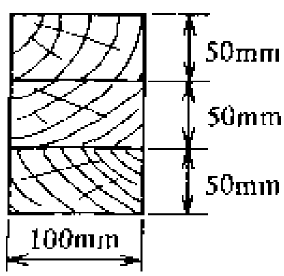
5.3 － 1　在一個矩形樑內，先以剪應力 τ 式開始（方程式 5 － 19）。試就全部截面積分以表明總剪力等於 V。

5.3 － 2　例如一根簡支樑長度為 2 m，截面為矩形，寬度 b = 200 mm，高度 h = 250mm。負荷一均佈載重 q = 15 kN/m，試求其最大剪應力。

5.3 － 3　一根矩形截面之簡支木樑（寬 b = 150mm，高 h = 250 mm）在跨度中點負荷一集中載重 P。假如 σ_w = 7N/mm²，τ_w = 1N/mm²，及跨度長 L = 1 m，問 P 之容許值為若干？

5.3 － 4　試求習題 5.1 － 8 之垂直樑 AB 內的最大剪應力。

5.3 － 5　一根夾層木樑，係由三塊 50mm × 100mm 木板用膠粘成一個截面為 100mm × 150mm 的實心樑如圖所示。在膠結接頭處的容許剪應力為 0.35N/mm²。假如樑為 1 m 長之懸臂樑，在自由端的容許載重 P



習題圖 5.3 - 5

為若干？相當的最大彎應力為若干？

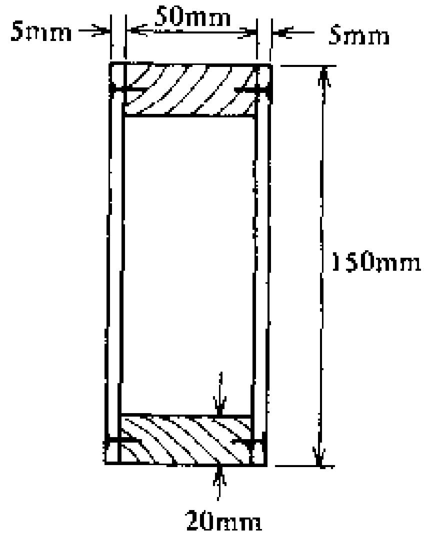
5.3 － 6　假如一寬翼緣樑（圖 5 － 14a）截面之 b = 120mm，t = 12mm，h = 300mm，h_1 = 270mm，及 V = 130kN。試計算其腹鈑內的最大剪應力。並與用腹鈑面積除 V 所得的近似應力作一比較。

5.3 － 7　試計算習題 5.1 － 4 樑內之最大剪應力。

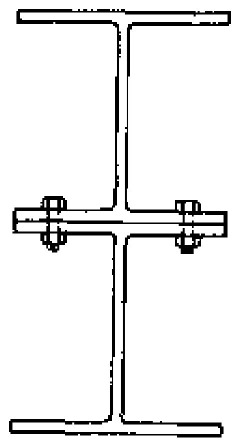
5.3 － 8　試求習題 5.1 － 9 樑內之最大剪應力。

5.5 － 1　一個由銲接構成的大樑截面如圖 5 － 17b 所示，係由兩塊 24mm × 240mm 翼緣鈑及一塊 12mm 厚與 600mm 深之腹鈑銲接而成。假如該樑受到 750kN 之總剪力，則各銲接填角（每mm長的銲接）必須傳導之力為若干？

5.5 － 2　一根空心木樑，其腹板為木夾板，截面尺寸示於習題圖 5.5 － 2內。夾板用小釘與樑的上下翼緣相連，每個釘子的容許負荷剪力能量為 90N。在各截面上的剪力分別為 450N 及 900N，求各截面處各釘子間的最大容許間距。



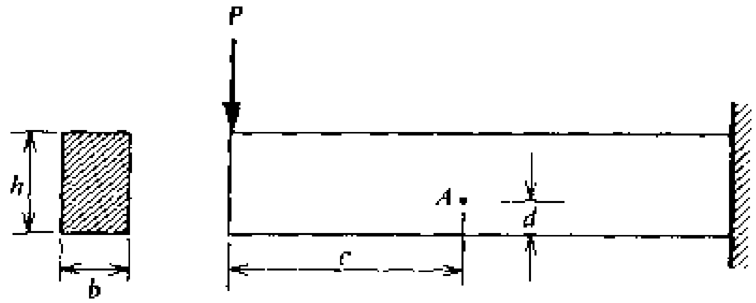
習題圖 5.5-2


習題圖 5.5-3

5.5 － 3　兩個 254 × 146 × 43kg 統一樑截面（見附錄 C）用鉚釘連接一起，形成如圖所示之單一樑。假如 V = 90kN，在每個螺栓上的剪力載重為 13.8KN，求最大容許的螺栓間距為若干？

5.5 － 4　一個木質箱型樑製成如附圖 5 － 18 所示，其頂板與底板的截面（實際大小）皆為 20mm × 200mm，兩邊板均為 50mm × 200mm。假如釘的縱向間距為 s = 150mm，每個釘子的容許剪力為 3kN，求該截面能負荷的容許剪力 V。

5.6 － 1　一個矩形截面懸臂樑，在自由端負荷一集中載重 P（見習題圖 5.6 － 1）。假定 b = 120mm，h = 300mm，P = 5kN，c = 0.5 m及 d = 80mm。求在 A 點的主應力，並以簡圖表明 A 點處一適當定位元體的主應力作用情形。



習題圖 5.6-1

5.6－2　若前題的情況 $b = 120$mm，$h = 200$mm，$P = 10$kN，c = 1 m及 $d = 150$mm時。試求其解。

5.6－3　一矩形截面（寬120mm，高200mm）之簡支樑，在3 m跨度上負荷14kN/m 的均佈載重。求在距左支承點0.3 m處截面上的主應力(a)在中性軸，(b)在中性軸以上50mm，及(c)在樑的頂面。

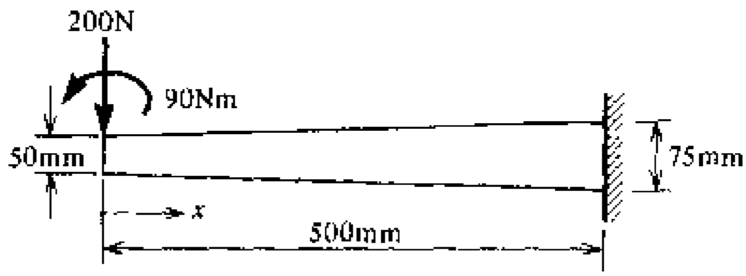
5.6－4　一個寬翼緣截面之樑（見圖5－14a）具有下列諸截面尺寸：$b = 120$mm，$t = 12$mm，$h = 300$mm，$h_1 = 270$mm。簡支樑的跨度長 $L = 3$ m，承受一均佈載重 $q = 90$kN/m。試研究在距樑左支承1 m處的截面內的主應力。試考慮在(a)樑之底面。(b)下翼緣與腹鈑間的接合點，及(c)中性軸上諸應力。

5.7－1　假如 $d_b/d_a = 3$，求圖5－24 內所示的懸臂樑由彎曲所生的最大正交應力。試將該應力與在支承點上的最大應力 σ_b 比較之。

5.7－2　問 d_b/d_a之比應爲何値，才使圖5－24 內所示的懸臂樑在支承點發生最大正交應力？

5.7－3　一根正方形截面的漸縮懸臂樑，在其自由端負荷一集中載重 P。該樑之寬度與高度依自由端之 h 到固定端之 $2h$ 作直綫變化。樑之長度爲 L。求由彎曲而致的最大正交應力。

5.7－4　一根矩形截面的漸縮懸臂桿件承受圖內所示的載重。該樑的寬度爲常數並等於25mm，其深度則依荷重端的50mm 到支承端的75



習題圖 5.7-4

mm 作直綫變化。(a)計算由于彎曲而生的最大正交應力。(b)計算在支承點上之最大與最小剪應力。

5.7－5　一根矩形截面懸臂樑，具有不變的高度 h 與變動的寬度 b。在自由端承受一集中載重 P。樑之寬度 b 應如何以 x（自樑之自由端量起）為函數而變化，始可成一充分發揮應力之樑？祇考慮由彎曲所致的正交應力，並假定最大容許應力為 σ_w。

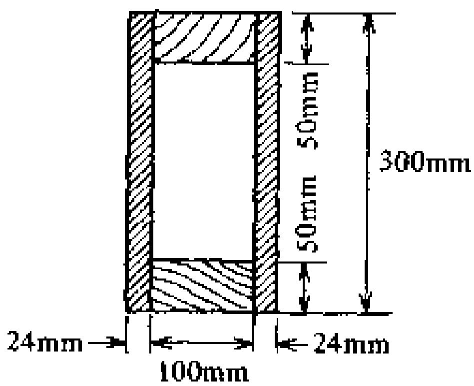
5.7－6　假如在圖 5－25 內所示的懸臂樑，承受一強度為 q 的均佈載重以代替一集中載重。為求得一充分受力的設計，該樑的形狀應為如何？祇考慮由彎曲所致的正交應力，並假定最大的容許應力為 σ_w。

5.7－7　一根矩形截面樑，具有不變的寬度 b 及變動高度 h，承受一集中載重 P。該載重 P 可在沿樑之跨度上任何一處作用。為欲獲得一充分發揮應力之樑，h 應如何以 x（自樑之中點量度）為函數而變化？祇考慮各處由彎曲所致之正交應力，並假定其容許應力為 σ_w。

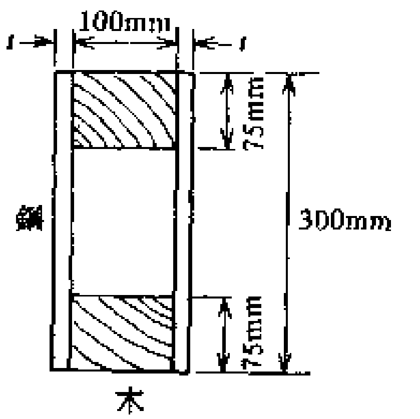
5.8－1　一根 3 m 長的簡支樑，在跨度中點負一集中載重 $P=4$ kN，該樑由一木質樑（100mm寬及150mm高）與在下緣加強之25mm寬12mm厚之鋼條構成。該鋼條之25mm 邊與木樑接觸，該樑的兩部份的聯合深度為162mm。假如木料的 $E_w=10\text{kN/mm}^2$，鋼料的 $E_s=200\text{kN/mm}^2$，求該樑的兩部份的最大應力。

5.8－2　一根合成樑，係由150mm寬及200mm深之木樑與一塊在其下緣加強的12mm×150mm鋼鈑所構成。木料的 $E_w=10\text{kN/mm}^2$，而鋼的 $E_s=200\text{kN/mm}^2$。假如木料的容許應力為 $\sigma_w=8\text{N/mm}^2$，鋼為 $\sigma_s=110\text{N/mm}^2$。求樑的容許彎力矩。

5.8－3　一根200mm寬及300mm深之木樑，在頂與底兩邊皆以12mm×200mm的鋼鈑予以加強。假如木料的容許應力為8N/mm²，而鋼為110N/mm²。求該樑的容許彎力矩。假定鋼與木的彈性模數比為20。



習題圖 5.8-4



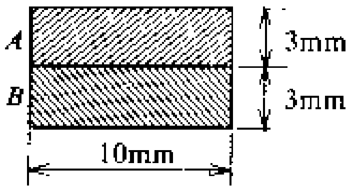
習題圖 5.8-5

5.8－4　一個箱型樑，用樅木夾板作腹鈑與紅木作翼緣構成之，如習題圖5.8－4所示。該木夾板厚24mm，寬300mm。紅木翼緣皆為50

mm × 100mm（實際尺寸）。樅木夾板的彈性模數爲 11 kN/mm² 而紅木的爲 8kN/mm²。假如夾板的容許應力爲 14N/mm²，而紅木的爲 12 N mm²。求該樑的容許彎力矩。

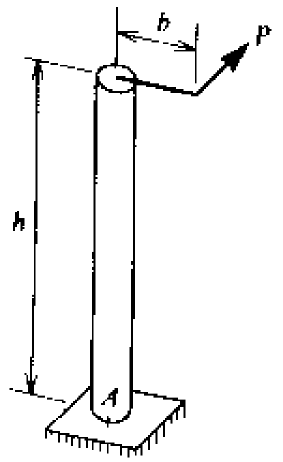
5.8－5　一根跨度 4 m 之簡支樑，負荷 40kN/m 的均佈載重。樑之橫截面示於圖內。假如鋼的容許應力爲 120kN/mm²，而木料的爲 8N/mm²，則鋼鈑所需的厚度爲何？假定鋼與木的彈性模數分別爲 200kN/mm² 及 10kN/mm²。

5.8－6　一塊雙金屬鈑條的截面示於習題圖 5.8－6 內。假定 E_a = 280kN/mm²，而 E_b = 140kN/mm²，求該樑的較小截面模數，亦即求彎力矩與最大彎應力之比。



習題圖 5.8-6

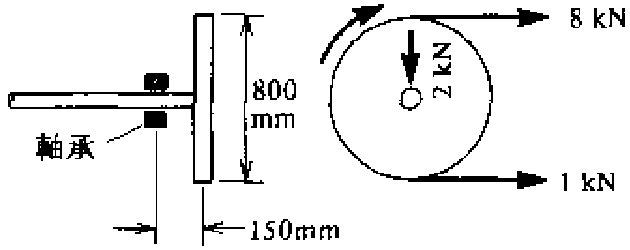
5.9－1　一個空心圓截面立柱，支持一水平力 P = 1kN。該力作用於距立柱軸的距離爲 b = 1 m（見習題圖 5.9－1）。該立柱高度 h = 8 m 而其截面模數 S = 160 × 10³mm³。求立柱在 A 點（見圖）的主拉應力與最大剪應力。該 A 點，爲單由彎曲所生之正交應力中之最大。



習題圖 5.9-1

5.9－2　一個直徑 60mm 之軸，承負一直徑 800mm，重 2kN 之滑車（見習題圖 5.9－2）。皮帶拉力（水平）爲 8kN 及 1kN。軸承距滑車 150mm。求該軸在軸承處的主要拉應力及最大剪應力。（提示：將垂直與水平載重合成一個單一而作傾斜方向的合力，然後將該力所生的應

力與由轉矩所生的應力相結合）。

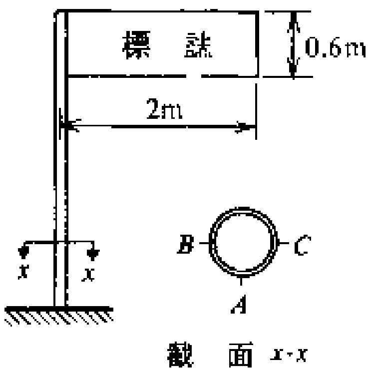


習題圖 5.9-2

5.9－3　示於圖 5－31a 的實心圓桿，支承一力 $Q=8$kN 及一轉矩 $T=1$kNm 。桿件的半徑爲 100mm 。計算桿件頂面在 A 點的主應力，假定從 A 點至桿件負荷端之距離爲 1.25m 。

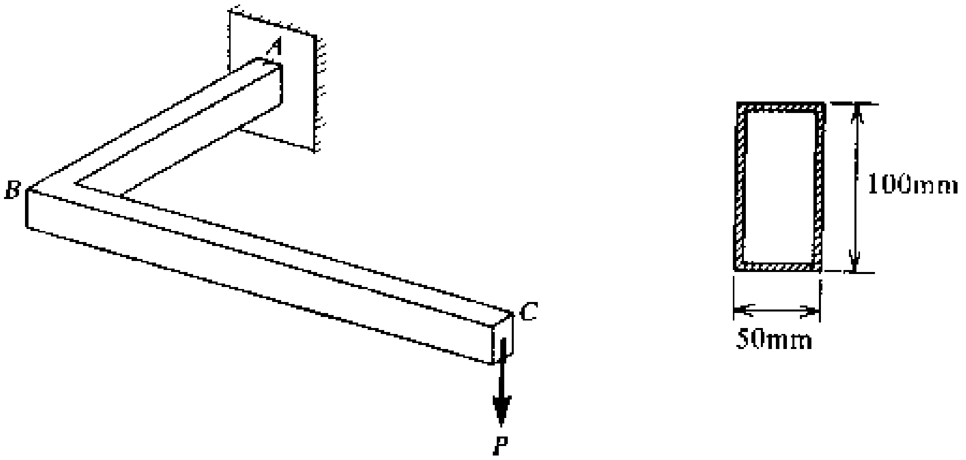
5.9－4　一個外直徑 50mm，極慣性矩爲 $250\times10^{3}\text{mm}^{4}$ 之空心管，被支承如圖 5－31a。其所受之轉矩 $T=200$Nm ，及側面載重 $Q=$ 500N 。假定從 A 點至桿件負荷端之距離爲 1 m 。求在頂面 A 點的主應力及最大剪力。

5.9－5　加于一塊標誌上的風壓爲 1kN/m^2 。該標誌由一管狀物所支持（見習題圖 5.9－5）。該管外直徑爲 100mm ，內直徑爲 90mm ，標誌之尺寸爲 2m× 0.6m ，其下邊在柱脚之上爲 2.2 m 。試求該管在管底之 A、B 及 C 各點由于受風壓所生的最大剪應力。



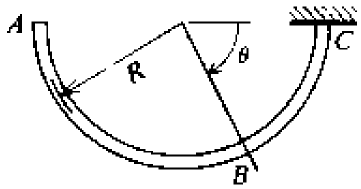
習題圖 5.9-5

5.9－6　一個 L－型的托架，位于水平位置，支持一載重 $P=1.6$kN（見習題圖 5.9－6）。該托架的截面爲一矩形空心管，其外邊尺寸爲 50mm × 100mm 。管壁之厚爲 2mm 。AB 臂之長度爲 250mm 及 BC 爲 500mm 。試求在支點處的托架頂面上 A 點的主應力。



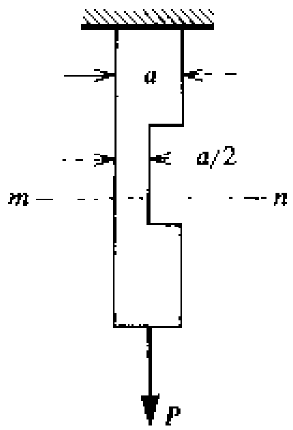
習題圖 5·9-6

5.9－7　一個半圓形桿件 ABC，位于一水平面內，支承於 C 點（見習題圖 5.9－7）。桿件之半徑爲 R，單位長度之重量爲 q（桿之總重爲 πqR）。試求由 θ 角所限定的截面 B 處的彎力矩 M、剪力 V 及扭曲偶力 T 諸公式。



習題圖 5·9-7

5.10－1　一根正方桿件的橫截面面積在 mn 截面處被減少一半如習題圖 5.10－1 所示。求在該桿減小截面處，由于 P 力所生的最大拉應力及最大壓應力。

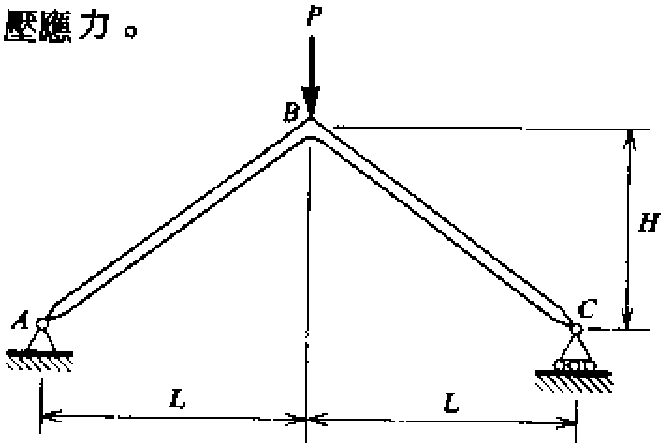


習題圖 5·10-1

5.10－2　假如前題的桿件爲一圓形截面，試解之。

5.10－3　一個圓形筒狀之塔，其高度爲 h，內直徑 d_1 及外直徑 d_2，開始輕微地傾斜。爲使塔內不產生拉力，該塔與垂直綫所成的最大許可傾斜角 α 爲何？（考慮的惟一載重爲該塔本身重量。）

5.10－4　一個 ABC 構架，由兩根鋼管在 B 點銲接而成。各管的截面積 $A = 10.4 \times 10^3 \text{ mm}^2$，慣性矩 $I = 88.2 \times 10^6 \text{mm}^4$，外直徑 $d = 270\text{mm}$。假如 $P = 14\text{kN}$，$L = 2.4$ m及 $H = 1.8$ m。求該構架內之最大拉應力及最大壓應力。



習題圖 5-10-4

5.10－5　一個短的 $127 \times 64 \times 14.9$kg 槽型截面（見附錄 C）柱，受一軸向壓力 P，其作用綫在槽鐵腹鈑之重心上。基於容許壓應力 80N/mm²，求其容許載重 P。

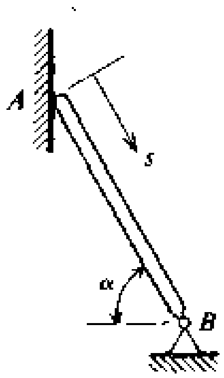
5.10－6　假定圖 5－23a 所示之樑，有一寬爲 b 高爲 h 的矩形截面。當 Q 與 T 的作用方向如圖所示，可看出位于距左端 x 距離的任一橫截面的中性軸將在該截面重心以上。設 s 爲自重心至中性軸的距離。(a)當 $Q = T$ 時，求一 s 以 x 爲函數的公式。(b)若 $L = 1$ m及 $h = 50$mm，以 $0 \leq x \leq L$ 爲範圍，繪一 s 過程綫。

5.10－7　一高 1.2 m厚 300mm 之混凝土牆，設于堅固的基礎上，作爲小型水壩用。(a)當水面達到牆頂時，求該牆的最大與最小應力。（注意：假定混凝土重爲 22.8kN/m³）(b)假如希望混凝土內無拉力，則水之最大容許深度 d 爲若干？

5.10－8　一根實心圓截面桿件受 26kN 的軸向拉力，與 3kNm 的彎力矩。基於一項，120N/mm² 的容許拉應力，該桿件所需的直徑爲若干？

5.10－9　一根實心圓桿 AB 設鉸連在 B 端，並在 A 點（見圖）支靠於光滑的垂直面上（無摩擦力）。求距 A 點 s 距離處的截面。該處由于桿件

自重所生的壓應力爲最大。(設 L = 長度，d = 直徑，及 α = 桿軸與水平所成之角)。



習題圖 5.10-9

5.10-10　由 102mm × 102mm × 17.4mm 角鐵(見附錄 C)所造成的拉力構材(member)，受一拉力載重 P = 100kN。該力的作用線通過角鐵兩邊中線的交點。該構材的最大拉應力爲若干？

5.10-11　由一 203 × 203 × 86kgUC 斷面(見附錄 C)造成的短柱，受一壓力載重 P = 180kN。該力作用於截面外隅角之一。求柱內的最大拉應力與最大壓應力。

5.10-12　證明一圓截面(半徑 r)的核心爲一半徑 $r/4$ 的同心圓。

5.10-13　證明一外半徑 r_2 及內半徑 r_1 的空心圓截面之核心，爲一半徑 $r = (r_2^2 + r_1^2)/4r_2$ 之圓。又，當 r_1 趨近於 r_2 及截面成一細環形時，該核心半徑之極限值爲若干。

5.10-14　求邊長爲 b 之等邊三角形横截面的核心。

5.10-15　求邊長爲 b 之正方形薄管横截面的核心。

5.10-16　求一 203 × 203 × 60kgUC 斷面鋼材(見附錄 C)之核心。

第六章　樑之撓度

6．1　撓曲線之微分方程式

作用在樑上的橫向載重，將引起該樑發生撓曲，並因此使該樑的縱向軸變形成一條曲線。在工程慣例中，常需決定順沿樑曲線若干點上的撓度。例如將在下一章中加以解說者。撓度的計算對於靜不定樑的分析實爲必不可少者。另外一個實例發生於房屋設計中，其中對於最大撓度之量，常硬性規定一個上限界。

讓我們考慮示於圖6－1 a內的 AB 簡支樑，作討論樑之撓度開始。在載重 P 加於樑上之前，該樑的縱向軸爲筆直的。在彎曲之後，樑的縱向軸即改變成一條曲線，如 ACB 所代表的形狀。和我們在以前對彎曲討論一樣

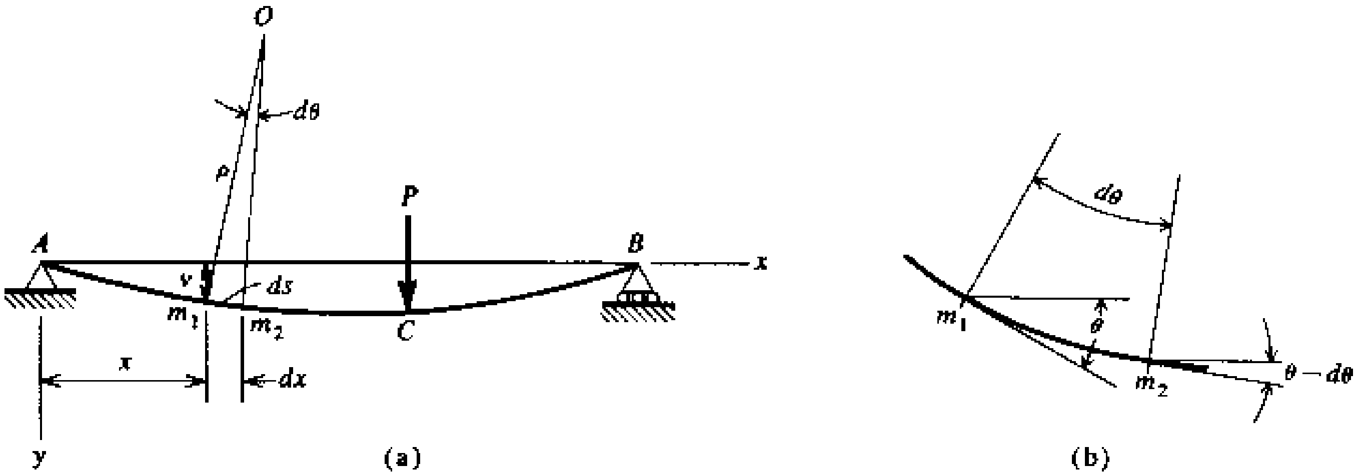


圖6．1　一根彎曲樑之撓曲線

。假設 xy 平面爲該樑的一個對稱平面，所有一切載重均作用於此一平面內。於是曲線 ACB，即被稱爲該樑的撓曲線（ deflection curve ），亦將在此平面內。

爲導出此撓曲線的微分方程式，將利用其曲線 κ 及彎力矩 M 間的關係(

見方程式5－9）。

但在此處，我們必須認清一項事實，即撓曲軸（deflected axis）的撓度的正負號習慣，與所選用的座標方向有關。當 x 軸的方向假定向右者爲正，與 y 軸的方向假定向下者爲正，如圖6－1a 之所示情形。則樑向下凹者樑軸線的曲度爲正。反之，樑向上凹者樑軸線的曲度爲負。因此，圖6－1a 之樑，係具負曲度而彎曲的。若繼續採用彎力矩 M，在樑頂產生壓力者爲正的正負號慣例，則可觀察到一個正彎力矩將產生負曲度，而一個負彎力矩將產生正曲度。因此我們將重寫方程式（5－9）如下

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \tag{6-1}$$

介於曲度 κ 及撓度曲線方程式間的關係。至此，可由考慮中間距離爲 ds 的兩點 m_1 及 m_2 而獲得（見圖6－1a）。在此兩點上，各別畫一垂直於該曲線正切線的正交線；這兩條正交線將相交於曲度的中心點 O。在撓曲線 m_1 點處的正切線，係假設與 x 軸成一 θ 角（圖6－1b）。在 m_2 點處，與其相當之角爲 $\theta - d\theta$，其中 $d\theta$ 代表在正交線 Om_1 與 Om_2 間的角度。並且也可以從該圖內看出 $ds = \rho d\theta$ 及 $1/\rho = d\theta/ds$。因此曲度 κ 係等於與沿撓度曲線量得的距離 s 有關之角 θ 的改變率：即

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{6-2}$$

在圖6－1b 內的曲度 $d\theta/ds$ 的數量係負值。當我們順沿該撓曲線從左向右移動時，角 θ 將逐漸減小。

大多數實際設計例中，僅有極微小的撓度發生。因此，該撓曲線將很平緩，且 θ 角及該曲線的傾斜度均爲很小數量。因此可以假設

$$ds \approx dx \qquad \theta \approx \tan\theta = \frac{dv}{dx} \tag{6-3}$$

式中之 v 爲樑的撓度。從其原來位置起量（見圖6－1a）。將兩式代入方程式（6－2）內，可得

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{6-4}$$

再與方程式（6－1）合併而得

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI} \tag{6-5}$$

即爲樑的撓曲線基本微分方程式。在每個特殊情形下，必須求其積分才能定出撓度 v 值。

用在方程式（6－5）的正負號慣例如下：(1) x 軸及 y 軸具有圖6－1a 的正方向，即向右及向下者爲正；(2)在 y 的正方向內，撓度 v 的方向亦爲正；及(3)樑的頂部產生壓力時，其彎力矩 M 爲正。若 v 或 M 的正負號慣例與此相反（例如向上的 v 爲正）則在方程式（6－5）內的（－）號便應改爲（＋）號。由於對 x 求方程式（6－5）的微分，然後將此兩個方程式 $q=-dV/dx$ 及 $V=dM/dx$ 代入（見方程式4－1及4－2）可得

$$\frac{d^3v}{dx^3}=-\frac{V}{EI} \tag{6-6}$$

$$\frac{d^4v}{dx^4}=\frac{q}{EI} \tag{6-7}$$

撓度 v，可由（6－5）至（6－7）各方程式中的任一個均可解得。視 M、V 或 q 各值中的那一個爲已知而定。亦有視在數學上的方便而定。剪力 V 及載重 q 的正負號慣例示於圖4－6a 內。

爲了在以後的討論中求簡單起見，我們將用(1)的符號以表示微分階數；例如

$$v'\equiv\frac{dv}{dx}\qquad v''\equiv\frac{d^2v}{dx^2}\qquad v'''\equiv\frac{d^3v}{dx^3}\qquad v''''\equiv\frac{d^4v}{dx^4} \tag{6-8}$$

採用此種符號，即可將上面所提出的各個微分方程式用下列形式來表示

$$EIv''=-M\qquad EIv'''=-V\qquad EIv''''=q \tag{6-9a,b,c}$$

在以下兩個項目中，將利用這幾個方程式來求樑的撓度。其程序係由連續求出以上各方程式的積分而完成之。所得的積分常數，則由該樑的邊界狀況定得。從各個方程式的誘導，我們看出，僅在可以適用胡克氏定律的材料，及撓曲線的傾斜很小時，始爲正確無誤。並且應當認清，各方程式僅考慮因純彎曲所致的變形，並將剪力變形略去不計而誘導所得。此種限制，對於大多數實際應用爲目的可滿足其需要。在很少見的情形，可能需要

考慮到由剪力效應所致的另外增加的撓度。

曲度的精確式

若樑的撓曲線具有很大的傾斜度時，我們就不能採用方程式（6－3）所提供的簡化解法。我們必須採用樑的軸線旋轉角 θ 與其傾斜度 v' 有關的精確式

$$\tan\theta = v' \quad 或 \quad \theta = \arctan v'$$

於是

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\arctan v')}{dx}\frac{dx}{ds}$$

但因 $ds^2 = dx^2 + dv^2$，因此得

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = [1 + (v')^2]^{1/2}$$

又因

$$\frac{d}{dx}(\arctan v') = \frac{v''}{1 + (v')^2}$$

我們可得

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \tag{6-10}$$

將此式與方程式（6－4）作一比較，我們可以看出，一個平坦的撓曲線中，若將 $(v')^2$ 這一項與 1 相比其值太小，故將其略去不計。如此可使方程式（6－10）內的分母等於 1。如在求解問題中含有很大撓度的樑，（見第 6.12 節）則其曲度計算應採用方程式（6－10）。*

6.2 簡支樑

現在讓我們用撓曲線的微分方程式求簡支樑的撓度。設該樑負荷強度爲 q 的均佈載重（見圖 6－2），在距左端支承距離 x 處的彎力矩，寫成 $M = qLx/2 - qx^2/2$，由方程式（6－9a）可得

$$EIv'' = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

---

* 基本關係述及樑的曲度與彎力矩成比例，（見方程式 6－1）首由 Jacob Bernoulli 求得，雖然彼曾對比例常數獲得一不正確值。此項關係，在後由 Euler 氏採用，氏對於大撓度（用方程式 6－10 求曲度）及微小撓度（用方程式 6－5）等兩種情形，均解出其撓曲線的微分方程式。關於彈性曲線的沿革，見參考書 6－1。

將方程式兩側各乘 dx，並求其積分，得

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1 \tag{a}$$

式中之 C_1 爲一積分常數。爲求此常數值，可對稱關係看出，在跨徑中央撓曲線的傾斜度爲零。因此可得下列的條件式

當在 $x = L/2$ 時，$v' = 0$

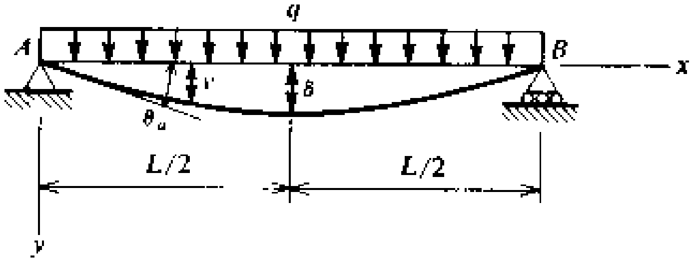


圖6.2　一根負荷均佈載重簡支樑之撓度曲線

此項條件，可簡明的表示如下

$$v'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

將此項條件應用到方程式(a)內得

$$C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

於是方程式(a)化爲

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24} \tag{6-11}$$

再將此方程式的兩側各乘 dx 並求其積分，可得

$$EIv = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{24} + C_2 \tag{b}$$

積分常數 C_2 可由，當 $x = 0$ 時，$v = 0$ 這個條件求得。該條件又可寫成下式

$$v(0) = 0$$

應用此一條件於方程式(b)，產生 $C_2 = 0$；因此撓度（方程式 b ）方程式爲

$$v = \frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) \tag{6-12}$$

由該方程式可求沿該樑任何點上的撓度。最大撓度 δ 發生於跨徑的中點，應用方程式（6－12），以 $x = L/2$ 代入求得之，其結果爲

$$\delta = v_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \tag{6-13}$$

最大傾斜度將發生於樑的任何一端。在樑的左端（即 $x = 0$），可從方程式（6－11）* 得

$$\theta_a = v'_{max} = \frac{qL^3}{24EI} \tag{6-14}$$

求簡支樑負均佈載重的撓曲線的另一誘導方法，可從四階微分方程式（方程式 6－9c）開始；即

$$EIv'''' = q$$

連續求該方程式的積分，可得到下列各式

$$EIv''' = qx + C_1$$

$$EIv'' = \frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2$$

$$EIv' = \frac{qx^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$EIv = \frac{qx^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$

爲求得各積分常數的數值，需要有四個限界條件。在樑的兩端撓度及彎力矩均爲零。由此成立四個條件式如下

$$v(0) = v(L) = 0 \qquad v''(0) = v''(L) = 0$$

從這些條件，可得

$$C_1 = -\frac{qL}{2} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{qL^3}{24} \qquad C_4 = 0$$

將這以上諸常數值代入上述諸撓度公式，得

* 因樑的撓度假設爲很小的，故傾斜度 v' 可使其等於旋轉角 θ。如在方程式（6－3）內所示的情形。

$$EIv=\frac{qx^4}{24}-\frac{qLx^3}{12}+\frac{qL^3x}{24}$$

此一結果與解二階微分方程式所得的方程式（ 6 － 12)相符。

現在讓我們再考慮一根負荷單一集中載重 P 的簡支樑（見圖 6 － 3 ）。載重的位置係由距兩端的 a 及 b 距離定出。在本例中，對彎力矩有兩個不同式子，一個係對樑在載重左側部分，另一爲對樑在載重右側部分。因

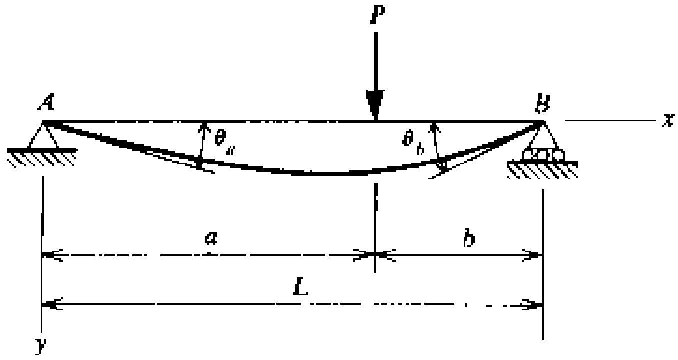


圖 6 · 3　負單一集中載重之簡支樑

此我們必須爲樑的每一部分分別寫出方程式（ 6 － 9a ）

$$EIv''=-Pbx/L \qquad (0\le x\le a)$$

$$EIv''=-Pbx/L+P(x-a) \qquad (a\le x\le L)$$

求這兩個方程式的積分，得

$$EIv'=-Pbx^2/2L+C_1 \qquad (0\le x\le a) \tag{c}$$

$$EIv'=-Pbx^2/2L+P(x-a)^2/2+C_2 \qquad (a\le x\le L) \tag{d}$$

再求其第二次積分，得

$$EIv=-Pbx^3/6L+C_1x+C_3 \qquad (0\le x\le a) \tag{e}$$

$$EIv=-Pbx^3/6L+P(x-a)^3/6+C_2x+C_4 \qquad (a\le x\le L) \tag{f}$$

在以上幾個方程式內出現的四個積分常數，可從下列條件求得之：(1)在 $x=a$ 時，樑的兩部分的傾斜度必須相等；(2)在 $x=a$ 時，樑的兩部分的撓度必須相等；(3)在 $x=0$ 時，撓度爲零；及(4)在 $x=L$ 時，撓度爲零。從第一個條件，我們可看出(c)及(d)兩個傾斜度式子在 $x=a$ 時，必須相等。由此得

$$-Pba^2/2L+C_1=-Pba^2/2L+C_2$$

由此式，可得 $C_1 = C_2$。第二個條件意指在 $x = a$ 時，可使(e)及(f)兩式相等。

$$-Pba^3/6L + C_1a + C_3 = -Pba^3/6L + C_2a + C_4$$

由此式可得 $C_3 = C_4$。最後，在分別將(3)及(4)兩個條件應用在(e)及(f)兩式時，可得

$$C_3 = 0 \quad 與 \quad -PbL^2/6 + Pb^3/6 + C_2L = 0$$

從以上所得的結果，我們可以看出

$$C_1 = C_2 = Pb(L^2 - b^2)/6L \qquad C_3 = C_4 = 0$$

將這些數值代入方程式(e)及(f)內，即可得到撓曲線方程式

$$EIv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) \qquad (0 \le x \le a) \tag{6-15a}$$

$$EIv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \qquad (a \le x \le L) \tag{6-15b}$$

此兩個方程式的第一個，是樑在載重 P 左側部分的撓曲線；而第二個是樑在載重 P 右側部分的撓曲線。樑的兩部分的傾斜度，可由 C_1 及 C_2 值代入方程式(c)及(d)式內得

$$EIv' = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2 - 3x^2) \qquad (0 \le x \le a) \tag{6-16a}$$

$$EIv' = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \qquad (a \le x \le L) \tag{6-16b}$$

由這兩個方程式，在樑上任何一點的傾斜度均可計算。若求在樑之兩端的旋轉角，可將 $x = 0$ 代入方程式（１－16a）內，並將 $x = L$ 代入方程式（６－16b）內，且以 θ_a 及 θ_b 表示樑的兩端的角度，（見圖６－３），得成立

$$\theta_a = v'(0) = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L + b)}{6LEI} \tag{6-17a}$$

$$\theta_b = -v'(L) = \frac{Pab(L + a)}{6LEI} \tag{6-17b}$$

該樑的最大撓度將發生在撓曲線具有水平切線之點上。若 $a > b$，最

大撓度將發生在樑的左側部分（介於 $x=0$ 與 $x=a$ 之間）可由方程式（6－16a）得到的傾斜度 v'，使之等於零而求得其位置。將樑的 A 端至發生最大撓度點的距離以 x_1 代表，由方程式（6－16a）得

$$x_1=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}} \qquad (a\geq b) \tag{6-18}$$

由此方程式可以看出，當載重 P 自樑的中點（$b=L/2$）向右端（b 逐漸接近 0）移動時，則距離 x_1 將從 $L/2$ 變至 $L/\sqrt{3}=0.577L$。因此我們可以看出，最大撓度將永遠發生在很靠近樑的中心處。最大撓度的本身可由 x_1 值（從方程式 6－18 得來）代入方程式（6－15a）而得

$$v_{\max}=\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,LEI} \qquad (a\geq b) \tag{6-19}$$

在樑中間的撓度，可由 $x=L/2$ 代入方程式（6－15a）而得

$$v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{Pb(3L^2-4b^2)}{48EI} \qquad (a\geq b) \tag{6-20}$$

因最大撓度永遠發生在靠近樑的中間處，方程式（6－20）可爲最大撓度提供一個良好的近似值。在最不利的情形下（當 b 逐漸近於零時），介於最大撓度值及樑中間的撓度值之差，將小於最大撓度的百分之三。

當載重 P 設在樑之中間時（$a=b=L/2$），則在以前所得之結果，將得一較爲簡單的形狀如下式

$$\theta_a=\theta_b=\frac{PL^2}{16EI} \qquad v_{\max}=v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{PL^3}{48EI} \tag{6-21a,b}$$

6．3 懸臂樑

圖 6－4 內所示爲一懸臂樑，在其左端爲固定，並負荷強度 q 的均佈載重。爲獲得此樑的撓曲線方程式起見，可應用與用在簡支樑相同的方法

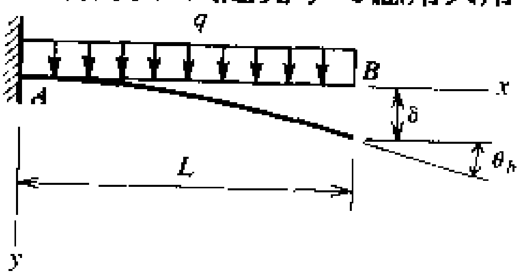


圖 6．4　負均佈載重之懸臂樑

，即解（６－９）式中三個微分方程式的任何一個。若開始用彎力矩的二階微分方程式（方程式６－９a），得

$$EIv'' = -M = q(L-x)^2/2 \tag{a}$$

由該方程式作第一積分，得

$$EIv' = -q(L-x)^3/6 + C_1$$

積分常數 C_1 可從支承點處樑的傾斜度爲零這個條件求得。因此，我們有 $v'(0)=0$ 這個條件可用，由此可得 $C_1 = qL^3/6$ ，而

$$v' = \frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2) \tag{6-22}$$

求上式的積分，可得

$$v = \frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) + C_2$$

在支承處撓度的限界條件爲 $v(0)=0$ ，此式表示 $C_2 = 0$ 。因此，撓曲線方程式爲

$$v = \frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \tag{6-23}$$

在樑之自由端的旋轉角 θ_b 及撓度 δ（圖６－４）可由 $x = L$ 代入方程式（６－22）及（６－23）內，很容易得到下列兩式

$$\theta_b = v'(L) = \frac{qL^3}{6EI} \qquad \delta = v(L) = \frac{qL^4}{8EI} \tag{6-24a,b}$$

分析此懸臂樑，若用剪力的微分方程式（方程式６－９b），開始由 $V = q(L-x)$ 式成立

$$EIv''' = -qL + qx \tag{b}$$

求上式的積分，得

$$EIv'' = -qLx + qx^2/2 + C_1$$

因在 $x = L$ 時，彎力矩 M 爲零。有了 $v''(L) = 0$ 這個限界條件；於是 $C_1 = qL^2/2$，而

$$EIv'' = -qLx + qx^2/2 + qL^2/2$$

此式與方程式(a)相同。解法的剩餘部分，可照前例進行。

另外一個辦法，由四階微分方程式開始（方程式６－９c）

$$EIv'''' = q$$

作一次積分得

$$EIv''' = qx + C_1 \tag{c}$$

因在 $x = L$ 時剪力爲 0，故限界條件成爲 $v'''(L) = 0$。由此式可得 $C_1 = -qL$。將此 C_1 式代入(c)式，此方程式將與(b)式完全相同。此解法的剩餘部分，將如前述亦爲相同。

選擇那一個微分方程式以求撓度，通常視爲屬於數學的便利，或個人的偏好問題。

6。4 力矩——面積法

另外一種求樑撓度的方法，是力矩－面積法（moment-area method）。爲求樑上某一點的撓度或傾斜度，而非求撓曲線的完全方程式時特別合用。此法的名稱來自此一事實。在此方法中，係利用彎力矩圖的面積之故。

設某樑的撓曲線的 AB 部分，（見圖 6－5）。介於 A 及 B 兩點間的彎力矩圖一併示於該圖內。樑的兩個截面 m_1 及 m_2 相離的距離爲 ds，

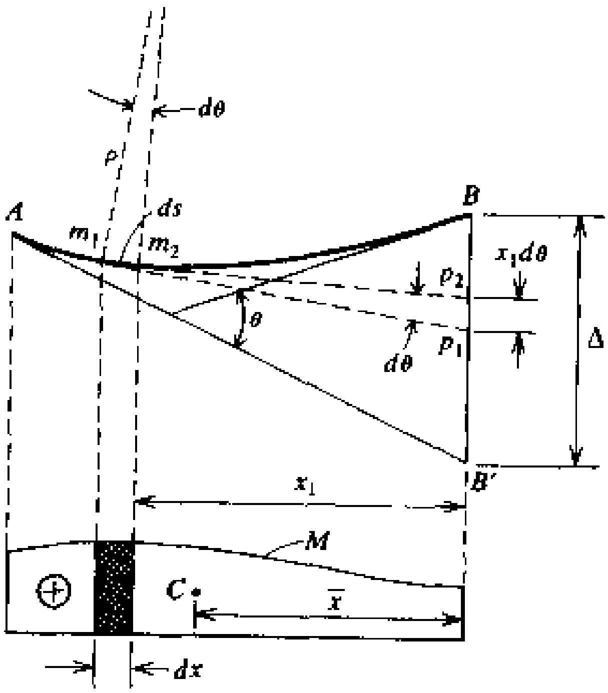


圖 6．5　力矩－面積法

在彎曲後，將以一個 $d\theta$ 角相交。此 $d\theta$ 角則等於 ds/ρ 而 ρ 則爲曲度的

半徑。將方程式（6－4）及（6－5）合併，且只用其絕對值，可寫成下式

$$d\theta = \frac{M\,dx}{EI} \tag{6-25}$$

借助圖6－5，此一關係可提供一種簡單的幾何解釋如下。$m_1 p_1$ 線爲撓度曲線在 m_1 點的切線，而 $m_2 p_2$ 線則爲在 m_2 點的切線，在這兩條切線間的夾角爲 $d\theta$。依照方程式（6－25），此 $d\theta$ 角等於彎力矩圖內的面積 $Md\,x$（在圖內用粗斜格劃線部分）除以撓曲剛度（flexural rigidity）EI。

若現在求方程式（6－25）介於 A、B 兩點間的積分，即得在撓度曲線 A、B 兩點切線間的總角度 $\theta = \int_A^B \frac{M\,dx}{EI}$　(6-26)

在此方程式內的積分值，即代表 A、B 兩點間彎力矩圖的全部面積除 EI。因此，得到下列的定理。

力矩－面積第一定理：在撓度曲線 A、B 兩點之切線間的角度 θ，等於彎力矩圖內介於此兩點間的面積除以 EI。

用於該定理的正負符號慣例是：(1)正彎力矩在樑頂產生壓力，及(2)當在 B 點的切線就其與 A 點切線之關係，依反時針走向而旋轉者，則 θ 角爲正，如圖6－5所示之情形。若在 A、B 兩點間的彎力矩圖有一部分爲正有一部分爲負時，必須在與負彎力矩有關聯的那一部分面積上加一負號。

下一步，在 B 點的撓度 Δ，與在 A 點的切線 AB' 的關係，（圖6－5）。要牢記，此 θ 角爲一很小的數量，我們可從圖內觀察到元體 $m_1 m_2$ 因彎曲而對距離 Δ 所作的貢獻爲 $x_1 d\theta$，其中 x_1，爲從該元體至 B 點的距離。該微小距離 $x_1 d\theta$ 等於

$$x_1 \frac{M\,dx}{EI}$$

可用幾何解釋如下：畫粗斜格的面積 $Md\,x$ 在通過 B 點的垂直線上所取的第一力矩除 EI。再求 A 點至 B 點的積分，即可獲得總撓度 Δ 值

$$\Delta=\int_A^B x_1\frac{M\,dx}{EI} \tag{6-27}$$

在該方程式內的積分值，代表彎力矩圖內 A、B 兩點間的面積與 B 點有關的第一力矩除 EI 。因此我們可將第二定理陳述如下

力矩－面積第二定理：自 A 點的切線起量，B 點的撓度等於彎力矩圖內介於 A、B 兩點間的面積，對 B 點的第一力矩除 EI 。

如果要求該面積的第一力矩，可將該面積乘以自 B 點至其重心 C 間距離 $\bar{x}$ 之積而求得之。當彎力矩爲正時，應當把該面積當作正的，而在彎力矩爲負時也應當把該面積當作負的。應注意一塊正面積（因此亦爲正的第一力矩），意指 B 在 A 點的切線以上，至於負力矩則指 B 在該切線以下。

在實際問題中所常遇的彎曲力矩面積，其形狀均係簡單的幾何圖形，如矩形、三角形及拋物線形等類。此類圖形的面積及其重心距離已表列於附錄 B 內。

現在提供幾個例題以說明利用力矩－面積定理求取樑的旋轉角（ angles of rotation ）及撓度的方法。*

【例題】1　試決定一負荷集中載重 P 的懸臂樑，在其自由端上的旋轉角 θ_b 及撓度 δ 。（見圖 6－6 ）彎力矩圖之形狀爲三角形，示於圖之下部。

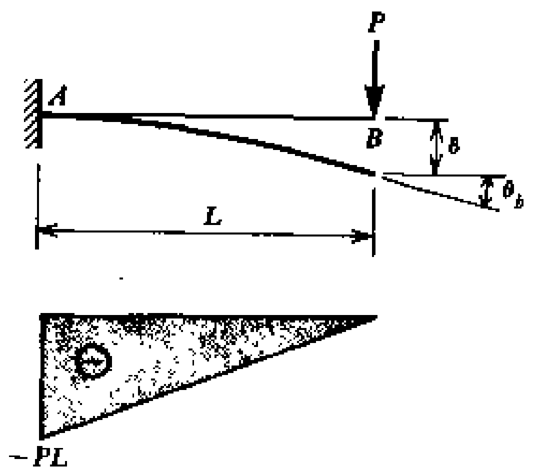


圖 6.6　例題 1　具單一集中載重之懸臂樑

* 力矩－面積方法係由聖范南（ Saint-Venant ）氏開始使用。（見參考書 6－6 及 6－7 ）這兩個方法由摩爾（Mohr ）氏（見參考書 6－8 及 6－9 ）與葛蘭（ Greene ）氏（見參考書 6－10） 廣爲推闡。

從力矩面積第一定理，可觀察得，在A、B兩點的旋轉角之差，等於彎力矩圖的面積除EI。此面積爲$-PL^2/2EI$。減號意指在B點的切線係自A點之切線（成水平的）作順時針走向而旋轉者。於是，旋轉角θ_b其值爲正，如圖所示之情形爲

$$\theta_b=\frac{PL^2}{2EI}$$

在樑端之撓度δ，可應用第二定理獲得。從A點的切線至撓曲線上B點的距離Δ，等於彎力矩面積對B點所取的第一力矩除EI

$$\Delta=-\frac{PL^2}{2EI}\left(\frac{2L}{3}\right)=-\frac{PL^3}{3EI}$$

式中負號，意指在撓曲線上的B點，係在A點切線之下。因此撓度δ爲

$$\delta=\frac{PL^3}{3EI}$$

【例題】2　試求一懸臂樑其中一部分負荷強度q的均佈載重，在其自由端的撓度δ　（見圖6－7）。

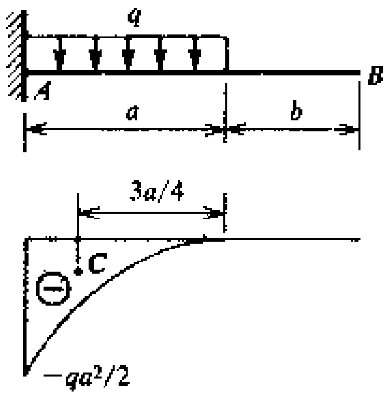


圖6・7　例題2　懸臂樑在跨徑一部分負均佈載重

如上例所示，在樑端的撓度δ，其數值與彎力矩圖內的面積對B點取第一力矩除EI相同。二次拋物線形的一般形狀如圖所示，其重心距離爲$3a/4$，其面積爲（$qa^2/2$）（$a/3$），一如在附錄B內第11種情況。其δ式爲

$$\delta=\frac{qa^2}{2EI}\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{3a}{4}+b\right)=\frac{qa^3}{24EI}(3a+4b)$$

【例題】3　有一集中載重P作用在簡支樑AB上。試求在撓曲線A點上的旋轉角θ_a，在載重P下的撓度δ，及該樑的最大撓度。

為求A點的旋轉角度，首先注意到θ_a是等於距離BB'除樑的長度L。距離BB'係B點的撓度。從A點的切線起量，因此，其值可從B點取彎

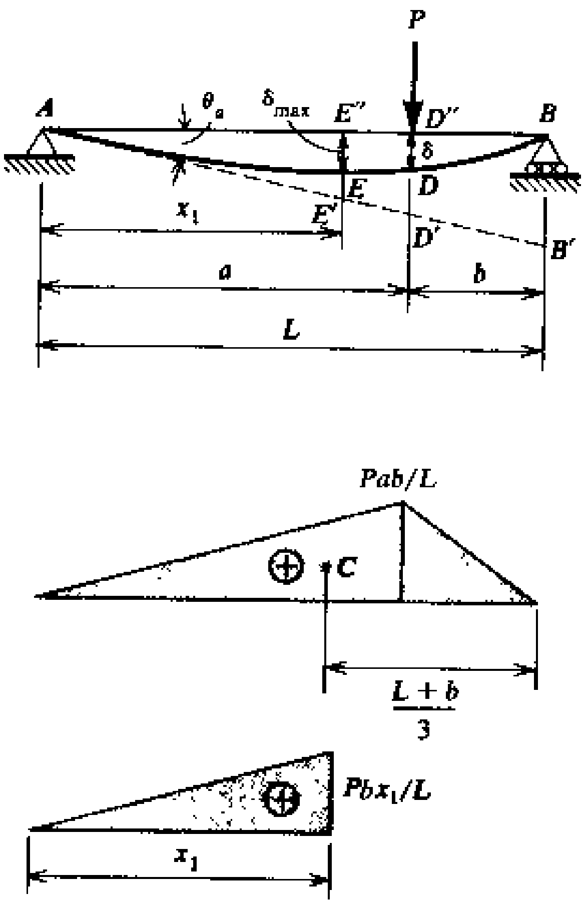


圖6.8　例題3　具單一集中載重之簡支樑

力矩面積的第一力矩再除EI求得。力矩圖的面積為$Pab/2$，其重心C距B點的距離為$(L+b)/3$，一如附錄B內的第3種情況。於是

$$BB'=\frac{Pab}{2EI}\left(\frac{L+b}{3}\right)=\frac{Pab}{6EI}(L+b)$$

彎力矩面積為正，意指B在切線之上，一如預期情況。最後可得

$$\theta_a=\frac{Pab}{6LEI}(L+b)$$

在載重P下的撓度δ，可當作從距離$D''D'$中減去距離DD'求得（見圖）。距離$D''D'$等於$a\theta_a$。距離DD'等於從A點的切線起量得D點的撓度，

此值可用力矩－面積第二定理求得。

$$DD' = \frac{Pab}{LEI}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{Pa^3b}{6LEI}$$

於是可得 δ 值為

$$\delta = a\theta_a - \frac{Pa^3b}{6LEI} = \frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

該樑的最大撓度發生在 E 點。在該處的撓曲線有一條水平切線。在 A、E 兩點切線間的角度 θ，等於在 A 及 E 點間的力矩圖面積（示於圖之最後一部分）除 EI。這個角度與 θ_a 角相同。因在 E 點的傾斜度為零之故。於是可得

$$\theta_a = \frac{x_1}{2}\left(\frac{Pbx_1}{LEI}\right) = \frac{Pbx_1^2}{2LEI}$$

式中的 x_1 為從 A 點至最大撓度點間的距離。將 θ_a 的式子代入該方程式內，求解 x_1 得

$$x_1 = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

最大撓度 δ_{max} 可得

$$\delta_{max} = E''E' - EE' = x_1\theta_a - \frac{Pbx_1}{LEI}\left(\frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1}{3}\right) = \frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI}(L^2 - b^2)^{3/2}$$

代替此種辦法，可由觀察 δ_{max} 是等於彈性曲線 E 點之切線以上的 A 點撓度，故容易求得其值。此撓度，是對 A、E 兩點間的彎力矩面積。在 A 點上所取的第一力矩除 EI；於是

$$\delta_{max} = \frac{x_1}{2}\left(\frac{Pbx_1}{LEI}\right)\left(\frac{2x_1}{3}\right) = \frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI}(L^2 - b^2)^{3/2}$$

與以前相同。以上的結果是指 $a \geq b$ 的情況而言。

6·5 重疊法

一根樑的撓度曲線微分方程式，為一線形微分方程式；亦即所有一切包括撓度 v 或其導數的各項，至多高到一次冪為止。此項事實意指，關於該方程式在各種不同載重狀況下之解，可重疊加在一起稱為重疊法（method of superposition）。於是，由幾個不同的載重同時作用所產生的樑之撓度，可由各載重分別單獨作用所產生的若干撓度，重疊加在一起而求得。例如 v_1 代表由於一個 q_1 載重所引起的撓度，v_2 代表由於另一

個 q_2 載重所引起的撓度，則由 q_1 及 q_2 同時作用所產生的總撓度爲 v_1

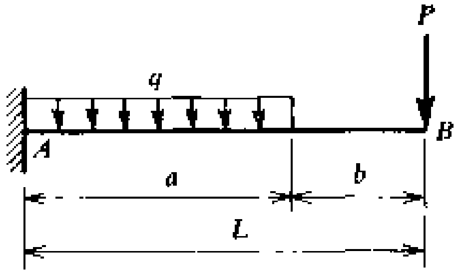


圖 6.9　負兩種載重之懸臂樑

$+ v_2$。爲說明這個理想，考慮如圖 6 − 9 所示的懸臂樑。此樑在其跨徑的一部分上負荷強度 q 的均佈載重，並有一個集中載重 P 作用在其末端。假想求出在自由端的撓度 δ_b。因爲載重 P 若單獨作用，則在 B 點的撓度爲 $PL^3/3EI$，如前一節內例題 1 所示。同樣，這項均佈載重，在 B 端的撓度爲 $qa^3(3a+4b)/24EI$，如前一節內例題 2 所得的結果。於是，由於合併載重而產生的撓度爲

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{qa^3(3a+4b)}{24EI}$$

在樑上任何一點的撓度及旋轉角，均可用同樣程序求得之。

在樑上的全部載重系統，先細分成幾種載重狀況，其中產生的撓度如爲已知，則重疊方法特別有用。例如剛在的例題所說明的情形。爲了在這種情況下利用方便起見，在附錄 D 內列有樑的各種撓度表。利用這幾個表及重疊方法，我們可求得樑在許多不同載重狀況下的撓度及旋轉角。在本節另備幾個此種型式的例題。

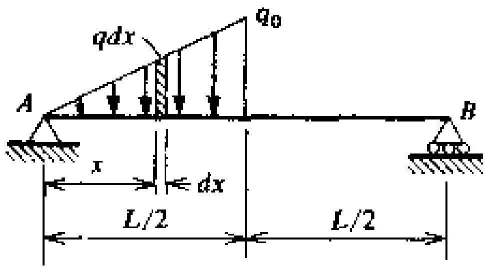


圖 6.10　負三角形分佈載重之簡支樑

由於將分佈載重的一個元體可當作一個集中載重加以考慮，再求整個載重區間的積分，故重疊方法也可用於分佈載重的情況。此一程序可從圖 6 － 10 所示之例題，很容易明瞭。在簡支樑 AB 上的載重，係按三角形分佈在該樑的左半孔，並假設在樑中點的撓度 δ 爲其所求者。分佈載重的一個元體 qdx 可視作一個集中載重。有一個集中載重 P 作用在樑左端 x 距離處，在樑中點所產生的撓度爲

$$\frac{Px}{48EI}(3L^2-4x^2)$$

此式係從附錄 D 附表 $D-2$ 的情況 5 內查得。將 qdx 當作 P 代入此式，並注意 $q=2q_0x/L$，可得撓度式爲

$$\delta=\int_0^{L/2}\frac{qx\,dx}{48EI}(3L^2-4x^2)=\frac{q_0}{24LEI}\int_0^{L/2}(3L^2-4x^2)x^2\,dx=\frac{qL^4}{240EI}$$

用與此相同的程式，將分佈載重的元體重疊一起，即可計算在樑左端的旋轉角 θ_a。由於集中載重所成的旋轉角式（見表 $D-2$ 之情況 5）爲

$$\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

在此方程式內，必須以 $2q_0xdx/L$ 代 P，以 x 代 a，以（$L-x$）代 b；於是得

$$\theta_a=\int_0^{L/2}\frac{q_0x\,dx}{3L^2EI}(x)(L-x)(2L-x)=\frac{41q_0L^3}{2880EI}$$

在以前各例題內，每一個必須應用重疊的概念以獲取各樑的撓度。此一概念可用重疊原理的形式陳述之。重疊原理在應用力學內廣被採用。無論何時，若所決定的數量爲所加載重的一個直線型的函數，用此原理即正確無誤。在如此條件下，所想得的數量可由每一載重分別單獨作用求得，再將其結果重疊加在一起以獲得全部載重同時作用所產生的總值。如爲樑的撓度，若該樑所用的材料可適合胡克氏定律，且樑之撓度很小，則重疊原理亦爲正確無誤。撓度很小這個必要條件，是將確保撓度曲線的微分方程式爲直線形的，且確保其載重及反力的作用線，不會由彼等原有位置改變到其他位置。

下列各例，對於利用重疊原理以計算樑的撓度，將提供更多的解說。

【例題】1　一根簡支樑在其兩端各有一個力偶 M_0 作用於樑上（見圖 6－11）。試求該樑兩端的旋轉角 θ_a 及 θ_b 及該樑中點的撓度 δ 公式。

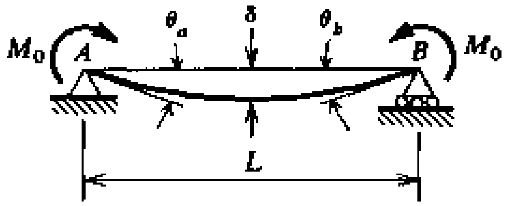


圖 6・11　例題 1　在兩端有力偶作用之簡支樑

應用附表 $D-2$ 內第 7 種情況，用重疊方法得

$$\theta_a=\theta_b=\frac{M_0L}{3EI}+\frac{M_0L}{6EI}=\frac{M_0L}{2EI}$$

與

$$\delta=(2)\frac{M_0L^2}{16EI}=\frac{M_0L^2}{8EI}$$

【例題】2　一根懸臂樑 AB，沿其長度在右側的一半負荷強度 q 的均佈載重，如圖 6－12 所示之情形。試求其自由端的撓度 δ_b 及旋轉角 θ_b。

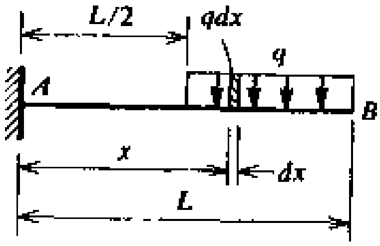


圖 6・12　例題 2　在懸臂樑之部份跨徑上負有均佈載重

從距支承為 x 處，此項載重的元體 $q\,dx$ 開始。此載重元體將在自由端上產生一個撓度 $d\delta$ 及一個旋轉角 $d\theta$，分別等於

$$d\delta=\frac{(q\,dx)(x^2)(3L-x)}{6EI}\qquad d\theta=\frac{(q\,dx)(x^2)}{2EI}$$

如在附表 $D-1$ 第 5 種的情況。將上列兩式分別求其積分，可得

$$\delta_b=\frac{q}{6EI}\int_{L/2}^{L}x^2(3L-x)dx=\frac{41qL^4}{384EI}$$

$$\theta_b = \frac{q}{2EI}\int_{L/2}^{L} x^2\,dx = \frac{7qL^3}{48EI}$$

與此相同的結果，可用附表 $D-1$ 內第三種情況的各公式，並將 $a=b=L/2$ 代入而簡化之，亦可獲得。

【例題】3　一根簡支樑，在其一端伸出部分承受載重如圖 6－13a 所示之情形。試求伸出部分末端的撓度。

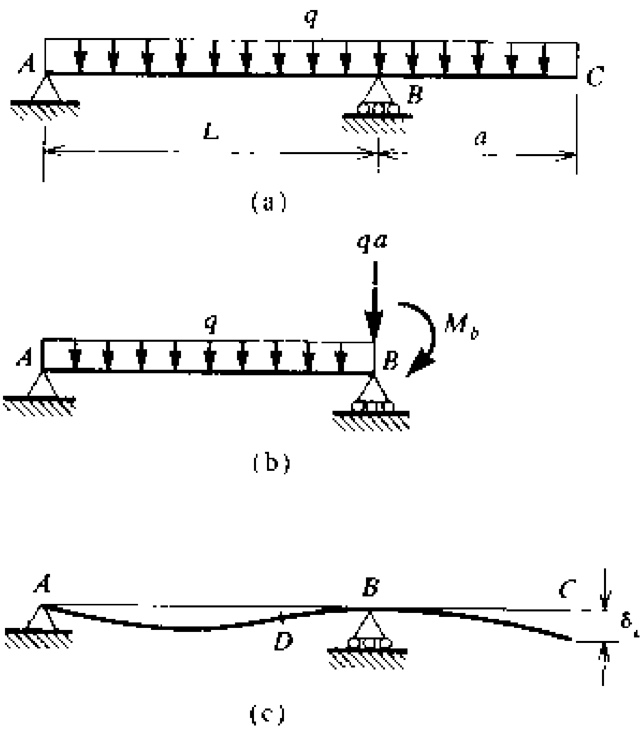


圖 6・13　具一段懸臂伸出部份之簡支樑

在 C 點的撓度係由兩部分構成：(1)一個撓度 δ_1 係因支承 B 處之樑軸的旋轉所引起者，及(2)一個撓度 δ_2，係因 BC 部分作用如一根懸臂樑所引起者。爲獲得第一部分的撓度，可觀察此樑的 AB 部分，係與一簡支樑負均佈載重，並承受其右端作用的一個力偶 M_b（等於 $qa^2/2$）及一個垂直載重如圖 6－13b所示（等於 qa）等三種處於相同的情況。在 B 端的 θ_b 角（見附表 $D-2$ 內第 1 及第 7 種情況）爲

$$\theta_b = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_bL}{3EI} = \frac{qL(L^2-4a^2)}{24EI}$$

在 B 點的旋轉所引起在 C 點的撓度 δ_1 等於 $a\theta_b$ 或

$$\delta_1 = \frac{qaL(L^2-4a^2)}{24EI}$$

當旋轉作反時針走向時，θ_b 假設爲正號，故其撓度若係向上，則爲正撓度。

伸出部分本身的彎曲，將在 C 點向下方向內發生撓度 δ_2。此一向下的撓度與長度 a 的懸臂樑之撓度相同（見附表 $D-1$ 的第 1 種情況）其值爲

$$\delta_2=\frac{qa^4}{8EI}$$

假設向下的爲正，則 C 點的全部撓度爲

$$\delta_c=\delta_2-\delta_1=\frac{qa}{24EI}(3a^3+4a^2L-L^3) \tag{a}$$

由此結果我們可看出，在 a 與 L 相較頗爲微小時，則撓度 δ 將成爲負撓度，C 點作向上的撓曲變位。

在本例題內，樑的撓曲線形狀如圖 6－13c 所示，當 a 大至足夠（大致爲 $a>0.43L$ 之情形）在 C 點產生一個向下的撓度，而又小至足夠確保在 A 點的反力係向上（$a<L$）的情況而繪出者。在這兩個條件下，從 A 點至一個如此的 D 點，使樑具正彎力矩，並在樑的這一部分之撓曲線，係向下凸出。自 D 至 C，彎力矩爲負號，而撓曲線則向上凸出。在 D 點，樑軸線之曲度爲零（因其彎力矩爲零），被稱爲迴折點（point of inflection）或迴轉點（point of contraflexure）。撓曲線的曲度在迴折點上改變其正負號。

【例題】4　試決定圖 6－14 內所示之結構，在鉸 B 處的撓度爲 δ_b。注意該結構係由兩部分構成：(1) AB 樑，簡支於 A 點，及(2)懸臂樑 BC 固

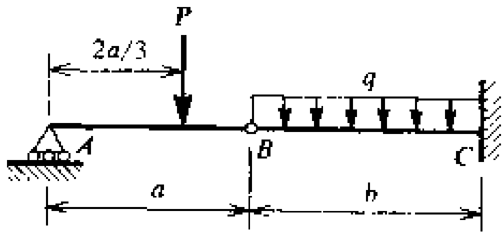


圖 6．14　例題 4　有鉸之樑

定於 C 點。兩根樑係用一個梢釘連接一起，稱爲鉸接（pin connection）。

將 AB 樑當作一個隔離體，可看出在 A、B 兩端，分別具有垂直反力 $P/3$ 及 $2P/3$。因此 BC 樑是一根懸臂樑，承受強度 q 的均佈載重，並在其末端 B 有一個等於 $2P/3$ 的集中載重情況。在此懸臂樑末端的撓度，應與在鉸上的撓度值相同。

$$\delta_b=\frac{qb^4}{8EI}+\frac{2Pb^3}{9EI}$$

6．6 非等截面之樑

在前節內已提出計算等截面樑撓度的各種方法，也可以很容易的適用來求非等截面樑的撓度。在非等截面之樑，包括在樑的各部分具有不同截面之樑，及逐漸尖細的錐形樑在內（見圖6－15a 及6－16 所示）。當一根樑在其截面尺寸有突然改變時，在其改變的各點上將發生局部的應力集中。但這些局部應力對於撓度的計算並沒有顯著影響。如為一根逐漸尖細之樑，在以前為等截面樑所導出的彎曲理論。若其尖細的角度很小，也可應用而得到滿意結果。

撓度曲線的微分方程式，有時亦可用以獲得非等截面樑的撓度及旋轉角。試考慮圖6－15a 所示之例。此樑係假設在其中間的一段曾被加大。因此，在樑的這一部分的慣性矩為其兩端部分的慣性矩的兩倍。在樑的

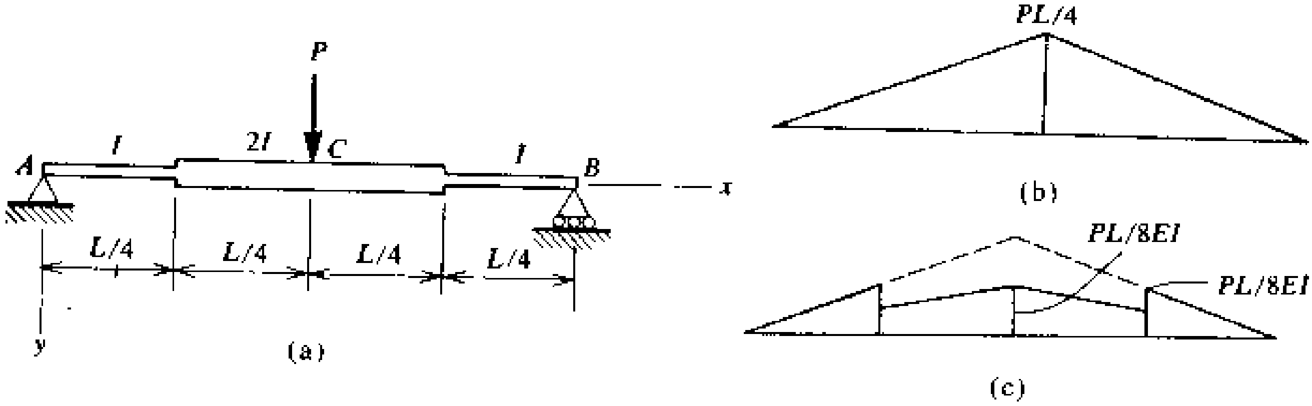


圖6．15　具兩種不同慣性力矩之簡支樑

左側一半的撓曲線微分方程式，必須分成兩部分寫出如下

$$EIv'' = -\frac{Px}{2} \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{4}\right) \tag{a}$$

$$E(2I)v'' = -\frac{Px}{2} \qquad \left(\frac{L}{4} \le x \le \frac{L}{2}\right) \tag{b}$$

可分別求出該兩個方程式的每一積分，以獲得其傾斜度及撓度。此時所發生的四個積分常數，可從下列的條件求得之：(1)在 $x=0$ 時，$v=0$；(2)在 $x=L/2$ 時，$v'=0$；(3)在 $x=L/4$ 時從方程式(a)獲得樑之傾斜度，等於從方程式(b)所獲得樑之傾斜度；及(4)在 $x=L/4$ 時，從方程式(a)獲得之撓度，等於從方程式(b)所獲得之撓度。從這些條件得到的積分常數

之後，我們就可知道在樑之兩部分的每一部分撓曲線。這種求取撓曲線的方法，只能在微分方程式數目限於一個或兩個，並且也只限於方程式內出現的函數爲易於求得其積分者，始在實際上可以應用。

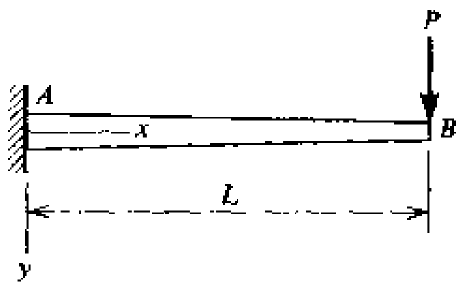


圖 6.16　漸縮形懸臂樑

如爲逐漸尖細的錐形樑（圖 6－16），用正常的數學技巧解微分方程式，可能頗爲困難。其理由是，以 x 的函數作爲慣性矩的一個式子通常將甚複雜，其結果可能成爲一個在求解時頗爲麻煩的方程式。

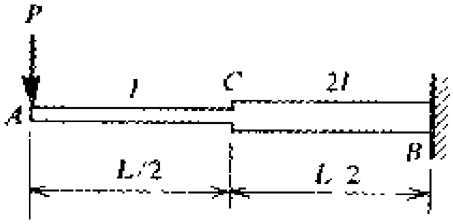
應用力矩－面積方法求非等截面樑之撓度，茲舉例說明圖 6－15 所示之樑。其彎力矩圖如圖 6－15b 所示，而 M/EI 圖如圖 6－15c 所示。M/EI 圖各部分的面積及其第一力矩，可用來求得旋轉角及撓度。例如，求左支承處的旋轉角及在中點的撓度。從樑的對稱性知道在中心 C 處，撓度曲線的切線爲水平。按照力矩面積第一定理，在左支承處的旋轉角 θ_a 等於 M/EI 圖介於 A 與 C 間的面積。因此可以獲得

$$\theta_a = (\text{三角形的面積}) + (\text{梯形的面積})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{PL}{8EI}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{16EI} + \frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{5PL^2}{128EI}$$

從撓度曲線 C 點上的切線量出 A 點的撓度，等於在該樑中點的撓度 δ_c。可由通過 A 點的一條垂直線上，取 M/EI 圖內介於 A、C 兩點間面積之第一力矩，依力矩－面積第二定理而獲得。於是

$$\delta_c = (\text{三角形之第一力矩}) + (\text{梯形之第一力矩})$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{PL^2}{64EI}\right) + \left[\frac{L}{4} + \frac{5}{9}\left(\frac{L}{4}\right)\right]\left[\frac{3PL^2}{128EI}\right] = \frac{3PL^3}{256EI} \qquad \text{(c)}$$

另外利用重疊法以求撓度及旋轉角，如圖 6 － 17a 所示的懸臂樑舉例說明如下。假設所要求的是在其自由端的撓度 δ 。將樑之中點 C 想像成



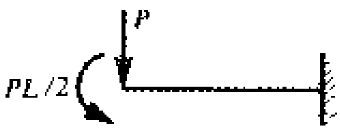


圖 6 - 17　具兩種不同慣性力矩之懸臂樑

被堅固鉗制者。因此該點既不起撓曲變位也不旋轉，於是自由端的撓度 δ_1 將與一根懸臂樑其長度為 $L/2$ 及慣性矩為 I 的撓度相同

$$\delta_1 = \frac{P(L/2)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{24EI}$$

但樑的 CB 部分也將作用如一根懸臂樑（圖 6 － 17b），並對 A 點的撓度有貢獻。此懸臂樑的自由端撓度 δ_c 及旋轉角 θ_c 為

$$\delta_c = \frac{P(L/2)^3}{3(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)^2}{2(2EI)} = \frac{5PL^3}{96EI}$$

$$\theta_c = \frac{P(L/2)^2}{2(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)}{2EI} = \frac{3PL^2}{16EI}$$

撓度 δ_c 及旋轉角 θ_c，將對在載重 P 下的撓度造成一個另外的貢獻 δ_2，如下式

$$\delta_2 = \delta_c + \theta_c\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{7PL^3}{48EI}$$

於是自由端 A 的全部撓度為

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3PL^3}{16EI} \tag{d}$$

從以上所舉的各例可以看出，在非等截面樑時，任何求樑的撓度之標準方法均可利用。至於方法的選擇及其程序的確立等細節，則全視擬解的問題而定。

6·7 差分法

差分法（finite difference）爲一種可用以求取樑之撓度數值的方法。在樑上負不規則載重或樑爲非等截面樑時，則差分法將特別有用。此種方法的基本概念，係將撓曲線之微分方程式（方程式 6－5），代以差分而求近似值的方法（finite difference approximation）。於是再用代數法解沿樑的長度幾個點所獲得的各個差分方程式。方程式之解，係由各點上撓度的近似值所構成。

爲說明此種方法起見，讓我們從考慮一般性的函數 $y=f(x)$ 開始，

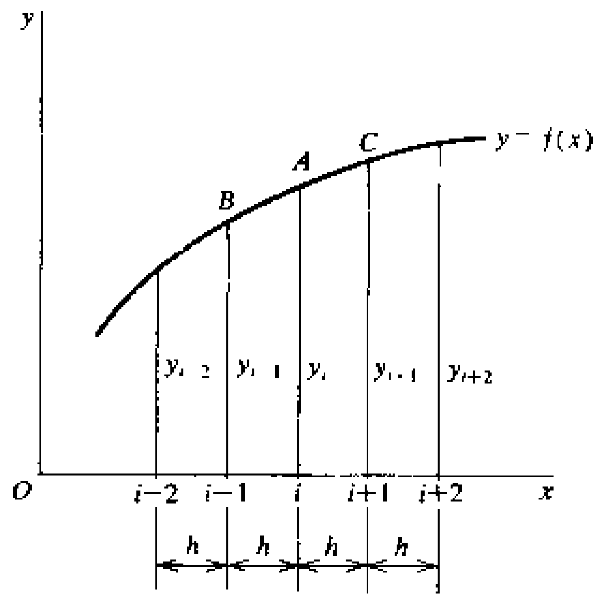


圖 6·18　差分法

此式用圖解法代表如圖 6－18 所示。x 軸可分成一系列相等的間隔，並將彼等的端點從左至右用連續數字編號。在這些點上繪到曲線上的縱標，也用符合該點的編號作爲註脚字樣。例如在 $i-2$，$i-1$，i，$i+1$ 及 $i+2$ 等各點的縱標，分別爲 y_{i-2}，y_{i-1}，y_i，y_{i+1} 及 y_{i+2} 等是。在此討論中，將兩個鄰近點間的距離作爲 h，雖然在更一般性的論文中，兩點間的距離不必全然相同。

現在考慮 A 點的函數 y 的第一導數 dy/dx，即與 x 軸上的 i 點相當（

見圖6－18)。此導數將等於曲線上A點之傾斜度，而這個傾斜度又將依次約等於連接B、C兩點之弦的傾斜度。因此，可得到下列的式子

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \tag{6-28}$$

第二導數d^2y/dx^2代表第一導數的改變率。於是在i點上，由計算得來在i點右側的傾斜度減去在i點左側的傾斜度，再除間隔距離而得i點第二導數之近似值。此項程序，將得下列的式子

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \tag{6-29}$$

方程式(6－28)及(6－29)是第一導數及第二導數的差分代表式。這些式子稱爲中央差分(central difference)。因在兩式中，均包括在i點兩側的縱標之故。也可獲得僅包括在i點右側(將i點之縱標除外)，或僅包括在i點左側各縱標的式子。如此的式子，分別稱爲前進差分(forward differences)或後退差分(backward differences)。此外高於二次的高次導數，也可用差分形式表示。但在以上所提的差分方程式，已足夠用來求樑的撓度＊。

將第二導數的差分式(方程式6－29)與撓曲線的微分方程式(方程式6－5)合併，我們可得樑方程式的差分形式如下

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = -\frac{M_i}{(EI)_i}$$

或

$$v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1} = -h^2\frac{M_i}{(EI)_i} \tag{6-30}$$

在此方程式內，代表彎力矩M及撓曲剛度EI的符號，均加上i字作註脚，以便強調這些數值係在樑上i點所求得者。

爲應用方程式(6－30)起見，需沿該樑選出一連串幾個點，並在以後寫出這些點的差分方程式。結果所得到的一套方程式，可解出各點的撓度，一如在下列各例題內所說明者。以後在第7.5節內，將指示如何應用此種方法以分析靜不定樑。

＊關於差分法更完整的討論，應參考數值方法教科書。(例如參考書6－11)

【例題】1. 作爲差分法的說明，設計算一根簡支樑負均佈載重的撓度問題（圖6－19a）。假設此樑的撓曲剛度EI 及長度L均爲固定不變。

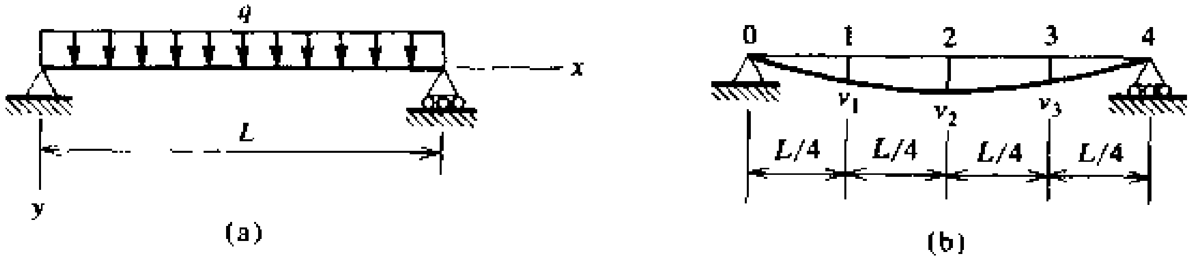


圖6．19　例題1

在本例內，樑被分爲四個相等間隔（圖6－19b）。因此必須決定在1、2及3三個點上的撓度。由於對稱之故，已知在三個撓度內的兩個爲相同（$v_1=v_3$），因此只有兩個，作爲各方程式內應加考慮的未知數量。

$$v_0-2v_1+v_2=-\left(\frac{L}{4}\right)^2\left(\frac{3qL^2}{32EI}\right)$$

只要$h=L/4$ 及$M_1=3qL^2/32$。此外，因在樑端的撓度爲零（$v_0=0$），於是在上式可簡化爲

$$2v_1-v_2=\frac{3qL^4}{512EI} \tag{a}$$

在點2處的彎力矩M_2爲$qL^2/8$，其差分方程式爲

$$v_1-2v_2+v_3=-\left(\frac{L}{4}\right)^2\left(\frac{qL^2}{8EI}\right)$$

因$v_1=v_3$，可寫成下式

$$v_1-v_2=-\frac{qL^4}{256EI} \tag{b}$$

至此，解(a)及(b)兩個方程式可得各點的撓度

$$v_1=v_3=\frac{5qL^4}{512EI}=0.00977\frac{qL^4}{EI}$$

$$v_2=\frac{7qL^4}{512EI}=0.01367\frac{qL^4}{EI}$$

這兩個撓度的準確值爲

$$v_1=v_3=\frac{19qL^4}{2048EI}=0.00928\frac{qL^4}{EI}$$

$$v_2=\frac{5qL^4}{384EI}=0.01302\frac{qL^4}{EI}$$

將以上所得各值作一比較，可以看出，從差分法得來的結果，大約高於準確結果百分之五。因為只將該樑分作四段，此結果已很合理的準確。若將該樑分成更多段數，並解與段數相當的差分方程式，將獲得更佳的準確度。（見習題 6.7－1）。

【例題】2　本例屬於非等截面懸臂樑，如圖 6－20a 所示之情況。要注意，在該樑 AB 段內的慣性矩為 BC 段慣性矩的兩倍。求該樑自由端的撓度。

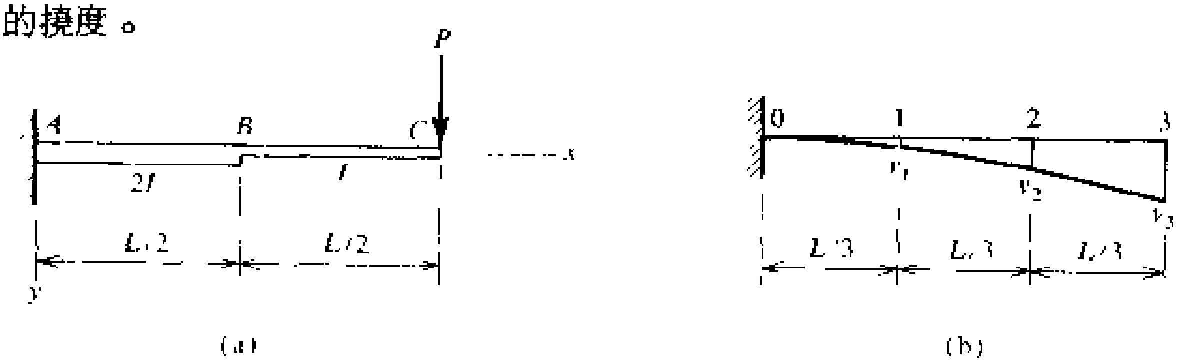


圖 6・20　例題 2

當該樑被分成三個相等間隔時，將有三個未知撓度需待獲得。（參閱圖 6－20b）。在 0、1 及 2 三個點上的彎力矩分別為

$$M_0 = -PL \qquad M_1 = -\frac{2PL}{3} \qquad M_2 = -\frac{PL}{3}$$

因此，在 0、1 及 2 三個點上的差分方程式為

$$v_{-1} - 2v_0 + v_1 = -\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(-\frac{PL}{2EI}\right) \tag{c}$$

$$v_0 - 2v_1 + v_2 = -\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(-\frac{PL}{3EI}\right) \tag{d}$$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = -\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(-\frac{PL}{3EI}\right) \tag{e}$$

在三個方程式中的第一個，出現一個假想的撓度 v_{-1}，位於固定支承左側的一個假想點上。此一假想的撓度，可採用一個固定支承的邊界條件，即其傾斜度為零，而以真實的撓度為詞以表示之。任何一個函數的第一導數，可用方程式（6－28）以差分形式提出。在應用該方程式，於 0 點獲取樑的傾斜度時，可得

$$v_1 - v_{-1} = 0 \qquad 或 \qquad v_{-1} = v_1 \tag{f}$$

如此，撓度 v_{-1} 已用該樑的真實撓度為詞表示了。

固定支承的第二個邊界條件爲 $v_0=0$，當應用此兩個邊界條件時，方程式即簡化爲

$$v_1=\frac{PL^3}{36EI}$$

至此，求解剩下的兩個差分方程式(d)及(e)，已爲一件頗爲簡單的事情，可得

$$v_2=\frac{5PL^3}{54EI} \qquad v_3=\frac{7PL^3}{36EI}=0.1944\frac{PL^3}{EI}$$

與以上所得的 v_3 值比較，該樑自由端的準確撓度爲

$$v_3=\frac{3PL^3}{16EI}=0.1875\frac{PL^3}{EI}$$

一如在前節，由方程式(d)所提供者。因此只將該樑分成三段，即可得到一個比較準確值高約百分之四的結果。

6·8 彎曲之應變能

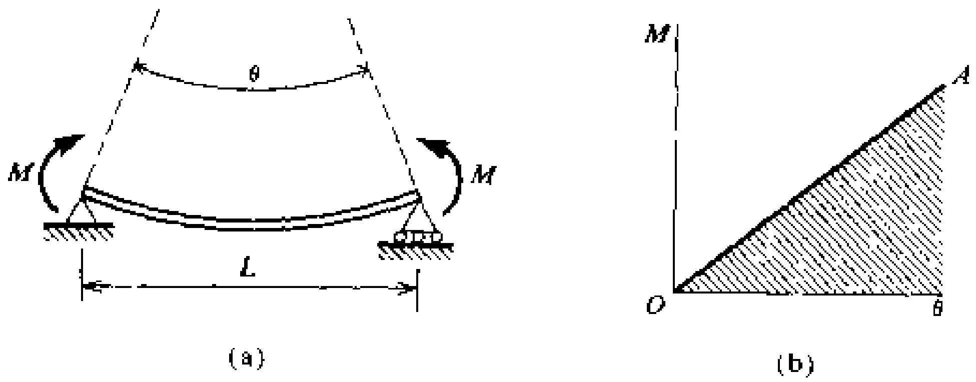


圖 6·21 (a)受純彎曲之樑，(b)表示力矩與旋轉角成直線關係之圖示

用一根受純彎曲之樑作實例，作爲有關應變能的討論。假設在樑內的各項應力均在比例限界以內。因爲在樑內的彎力矩M固定不變，該樑將彎曲變成一個曲度爲M/EI的圓弧。此圓弧所對的角度爲

$$\theta=\frac{ML}{EI} \tag{6-31}$$

介於 θ 角及載重M的直線形關係，在圖 6－21b 內用圖表示如OA 線。

當力偶M數量自零至其最大值時，彼等已完成某一數額之功，將由載重撓度圖下面的面積所代表（在圖6－21b 內用畫有斜線的面積來表示）。此項功，等於儲存於樑內的應變能，其值為

$$U = \frac{M\theta}{2} \tag{6-32}$$

此式與一個力作用於一根受拉力桿所產生的應變能方程式（1－15）及一個扭力作用於一根軸上所產生的應變能方程式（3－15）均相類似。

至此，若將方程式（6－31）及（6－32）合併，即可將儲存於一根受純彎曲樑內的應變能。用下列兩個式子中的任一式來表示

$$U = \frac{M^2L}{2EI} \quad 或 \quad U = \frac{EI\theta^2}{2L} \tag{6-33a,b}$$

在這兩個式子中的第一個，以載重M為項提供應變能。第二個則以角為項提供應變能。

若一根樑並非受純彎曲，而彎力矩係沿樑長改變者。可就一個樑元體其長度為 dx，在後求其積分而獲得應變能。介於一個元體兩邊的 $d\theta$ 角為（見方程式6－4及6－5）

$$d\theta = -\frac{M\,dx}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2}dx$$

就是儲存於該元體內的應變能 dU 為

$$dU = \frac{M^2\,dx}{2EI} \quad 或 \quad dU = \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$$

結果，儲存於樑內的全部應變能為

$$U = \int\frac{M^2\,dx}{2EI} \quad 或 \quad U = \int\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \tag{6-34a,b}$$

在此兩式中，對樑的全長求積分步驟。

屬於應變能的方程式（6－34），僅將在該樑內的彎力矩影響計入。此外將有若干剪力應變能儲存在每個元體內。後者的應變能將在6.11 節內討論之。如為細長之樑，剪力應變能如與伴隨頗為巨大的彎力矩應變能相比，常可略去不計。

應變能這種概念，在結構分析及在抵抗動力或受衝擊力結構設計中，負有頗爲重要的任務。但在本節內，僅以幾個簡單例題，以說明樑內的應變能應如何求得，並如何處理理想化的衝擊力問題。

【例題】1. 試求儲存於一根懸臂樑內的應變能，樑的長度爲 L，在其自由端負荷一個集中載重 P（見圖 6－6），並求樑端的撓度 δ。

在懸臂樑任何一個截面上的彎力矩爲 $M=-Px$，式中的 x 爲距自由端的距離。將此式代入方程式（6－34a）內，得到

$$U=\int_0^L \frac{P^2x^2\,dx}{2EI}=\frac{P^2L^3}{6EI}$$

由載重所完成之功爲 $P\delta/2$，使與應變能 U 相等，而得到

$$\delta=\frac{PL^3}{3EI}$$

這個式子與以前的結果相符（見 6.4 節例題 1）。

【例題】2. 試用一根簡支樑負荷均佈載重的撓度曲線方程式，以獲取儲存於該樑內應變能的一個式子。該樑的撓曲線可用方程式（6－12）求得。取方程式的兩個導數得

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{qx}{2EI}(x-L)$$

將此式代入方程式（6－34b）內，並求其積分，得

$$U=\int_0^L \frac{q^2x^2(x-L)^2}{8EI}\,dx=\frac{q^2L^5}{240EI}$$

<u>由衝擊力產生之撓度</u>

一根受衝擊力之樑，其動力的撓度可由載重所作之功，使等於在該樑

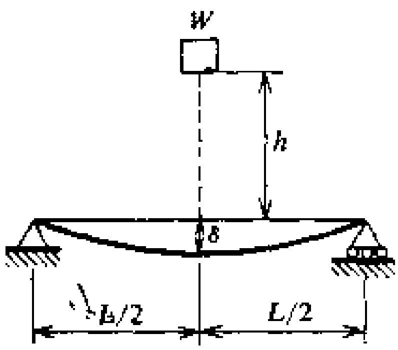


圖 6．22 簡支樑上由衝擊力而產生之撓度

內儲存之應變能而決定之。說明如下，試就一根簡支樑，在其中點受到一個重量爲W的下墜物的打擊。假設在碰撞時並沒有能的損失，樑的質量如與下墜物的質量相比，可略去不計。換句話說，在重量W下墜時所完成的功，完全化爲樑的彈性應變能，而樑的由於改變位置的位能，亦被略去不計。

該重量W下墜經過（ $h+\delta$ ）距離所完成的功，其中h爲重量在樑上的原來高度，δ爲樑的最大撓度，其值爲

$$W(h+\delta) \tag{a}$$

若我們以P代表在撓度最大時加施於樑上之力。假如我們假設樑在撓曲變形後的形狀與P被靜態的加在樑上的形狀相同，則P力將爲

$$P=\frac{48EI\delta}{L^3}$$

在該樑上與其相當的全部應變能爲

$$U=\frac{P\delta}{2}=\frac{24EI\delta^2}{L^3} \tag{b}$$

將下墜重量所作的功（見 a 式），使與應變能（方程式 b ）相等，得成立下列方程式

$$\delta^2-2\delta_{st}\delta-2h\delta_{st}=0$$

在式中 $\delta_{st}=WL^3/48EI$ ，爲W載重被靜態的加在樑上時的樑之撓度。從以上方程式，可得最大撓度爲

$$\delta=\delta_{st}+\sqrt{\delta_{st}^2+2h\delta_{st}} \tag{6-35}$$

從這個方程式可以看出，動力的撓度 δ ，永遠大於靜力的 δ_{st} 。若高度 $h=0$ ，意指該載重係突然加在樑上但並沒有任何自然下墜的距離，則撓度將爲靜力的撓度的兩倍。若高度 h 很大，則在方程式（ 6 － 35 ）包含 h 之項，將佔優勢，而該方程式將簡化爲 $\delta=\sqrt{2h\delta_{st}}$ 。所有這些觀察到的結果，均與以前考慮在受拉力桿上的衝擊力所遭遇的情況相類似（見第 1.10 節）。

從方程式（ 6 － 35 ）算得的撓度 δ ，是代表在衝擊時沒有能的損耗。用這個假設作根據的上限界。在接觸表面上的局部變形，其結果爲能的損耗。因此樑的應變能將因之減少，而最大的撓度將小於用方程式（ 6 －

35 ）計算所得者＊。

6．9 與撓度成比例之載重

以上關於樑之撓度的全部討論，均假設載重爲已知數。但另外尚有其他情勢，載重的多少將依撓度的多少而定，因而載重的決定成爲分析的一部分。例如在一根樑上承受一塊面積，在其上有液體積聚着，即爲此種情形的一個實例。當樑生撓曲而發生撓度時，將形成一個凹窪，凹窪內將注入液體並形成一個水塘。由於水塘的存在，將增加載重，因此又使撓度增加，於是將有更多的液體積聚於該水塘之內。如此撓度將繼續的增加，一直到該樑失敗爲止，或該樑將達到一個平衡位置，不致繼續發生撓度。此種狀態的最常見之例，爲平坦屋頂上積聚雨水，稱此種情形爲水塘問題（ponding problem）。

假設有一簡支於兩端的 AB 樑（附圖 6 − 23a），爲一系列平行樑的一部分，其上承受一塊平版或甲版（見圖 6 − 23b）。在有任何水塘發生之前，該樑被假設爲具有原始的撓度 v_1，可用下式表示

$$v_1 = v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \tag{a}$$

若在此時液體積聚成塘，則沿該樑每單位長的載重強度將爲

$$q = s\gamma v \tag{b}$$

式中 s 爲樑的間隔，γ 爲該液體的單位體積重量，v 爲該樑的總撓度。總撓度 v 爲原始撓度 v_1 及另外增加的撓度 v_2 之和，v_2 係由積聚成塘的

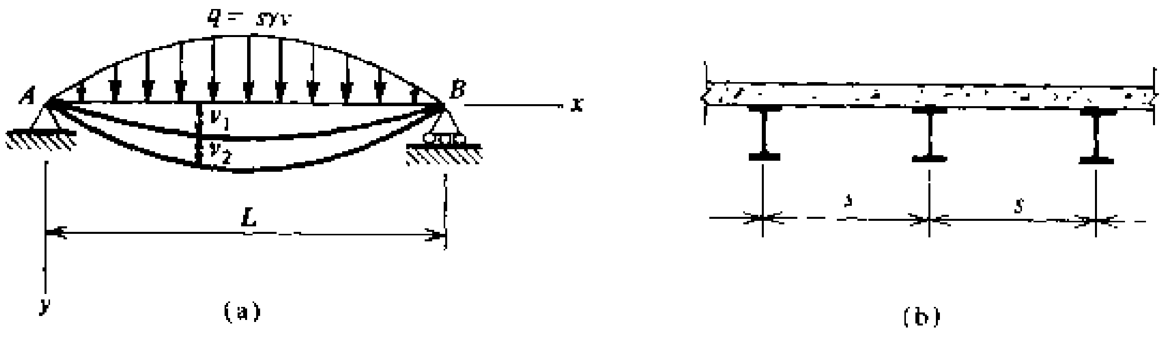


圖 6．23　簡支樑上負成塘載重

液體重量所產生的（圖 6 − 23a）。

＊若將樑的質量計算在內，則撓度亦將減少；（見參考書 1 − 16 與 1 − 17 ）。

該樑可由解該樑撓度的四階微分方程式分析之。該方程式寫成：

$$EIv_2'''' = q = s\gamma v$$

將 $v = v_1 + v_2$ 代入以上方程式，並從方程式(a)內取 v_1 值，可得：

$$EIv_2'''' - s\gamma v_2 = s\gamma v_0 \sin\frac{\pi x}{L}$$

現在以 EI 除上式，並引入下列的符號：

$$a^4 = \frac{s\gamma}{EI} \tag{6-36}$$

由此可改寫成下列的微分方程式：

$$v_2'''' - a^4 v_2 = a^4 v_0 \sin\frac{\pi x}{L} \tag{6-37}$$

上式有一通解，係由兩部分所構成，一爲齊次解（ homogeneous solution ）及一特解（ particular solution ）。前一個爲該齊次式之解，由刪去右側一項，並以零代替而獲得。後一個爲該微分方程式的一個解，該解在被代入左側時，將得到方程式的右側。應用解微分方程式的技巧，可得齊次解爲

$$(v_2)_H = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \cosh ax + C_4 \sinh ax \tag{c}$$

式中共包含四個任意常數。此解的正確性，可直接代入齊次微分方程式很容易核對。至其特解則爲：

$$(v_2)_P = \frac{bv_0}{1-b} \sin\frac{\pi x}{L} \tag{d}$$

其中有一無因次參數（ nondimensional parameter ）爲：

$$b = \frac{a^4L^4}{\pi^4} = \frac{s\gamma L^4}{\pi^4 EI} \tag{6-38}$$

此特解，亦可將其代入該微分方程式而證實其正確性。

方程式（ 6 − 37 ）的通解，至此可將齊次解及特解合併而得：

$$v_2 = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \cosh ax + C_4 \sinh ax + \frac{bv_0}{1-b} \sin\frac{\pi x}{L} \tag{e}$$

在此解內的四個積分常數，可從下列四個邊界條件獲得之：(1) $x=0$，$v_2=0$；(2) $x=0$，$v_2''=0$；(3) $x=L$，$v_2=0$；(4) $x=L$，$v_2''=0$。從前面的兩個條件，可求得 $C_1=C_3=0$，從後面的兩個條件，可求得 $C_2=C_4=0$。於是撓度 v_2 的最後方程式，只是由方程式(d)所提供的特解。於是該樑的全部撓度 v 成為

$$v=v_1+v_2=v_0\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{bv_0}{1-b}\sin\frac{\pi x}{L}$$

或

$$v=\frac{v_0}{1-b}\sin\frac{\pi x}{L}=\frac{v_1}{1-b} \tag{f}$$

最後的結果表示，因有積聚成塘之故，原始的撓度 v_1 將由擴大因數 $1/(1-b)$ 倍予以擴大。在 $b=0$ 時，此因數將等於1，並在 b 逐漸接近1時，增加到沒有限制。於是我們可以說，在 b 值小於1時，即在

$$\frac{s\gamma L^4}{\pi^4 EI}<1 \tag{6-39}$$

時，撓度 v 具有一個確定值，而樑達到一個平衡位置。若 $b\geq 1$，則該樑在一種成塘載重下為一不穩定者。在理論上講，其撓度將成為一無限大。必須切記該微分方程式只限於微小的撓度，以及該樑的直線彈性行態。因此以前的結果，對於巨大的撓度而言將不正確。

作為成塘問題的第二個例題，假設一根原來筆直的簡支樑，負荷強度 q 的均佈載重。因為載重成塘之故，將另外發生增加的載重 $q_1=s\gamma v$，式中的 v 為該樑的全部撓度。於是全部載重將為 $q=q_0+s\gamma v$ 而撓曲線的微分方程式將成為

$$EIv''''=q_0+s\gamma v$$

或

$$v''''-a^4v=\frac{q_0}{EI} \tag{g}$$

該方程式將具有與前者相同的齊次解及下列的特解

$$(v)_p = -\frac{q_0}{s\gamma} \tag{h}$$

將四個邊界條件應用於通解時，可得到積分常數如下

$$C_1 = C_3 = \frac{q_0}{2s\gamma} \qquad C_2 = \frac{q_0}{2s\gamma}\tan\frac{aL}{2} \qquad C_4 = \frac{q_0}{2s\gamma}\tanh\frac{aL}{2}$$

已知道幾個常數之後，撓度 v 的通解即可很容易寫出。其後即可將沿樑的任何一個截面上的撓度預估得到。例如在樑的中央其撓度爲

$$v_c = \frac{q_0}{2s\gamma}\left(\sec\frac{aL}{2} + \operatorname{sech}\frac{aL}{2} - 2\right)$$

由於均佈載重 q_0 的單獨作用，且沒有成塘作用時，在樑中心的撓度爲 $5q_0L^4/384EI$，可將上述的撓度重行表示如下

$$v_c = \frac{5q_0L^4}{384EI}\psi_1 \tag{i}$$

式中

$$\psi_1 = \frac{192}{5a^4L^4}\left(\sec\frac{aL}{2} + \operatorname{sech}\frac{aL}{2} - 2\right) \tag{j}$$

因數 ψ_1 爲一個無因次擴大因數（nondimensional amplification factor），在 $aL = 0$ 時其值爲 1，並在 aL 逐漸接近 π 時，其值逐漸接近無窮大。於是我們又可求得一個臨界值，在該值之下，樑爲穩定且達到平衡位置。此一臨界值可由方程式 $aL = \pi$，或 $b = 1$ 而得，而其穩定條件則與以前所獲得的相同。就一般情形而言，可以明瞭，此種穩定條件可適用於簡支樑，而與引起最初撓度的載重形式無關。

因成塘而引起的失敗，可由確保該樑具有充分撓曲剛度 EI 及預給充分拱勢（或最初的向上撓度）以避免之。關於屋頂系統的特殊設計資料可參閱（參考書 6 − 12 及 6 − 13）。

尚有其他型式的分析，通常要比以上所提供的成塘問題簡單很多。對於那些情況就集中載重之量，將依載重下的撓度來決定。（見習題 6.9 − 1 及 6.9 − 2 有關此種問題之解）。

6·10 熱之影響

當溫度均勻的增加，將引起未受拘束的桿件，或樑的長度增加，其量如下式

$$\Delta L = \alpha L \, \Delta T \tag{6-40}$$

式中 ΔL 代表長度增加之量，α 爲熱張係數，L 爲原有的長度，ΔT 爲溫度的增加量。若有一樑其支承之情況有如下列。縱向的伸長可自由發生，如本章內所考慮的是樑的全部，則均勻一致的溫度變化，將不會在樑內產生任何應力。此樑也不會有任何橫向的撓度，因該樑並未起彎曲趨勢。

但橫過該樑的高度，若溫度並非固定不變者，則該樑的行態將不相同。假如一根簡支樑原來是筆直的，其全部溫度一律爲 T_0，其後在樑頂表面的溫度變化至 T_1，樑底表面之溫度變化至 T_2。若假設樑頂與樑底間的溫度變化作直線形，則樑的平均溫度爲 $T_{aver} = (T_1 + T_2)/2$，並發生於樑高之中間。介於此平均溫度與原來溫度 T_0 間的任何差別，其結果均使樑的長度將因而改變，如在前一節內所述。在樑底與樑頂間的溫度差 $\Delta T = T_2 - T_1$，結果將使樑軸彎曲，此即意指產生了橫向撓度。

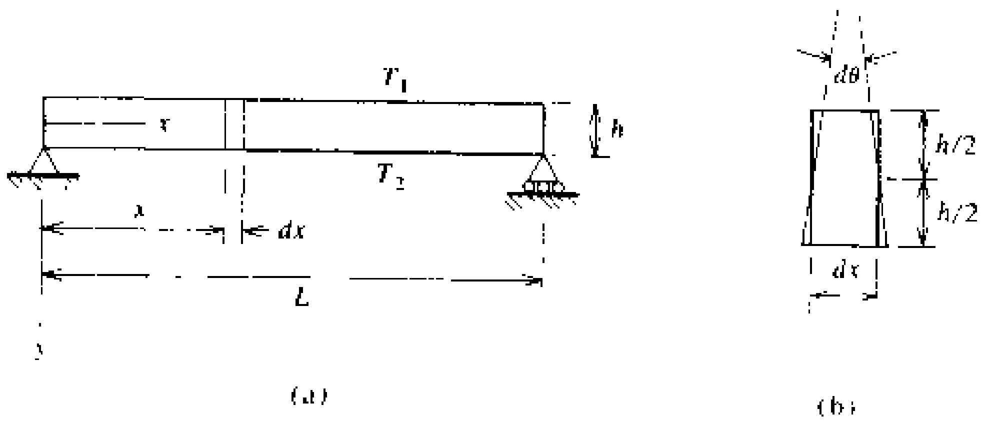


圖 6-24　樑內之受熱影響

爲研究橫向撓度起見，可考慮一個長度 dx 元體的變形（圖 6－24 b）。在該元體底面及頂面間長度的改變，分別爲 $\alpha(T_2 - T_0)dx$ 及 $\alpha(T_1 - T_0)dx$。若 T_2 大於 T_1，則該元體的兩側，將相對的旋轉一個 $d\theta$ 角如圖 6－24 b 所示。$d\theta$ 角與元體尺寸間的關係，可從該圖的幾何形狀獲得，並表示下式

$$h d\theta = \alpha(T_2 - T_0)\,dx - \alpha(T_1 - T_0)\,dx$$

或

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\alpha(T_2-T_1)}{h} \tag{6-41}$$

式中 h 爲樑之高度。今 $d\theta/dx$ 是代表該樑撓曲線的曲度（方程式6－4），我們將導出以下的撓曲線微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{\alpha(T_2-T_1)}{h} \tag{6-42}$$

該方程式須加（－）號，以便保持以前所採用的正負號慣例；並要注意，若 T_2 大於 T_1，則曲度將爲負號。$\alpha(T_2-T_1)/h$ 這個數量，爲 M/EI 這個數量的相對物，以前曾在撓曲線的微分方程式內出現過。

至此，已將方程式（6－42）建立成一根樑在其頂部與底部間遭遇到溫度變化的微分方程式，可採用已爲彎力矩影響所陳述過的同樣技巧來進行此方程式。繼續將此方程式積分，以得 dv/dx 及 v，並利用邊界條件以估定積分常數。另外可採取的辦法是力矩一面積法，所需的全部工作以 $\alpha(T_2-T_1)/h$ 代替這些原理內的 M/EI。習題6.10－1至6.10－3可用兩個方法中的任何一種解出。

6．11 剪力變形之影響

本章的前面部分，在求撓度時只考慮到彎曲變形的影響。另外的撓度係由剪力變形所產生。如爲一根矩形斷面樑，將使該樑的元體長度 dx，被變形如圖6－25a 所示的情形。因剪應力沿樑的高度而變，各截面均將

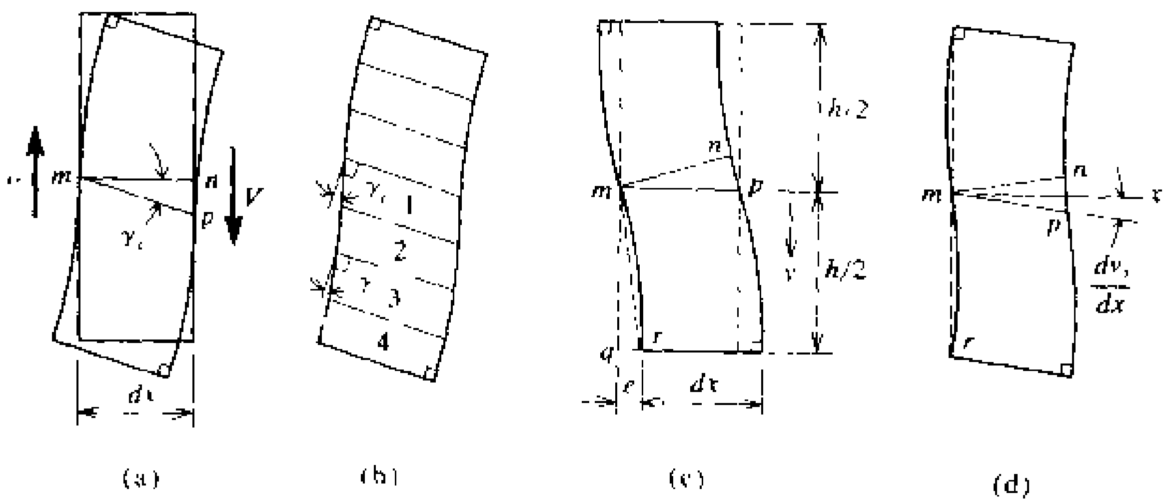


圖6－25　樑內之剪力變形

變成彎曲表面。圖上只表示因剪力而引起的變形，於是彎曲變形及作用於該元體上的彎力矩，均從此簡圖內略去未行繪入。mn 線代表樑的原來軸線，原係假設爲水平，而 mp 線則表示在剪力變形發生後此線的位置。若在 m 及 n 兩點處的元體兩邊被假設依然爲垂直，則在該樑之頂及底的邊緣將與 mp 線平行，但 mp 線係與水平線成 γ_c 角。（γ_c 爲中性軸處的剪力應變）。若將該元體分爲若干層，則該元體的變形可很容易的被想像出來，每層間均被假設受純剪力（見圖6－25b）。在第一層內的剪力應變爲 γ_c，至於在第二層及第三層內的剪力應變 γ 將小於 γ_c。在最外的第四層處，其剪力應變必須等於零，該層的各邊將互成直角。

僅由剪力而導致樑的撓曲線上的傾斜度，大致等於其中性軸上的剪力應變（見圖6－25a）。於是僅由剪力所引起的撓度，若以 v_s 表示，將獲得傾斜度的式子

$$\frac{dv_s}{dx}=\gamma_c=\frac{\alpha_s V}{GA} \tag{6-43}$$

式中之 V/A 爲平均剪應力，係將樑之截面面積除剪力而獲得，α_s 爲一數字因數（或剪力係數 shear coefficient），必須用此因數乘平均剪應力以獲得該截面重心的剪應力，G 爲剪力的彈性模數。如爲矩形截面，$\alpha_s=3/2$（見方程式5－20），如爲圓形截面 $\alpha_s=4/3$（見方程式5－23）。至於 I 字樑則 α_s 大致等於 A/A_w，式中之 A_w 爲該樑之腹鈑截面面積。GA/α_s 這個數量，稱爲樑之剪力剛度（shearing rigidity of the beams）*。

當在該樑上負連續分佈載重 q 作用時，則剪力 V 爲一連續函數，可對 x 求其微分導數。於是單獨由剪力而產生的曲度是

$$\frac{d^2v_s}{dx^2}=\frac{\alpha_s}{GA}\frac{dV}{dx}=-\frac{\alpha_s q}{GA} \tag{a}$$

樑之全部撓度 v，爲彎曲撓度 v_b，在本章以前各節所求得與剪力撓度 v_s 之和，亦即 $v=v_b+v_s$。因此總曲度爲

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2v_b}{dx^2}+\frac{d^2v_s}{dx^2}=-\frac{M}{EI}-\frac{\alpha_s q}{GA} \tag{6-44}$$

這個方程式，可用連續求積分法解之。在必須將剪力影響一併考慮在內的許多情況中，可用來決定樑的撓度。

該樑樑端的狀況，在解方程式（6－44）時被用爲預計各項積分常數之用。例如在一個簡支樑的支承上，其撓度爲零（$v=v_b=v_s=0$）。在一個固定支承上，撓度亦爲零。關於傾斜度的條件，則全視樑之末端被鉗制的情形而定。若在中性軸處，元體的兩邊依然保持成垂直（如在圖6－25a），於是傾斜度的狀況爲

* 用虛功法求樑之剪力剛度爲 GA/f_s，f_s 稱爲剪力的形狀因數（form factor for shear），可能與剪力係數 α_s 不同，見第11.4節。

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\gamma_c \tag{b}$$

因爲在此種情勢下，其支承處，樑之軸線由於彎曲變形將具有傾斜度爲零，由於剪力應變將具有一個傾斜度 γ_c。若該樑端受到鉗制，則總撓度曲線在樑端具有爲零的傾斜度，其條件爲

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=0 \tag{c}$$

而樑之末端擺正位置如圖 6－25c 所示之情形，而 mp 線呈水平。

另外一種可能性，該樑之頂及底被保持在一條垂直線上（圖 6－25 d）。在此種情形下，mn 及 mp 線兩者全都不是水平。代之者如傾斜度 dv_s/dx，可將圖 6－25c 內的元體依順時針走向旋轉，直到 mp 線成垂直爲止而求得之。旋轉角爲 qmr 角，等於 e 距除以 $h/2$。此時距離 e 可以看出爲

$$e=\int_0^{h/2}\gamma\, dy \tag{d}$$

式中的 γ 爲距中性軸距離爲 y（圖 6－25c）處的剪力應變（圖 6－25 b）。此種情況的邊界條件可陳述如下

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\frac{2e}{h} \tag{e}$$

數量 e 係由方程式(d)所得，可作任何種特殊截面形狀計算而得。如爲寬度 b 的矩形截面樑，即有下列之 e

$$e=\int_0^{h/2}\gamma\, dy=\frac{1}{G}\int_0^{h/2}\tau\, dy=\frac{1}{bG}\int_0^{h/2}\tau b\, dy=\frac{V}{2bG} \tag{f}$$

而 (e) 式的條件成爲

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\frac{V}{GA} \tag{g}$$

式中的 $A=bh$ 爲截面面積。如爲一 I 字樑，其腹鈑將幾乎負荷剪力的全部，而剪應力在腹鈑的整個高度大致均勻一致；於是我們可得下式

$$e=\int_0^{h/2}\gamma\, dy=\frac{1}{G}\int_0^{h/2}\tau\, dy=\frac{1}{t_w G}\int_0^{h/2}\tau t_w\, dy\approx\frac{V}{2t_w G} \tag{h}$$

而其條件成爲

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\frac{V}{GA_w} \tag{i}$$

式中 $A_w\approx ht_w$ 爲該 I 樑腹鈑的面積。

爲舉例說明剪力撓度計算起見，用一根簡支樑承受均佈載重 q（見圖 6－2）作爲第一個例題。該樑的曲度方程式（見方程式 6－44）將爲

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{q}{2EI}(xL-x^2)-\frac{\alpha_s q}{GA}$$

此式經接連兩次積分後，可得撓度 v 式如下

$$v=\frac{q}{24EI}(x^4-2x^3L)-\frac{\alpha_s q}{2GA}x^2+C_1x+C_2$$

在樑之兩端（$x=0$ 及 $x=L$）其撓度 v 爲零，從這兩個條件可得下列 C_1 與 C_2 式

$$C_1=\frac{qL^3}{24EI}+\frac{\alpha_s qL}{2GA}\qquad C_2=0$$

於是，樑的撓度曲線爲

$$v=\frac{qL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L}\right)\left(\frac{x^3}{L^3}-2\frac{x^2}{L^2}+1\right)+\frac{\alpha_s qL^2}{2GA}\left(\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{x}{L}\right)\tag{6-45}$$

該方程式的右側共有兩項；第一項是由彎曲所引起的撓度（可與方程式 6－12 比較）而第二項則爲由剪力變形所引起的另外增加的撓度。

在樑的中央（$x=L/2$）處，撓度爲

$$v_c=\frac{5qL^4}{384EI}+\frac{\alpha_s qL^2}{8GA}=\frac{5qL^4}{384EI}\left(1+\frac{48\alpha_s EI}{5GAL^2}\right)\tag{6-46}$$

剪力影響的相對重要性，可檢查該方程式內最後一項加以斷定。若將剪力變形略去不計，則其影響將如假設該樑在剪力方面成爲無窮盡的剛勁者相同（$GA/\alpha_s=\infty$）。於是在前一個方程式中的最後一項將變成零，只剩下彎曲撓度一項。當剪力影響被包括在內，最後被保留着，則將發覺撓度已然增加。如爲一根實心樑，例如矩形截面樑，其最後一項數值，與前一項相較頗爲微小。其他樣式之樑，如夾心型樑，則可能很大。

爲獲得若干數值的結果，試考慮一根矩形截面樑，其高度爲 h（於是 $\alpha_s=1.5$，及 $I/A=h^2/12$）而 $E/G=2.5$。在此種情形其中央撓度爲

$$v_c=\frac{5qL^4}{384EI}\left(1+3\frac{h^2}{L^2}\right)\tag{6-47}$$

並且可以看出，在 $L/h=10$ 時，由剪力變形的影響，將使撓度增加達 3 %。如 L/h 比很小，意指短而高的樑，則其影響將會增加。如爲 I 字樑，則剪力變形影響，將小於矩形樑，但剪力撓度的相對數量則將增大二至三倍。如爲夾心型樑構造，因剪力所引起的撓度增加，可能高達 50 %。

以上用剪力撓度的微分方程式求解，係根據樑的每一截面可隨意扭歪這種假設而導出的，如繪於圖6－25a內所示的情形。承受均佈載重的簡支樑，為一種接近滿足此項條件的情形。在樑之中點，該截面不可能有扭歪情形發生（由於對稱之故）。但因在樑之中點$V=0$，在該截面上就沒有扭歪的趨勢。扭歪作用逐漸自樑的中點向樑端增加，且剪力之本身亦係如此。於是對撓度另外增加的鉗制力，即由扭歪作用所供應，僅具極不重要的影響。但可以看出，受鉗制的扭歪作用，其影響將減少在以上所計算的撓度。

應用彈性理論的各種方法，將一根矩形截面負荷均佈載重簡支樑的撓度曲線予以決定（見參考書6－14）。卜桑氏比值$\nu=0.25$之情形，在樑中點的撓度式為

$$v_c=\frac{5qL^4}{384EI}\left(1+2.2\frac{h^2}{L^2}\right) \tag{6-48}$$

從上式得到的撓度，將較由方程式（6－47）所得到的略小。在前面這個結果的第二項，不但將剪力的影響計入，並且也將在垂直方向內應力σ_y的影響（由於均佈載重q作用於樑的頂上）也一併計入。

我們再考慮第二個例題。一根簡支樑在其中點有一集中載重P。在樑左側的一半，彎力矩、剪力及載重強度的式子分別為$M=Px/2$、$V=P/2$及$q=0$。於是由彎曲及剪力所導致之曲度，其方程式為

$$\frac{d^2v_b}{dx^2}=-\frac{Px}{2EI}\qquad\frac{d^2v_s}{dx^2}=0\qquad\left(0\le x\le\frac{L}{2}\right)$$

這兩個方程式必須分開來求其積分，而不能像第一個例題內可合併求其積分。因伴隨彎曲及剪力撓度而來的傾斜度，其邊界條件，在樑之中央有所不同。應用在$x=L/2$時$dv_b/dx=0$及在$x=0$時$v_b=0$，這兩項事實作為邊界條件，可從v_b微分方程式連續兩次積分，得到彎曲撓度為

$$v_b=\frac{PL^3}{48EI}\left(\frac{x}{L}\right)\left(3-4\frac{x^2}{L^2}\right)\qquad\left(0\le x\le\frac{L}{2}\right)$$

求v_s微分方程式的積分，得到

$$\frac{dv_s}{dx}=C_1$$

此式表示，由於剪力所引起的傾斜度，在該樑左側一半的全部均為常數。此項傾斜度等於$\alpha_s V/GA$，一如由方程式（6－43）所得到者。求二次積分並與在$x=0$時，$v_s=0$這個條件合併應用，即得單由剪力所引起之撓度方程式

$$v_s=\frac{\alpha_s Px}{2GA}\qquad\left(0\le x\le\frac{L}{2}\right)$$

總撓度（在 $0 \leq x \leq L/2$ 時）爲

$$v = v_b + v_s = \frac{PL^3}{48EI}\left(\frac{x}{L}\right)\left(3 - 4\frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{\alpha_s Px}{2GA} \tag{6-49}$$

在樑之中點撓度爲

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI}\left(1 + \frac{12\alpha_s EI}{GAL^2}\right) \tag{6-50}$$

又剪力變形的重要性，可在每個各別情況中，用數字預計在括號內最後一項的値來決定。

在前面，由微分方程式所獲得之解（方程式6－49）提供的撓度將太大。原因是將扭歪影響略去未計之故，如以前所指出者。依對稱性，我們知道在樑中間的截面，必須依然爲一平面，而且沒有扭歪情形可在該處發生。但在緊靠中間的左側或右側，將分別負荷剪力 $P/2$ 及 $-P/2$，而這些截面的扭歪情形應當出現。因彼等傾向於相反方向內起扭歪。但因受到鉗制而不能如此做，故必將發展出另外的應力。該另外的扭歪鉗制力傾向於抵抗樑的撓度，因此實際的剪力撓度，將小於以上所決定者。

如爲一根矩形截面之樑，其 $E/G = 2.5$，則由方程式（6－50）得到中點撓度式爲

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI}\left(1 + 3.75\frac{h^2}{L^2}\right) \tag{6-51}$$

此式可與下面應用彈性理論，取 $\nu = 0.25$ 及 $E/G = 2.5$（見參考書6－15）的情況而獲得更爲正確的結果作一比較

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI}\left(1 + 2.78\frac{h^2}{L^2} - 0.84\frac{h^3}{L^3}\right) \tag{6-52}$$

應用這個最後的方程式比用方程式（6－51），將得到一個比較小的撓度，原因已將靠近加載重處的樑中央，已局部化的各應力計算在內之故。

再考慮的第三個例題，爲一懸臂樑。在其左端爲固定，在自由端負荷一集中載重 P（參閱圖6－6）。彎曲撓度 v_b 在以前已經求出（見例題Ⅰ，第6.4節），僅就剪力撓度在此加以討論。因剪力固定不變，故該樑由於剪力所起的傾斜度 dv_s/dx 亦將固定不變。此傾斜度的數量，將視樑之左端如何支承而定。若在中性軸上，元體之兩邊依然保持垂直，且樑之末端可隨意扭歪（見圖6－25a），於是其傾斜度將爲

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{\alpha_s P}{GA}$$

而剪力撓度爲

$$v_s = \frac{\alpha_s P}{GA}x \tag{j}$$

若在支承處的撓曲線依然保持水平，且在末端的截面變形如圖 6 － 25c 所示之情形。於是 $dv_s/dx = 0$，且將沒有剪力撓度 v_s。最後若在樑頂面及底面之邊緣，其在支承處依然能保持在垂直方向內係一個在另外一個的上方，且樑之扭歪如圖（6 － 25d）所示的情形，則由於剪力所引起的傾斜度將為 $\frac{dv_s}{dx} = \frac{2e}{h}$

由於剪力單獨所引起的撓度曲線為

$$v_s = \frac{2e}{h}x \tag{k}$$

在懸臂樑自由端的總撓度，係將 $x = L$ 代入前述方程式以求 v_s，並將其結果加於 $PL^3/3EI$（即為自由端上由於彎曲而產生的撓度）求得之。

其實，按照彈性理論各種方法所求得懸臂樑末端的撓度，也可用於簡支樑在其中點有一集中載重（參照方程式 6 － 52 ）所導出的公式，並以 $2P$ 代 P，以 $2L$ 代 L 而獲得。其結果所得的撓度，對於一根懸臂樑之固定端已被鉗制不能扭歪，亦即其末端截面假設仍保持成平面者，則將正確無誤*。

在所有以前的一切誘導式中，均曾利用剪力係數 α_s，其定義為在中性軸上的剪應力（或剪力應變）與該截面上的平均剪應力（或平均剪力應變）之比值。用此種定義所定的 α_s 值，被用來計算剪力剛度 GA/α_s。關於剪力剛度比較更準確的算式，曾應用彈性理論而完成。在以下所列求 α_s 之各種公式，係摘錄自參考書 6 － 17 。此參考資料內並包括若干有關剪力係數的資料目錄。如為實心的矩形或圓形截面，其係數將分別為

$$\alpha_s = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)} \qquad \alpha_s = \frac{7 + 6\nu}{6(1 + \nu)} \tag{6-53a,b}$$

在 $\nu = 0.3$ 時，我們可從這兩個方程式，分別為矩形及圓形截面求得其係數為 $\alpha_s = 1.18$ 及 $\alpha_s = 1.13$。採用這兩個新值（代替 3/2 及 4/3 值）代入前為剪力撓度所誘導諸方程式中，將獲得較小的撓度值。自然，必須永遠牢記在心的，在靜力的撓度問題中，計算剪力撓度時非常準確，並不能被認為正當，因其在全部撓度中，只佔百分之幾而已。

決定樑的剪力撓度的另外一種方法，為單位載重法（unit load method）（見第 11.4 節），係根據虛功原理而得。此種方法對於矩形樑的剪力撓度，通常將提供略小於採用剪力係數為 3/2 由微分方程式解得的結果。但其結果很接近採用 $\alpha_s = 1.18$ 所獲得者。有關用單位載重法求樑之剪力撓度的討論，將在 11.4 節內提出，而在各種載重條件下關於各

* 龐思樂（Poncelet）氏曾提出在樑之撓曲公式內的剪力影響（見參考書 6 － 16）。

種樑的剪力撓度公式，已列有一表，詳見參考書6－18 。

爲獲得夾心樑的撓度時（見第5.8節），通常需將剪力變形的影響一併計入。因心材的剪力模數 G_c 通常很小，因此剪力剛度亦較小。在本節內已敍述的方法，可用以計算此類樑的撓度。樑的撓曲剛度 EI 代以 $E_f I_f$，其中 E_f 爲兩個面層的彈性模數，而 I_f 爲其慣性矩（見方程式5－37）。剪力剛度 GA/α_s 變爲 $G_c A_c$，因爲我們可假設剪應力均勻分佈於心材的面積 A_c 上；於是剪力係數 α_s 即變成等於1。在實際應用時，因用於夾心型樑的材料種類頗多不同，常因此種材料的撓曲剛度及剪力剛度，缺少準確數據而不能用計算獲得。
此類情形，對於所有的各別材料及各別構造型式，其剛度必須用試驗方法來決定。

剪力之應變能

由於剪力 V 的影響，儲存在樑上一個元體內的應變能式，可很容易的獲得。從圖6－25a 內，可以看出，由剪力所作的功，等於儲存在該元體內的應變能 dU_s，由此成立 $dU_s=\dfrac{V\gamma_c\,dx}{2}$

應用方程式（6－43），可將此式重寫成

$$dU_s=\frac{\alpha_s V^2\,dx}{2GA}$$

於是單獨由剪力影響所引起，儲存在樑內的全部應變能爲

$$U_s=\int\frac{\alpha_s V^2\,dx}{2GA} \tag{6-54}$$

剪力的應變能可加於彎曲應變能內，以獲得全部的應變能。自然在大多數的情形，剪力的應變能與彎曲應變能相較，常可略去不計*。

6·12 大撓度之樑

在本章前面所算之樑的撓度，係由求解近似微分方程式 $EIv''=-M$ 而獲得。若樑的傾斜度很小，應用此式結果頗爲良好。當傾斜度因其撓度將變爲很大時，則必須採用撓曲線的準確微分方程式。這個方程式係根據樑的材料依然保持直線型的彈性這個假設，即

---

*用虛功（method of virtual work ）可導出在一根樑內剪力應變能的式子。除剪力係數 α_s 將由形狀因數 f_s 來代替外，其餘均與方程式（6－54 ）相同；見方程式（11－17）。

$$EI\frac{d\theta}{ds}=-M \tag{6-55}$$

此 $d\theta/ds$ 代表樑的曲度，亦即 θ 角對 s 的改變率（ θ 角爲撓曲線的旋轉角，而 s 爲沿樑的本身量得的距離 ）。當旋轉角很小時，則距離 s 變成與距離 x 相同，而旋轉角 θ 變成與傾斜度 dv/dx 相同；因此，$d\theta/ds$ 可以 d^2v/dx^2 爲其近似值。但在撓度很大時，這些簡化辦法即不正確，必須解方程式（6－55）。彈性曲線的準確形狀，由這個方程式求得的，稱爲彈性線體（ elastica ）。

彈性線體問題的數學解法，曾由許多形狀不同之樑及載重狀況分別獲得。由於其解法冗長，將不在此處列出。我們將另提出一個具有實際興趣的例題的最後結果，並列有參考書目，可在何處得到其解法*。

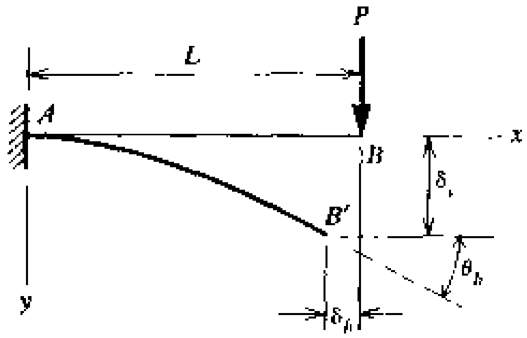


圖 6-26　懸臂樑之大撓度

讓我們考慮圖6－26 內所示的一根懸臂樑 AB ，並假設載重 P 將使樑產生大撓度，結果使樑的末端自 B 移至 B'。樑端的旋轉角以 θ_b 表示，水平及垂直變位則分別以 δ_h 及 δ_v 表示。撓曲線之長度 AB' 等於原來長度 L，由於直接拉力使軸線長度的變化則略去不計。因該樑爲靜定，彎力矩 M 式可很容易獲得，並將其代入方程式（ 6－55 ）內。於是將該方程式經過相當運算過程之後，包括對應變數（ dependent variable ）的一次

---

*彈性線體問題，曾首先被 Jacob Bernoulli, Euler, Lagrange 及 Plana 諸氏研究過（見參考書 6－19 至 6－24 ）。該問題之解法可參閱參考書 6－25 至 6－28 。關於樑之大撓度的最完備的參考資料，當推 Frisch-Fay ，R. 著書（參考書 6－28），其他文獻見參考書 6－29)。

+* 橢圓函數常在高等數學教科書中討論，例如參考書 6－30 。

++* 例如參考書 6－31 至 6－33 。

改變，並在採用適當邊界條件後，該方程式之解，可用橢圓函數（ elliptic functions ）獲得 ++*。從本解法，可獲得求 θ_b、δ_v 及 δ_h 的方程式。特別爲求 θ_b 角的超越函數方程式，如下列的形式

$$F(k) - F(k, \phi) = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \tag{6-56}$$

在上列方程式內的各項，具有如下的定義

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin\theta_b}{2}} \tag{a}$$

$$\phi = \arcsin\frac{1}{k\sqrt{2}} \tag{b}$$

$F(k)$ = 第一種完全橢圓積分

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}} \tag{c}$$

$F(k, \phi)$ = 第一種橢圓積分

$$= \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}} \tag{d}$$

橢圓積分 $F(\kappa)$ 及 $F(\kappa, \phi)$ 的數值，按照參數 κ 及 ϕ 的各種數值，表列於手册 ++* 內。

由於方程式（ 6 － 56 ）的超越性質，必須用試誤法獲取 θ_b。其程序如下：(1) θ_b 假設一個在 0° 及 90° 間之值；(2)應用方程式(a)計算 κ 值；(3)從橢圓函數表內獲得相當於 κ 的 $F(\kappa)$ 值；(4)應用方程式(b)以計算 ϕ；(5)在已知 κ 及 ϕ 後，從表內讀取 $F(\kappa, \phi)$ 值；(6)應用方程式（ 6 － 56 ）以計算載重 P。此種程序將提供合於特爲 θ_b 而假定的載重 P。按其他假設之 θ_b 值，重複作此項計算，即可決定若干 P 及 θ_b 的相當值，一如找得所想獲得的數目。按此種樣式決定的表列數值，已表示在附表 6 － 1 內。注意在載重 P 值很小時，從方程式 $\theta_b = PL^2/2EI$ 所求得的旋轉角已很準確 *。

* 在附表 6 － 1 所列數值，係由 Rojahn 氏計算。（見參考書 6 － 34 ）。

表 6-1　懸臂樑負荷一個集中載重之旋轉角及撓度（見圖6－26　）

$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{\theta_b}{\pi/2}$	$\frac{\delta_v}{L}$	$\frac{\delta_h}{L}$
0	0	0	0
0.25	0.079	0.083	0.004
0.50	0.156	0.162	0.016
0.75	0.228	0.235	0.034
1	0.294	0.302	0.056
2	0.498	0.494	0.160
3	0.628	0.603	0.255
4	0.714	0.670	0.329
5	0.774	0.714	0.388
6	0.817	0.744	0.434
7	0.849	0.767	0.472
8	0.874	0.785	0.504
9	0.894	0.799	0.531
10	0.911	0.811	0.555
∞	1	1	1

在懸臂樑末端的垂直撓度方程式為

$$\frac{\delta_v}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EI}{PL^2}}[E(k) - E(k, \phi)] \tag{6-57}$$

其中

$E(k)$ = 第二種完全橢圓積分

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt \tag{e}$$

$E(k, \phi)$ = 第二種橢圓積分

$$= \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt \tag{f}$$

利用在方程式（6－56　）解答內所獲得之 θ_b ，k ，ϕ 及 PL^2/EI 各值，可很容易將方程式（6－57　）解出。惟一另外增加一個步驟，是從表內決定 $E(k)$ 及 $E(k, \phi)$，並將其他各值直接代入方程式（6－57）內。若干最後得到的結果，列在附表6－1內。

最後，可從下列方程式得水平撓度

$$\frac{\delta_h}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EI\sin\theta_b}{PL^2}} \tag{6-58}$$

此種情形的結果，列在附表6－1的最後一欄。旋轉角 θ_b 及撓度 δ_v 及 δ_h 也用圖解表示在圖6－27a、b及c內。在每一種情形下，大撓度結

果，在載重逐漸近於零時，與用微小撓度理論所獲得者合併一起。

一根懸臂樑在其末端負一集中載重（圖 6 − 26 ）的完整解法，見參

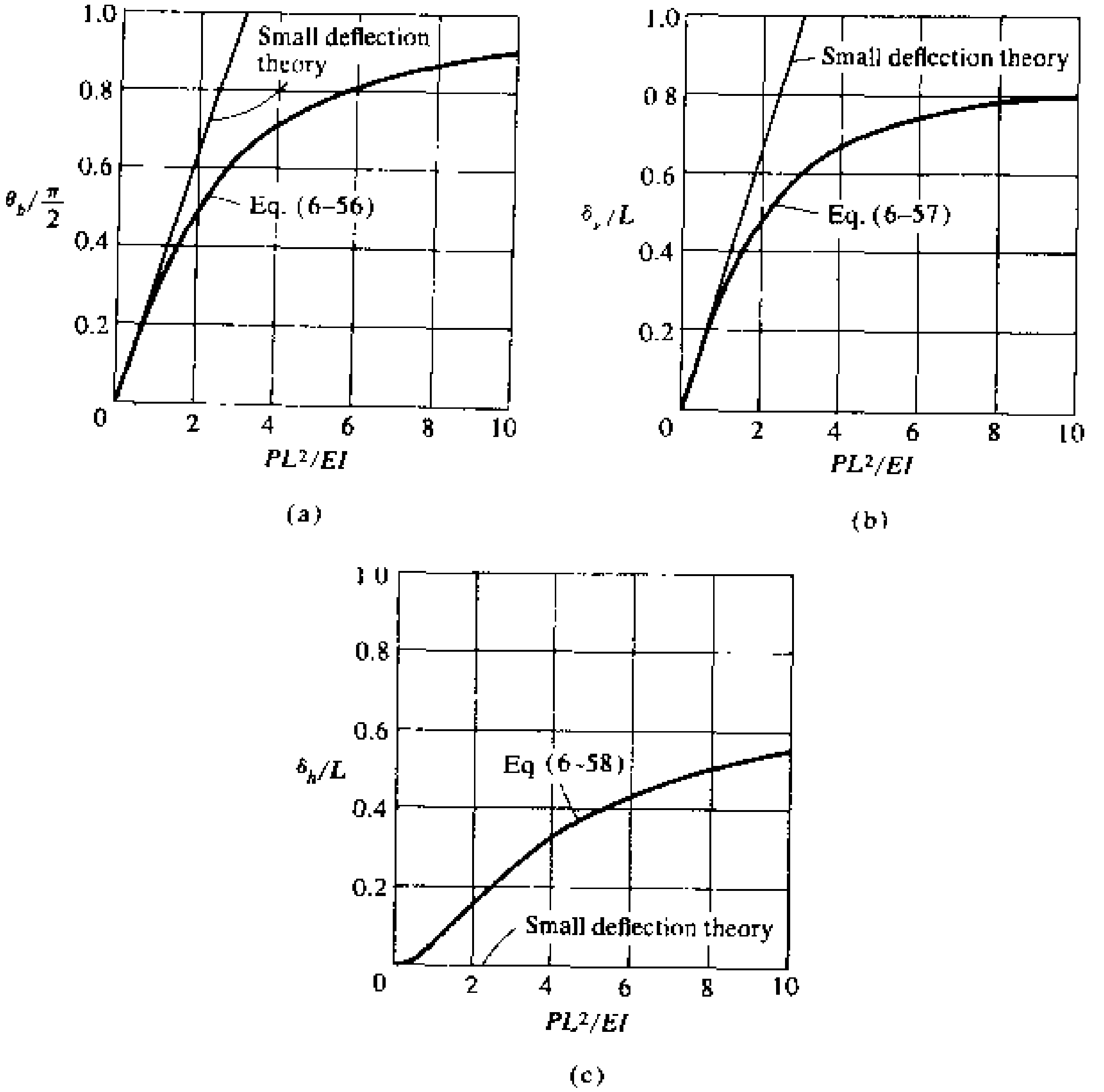


圖 6・27　圖 6・26 所示懸臂樑之撓度：(a)旋轉角 θ_b，(b)垂直撓度 δ_v及(c)水平撓度 δ_h

考書 6 − 28 ，6 − 35 與 6 − 36 ；而一根負均佈載重懸臂樑之撓度的解法，見參考書 6 − 37 。懸臂樑之解法，可適用於載重對稱的簡支樑，只將簡支樑的一半當作懸臂樑即可。若干大撓度的其他各種實例，見參考書 6 − 28 。

在一根樑之末端受有力偶及各種力系，以致發生一般性三向度彎曲情況，其彈性線體的微分方程式，與重物體繞着一固定點移動的那些微分方程式，具有相同形狀。此種類似性，係在 1859 年由克奇荷夫（ Kirchh-

off ）氏觀察到，並稱爲克氏動力類比（Kirchhoff's dynamical analogy ）（見參考書 6 － 38）。在桿件末端只有軸向力的特殊情形，彈性線體的微分方程式，即變成與一個普通擺具大旋轉角的微分方程式相同。介於彈性及動力系統間的克氏類比性資料，見參考書 6 － 39 。

習　題

6.2 － 1　試將簡支樑負均佈載重之撓曲線方程式，用連續求積分法獲得該樑的彎力矩 M、剪力 V 及載重 q 的式子。並將所得的各式與第 4.4 節內的方程式（j）作一比較作爲覆核。

6.2 － 2　一根負均佈載重的簡支樑，其跨徑長度 $L = 3$ m，$q = 6$kN/m，樑受載重 q 所致的最大正交應力爲 7N/mm²。試計算該簡支樑的最大撓度 δ。該樑的截面爲正方形，彈性模數 $E = 10$kN/mm² 的木料作成。

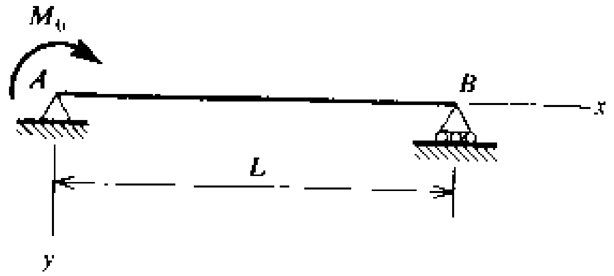
6.2 － 3　一根負均佈載重的寬翼緣鋼簡支樑，其最大撓度爲 8mm，在兩端的最大傾斜度爲 0.01 弳。若最大正交應力爲 120N/mm²。試算出樑的高度 h。假設 $E = 200$kN/mm²。

6.2 － 4　一截面爲矩形的簡支樑，負均佈載重，使其中點的撓度變位爲 50mm 將用同一材料作成之另一根樑代替，其截面仍爲矩形且其寬度只爲原樑寬度之一半。若原樑之高度爲 h_1 新樑之高度爲 h_2，且新樑在同樣載重下，只起撓度 12mm，試問如與 h_1 比較，新樑的高度 h_2 將爲若干？

6.2 － 5　若在圖 6 － 3 所示之樑，其兩端旋轉角的數值比爲 $\theta_a/\theta_b = 3/4$。試求載重 P 的位置。

6.2 － 6　若在圖 6 － 3 內 $a = L/3$，試求該樑的最大撓度與該樑的中點撓度之比。

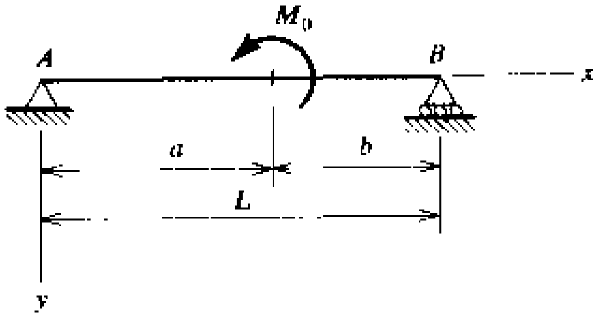
習題 6.2 － 7 至 6.2 － 10 可由撓曲線微分方程式之積分求其解。



習題圖 6 - 2 - 7

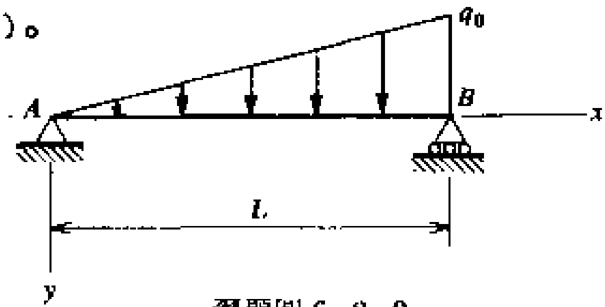
6.2 － 7　試爲一根一端有一力偶 M_0 的簡支樑（見習題圖 6.2 － 7），導出其撓曲線方程式。又該樑的最大撓度爲若干？

6.2－8　試爲一根距左端 a 處有一力偶 M_0 作用的簡支樑，導出其撓曲線公式（見習題圖 6.2－8）。



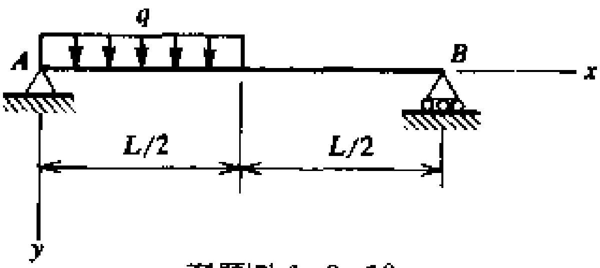
習題圖 6・2－8

6.2－9　試爲一根負三角形分佈載重其最大強度爲 q_0 的簡支樑，導出其撓曲線方程式（見習題圖 6.2－9）。可由四次微分方程式開始導出之（方程式 6－9c）。



習題圖 6・2－9

6.2－10　試爲一根在跨徑左側一半負均佈載重的簡支樑（見習題圖 6.2－10）導出其撓度曲線公式。



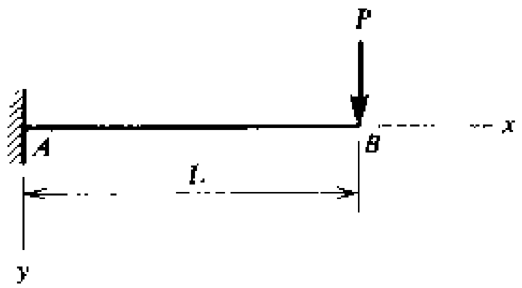
習題圖 6・2－10

6.3－1　一根負荷均佈載重的懸臂樑（見圖 6－4），在其自由端的撓度爲 βL，式中的 β 爲一微小數值，而 L 爲樑的長度。在樑的自由端其撓曲線的旋轉角爲若干？

6.3－2　一根負均佈載重的懸臂樑（見圖 6－4），具有高度 h 等於跨徑長度 L 的十分之一。該樑爲寬翼緣鋼樑，其彈性模數 $E = 200\text{kN/mm}^2$，容許的工作應力，拉力及壓力均爲 140N/mm^2，試計算當全部均佈載重時，在樑端的撓度 δ 對長度 L 之比值 δ/L 爲若干？

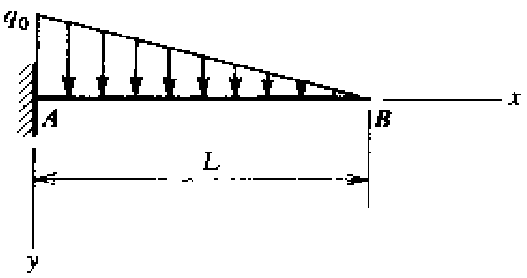
習題 6.3－3 至 6.3－6 利用撓曲線微分方程式之積分解法解之。

6.3－3　一根懸臂樑，在其自由端負一集中載重 P（見習題圖 6.3－3），導出其撓曲線方程式。並決定在其自由端的撓度 δ 及旋轉角 θ_b。



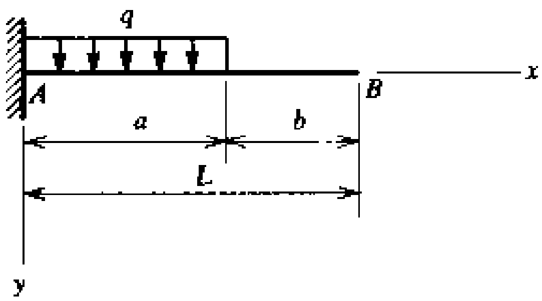
習題圖 6.3-3

6.3－4　一根懸臂樑負最大強度爲 q_0 的三角形分佈載重於習題圖 6.3－4 所示之情形。試求其自由端的撓度 δ 及旋轉角 θ_b 公式。



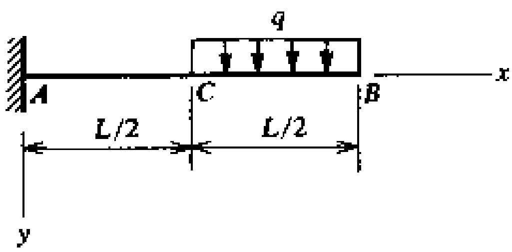
習題圖 6-3-4

6.3－5　試爲一根懸臂樑其載重如習題圖 6.3－5 所示，求其撓度曲線的方程式。



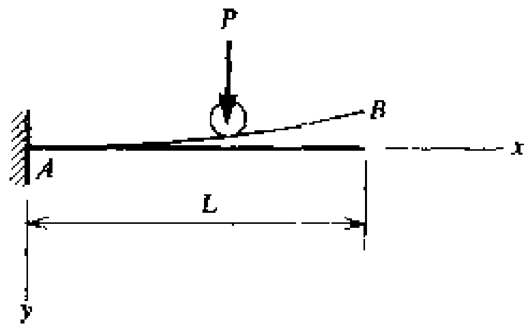
習題圖 6.3-5

6.3－6　試爲如習題圖 6.3－6 所示之懸臂樑定出 B 及 C 點上的撓度。



習題圖 6-3-6

6.3－7　在加載重之前，彎曲桿件 AB 軸線（見習題圖 6.3－7）之方程式必須如何，才可使載重 P 沿樑移動時，軸線永遠保持相同的高度？



習題圖 6・3－7

習題 6.4－1 至 6.4－8 應用力矩－面積法解之。

6.4－1　一根懸臂樑，在其全長均負強度爲 q 的均佈載重（見習題圖 6.4－1）。試求其自由端的旋轉角 θ_b 及撓度 δ。

6.4－2　在一根懸臂樑上的載重作三角形分佈（習題圖 6.3－4）。試決定在其自由端的旋轉角 θ_b 及撓度 δ。

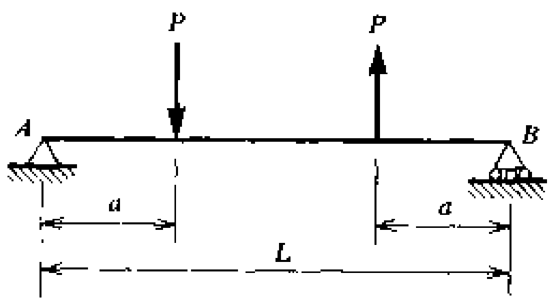
6.4－3　解習題 6.3－6。

6.4－4　試爲圖 6－2 內所示的負均佈載重的簡支樑，求其中點的旋轉角 θ_a 及撓度 δ。

6.4－5　試爲一根簡支樑在其一端受力偶 M_0 時（見習題圖 6.2－7），求出其最大撓度 δ_{max}。

6.4－6　試爲圖 5－1a 所示之樑，求其左端支承處的旋轉角 θ_a 及其中點的撓度 δ_{max}。

6.4－7　在 6.4－7 圖內所示之樑，負兩個集中載重，一個向下另一個向上。試求在左端的旋轉角 θ_a，在向下作用載重下的撓度 δ_1 及其中點的撓度 δ_2。



習題圖 6・4－7

6.4－8　一根簡支樑負三角形分佈的載重（見習題圖 6.2－9）。試求在左支點 A 處的旋轉角 θ_a 及最大撓度 δ_{max}。

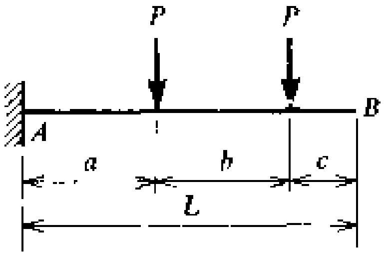
習題 6.5－1 至 6.5－15 應用重疊法解之。

6.5－1　試爲圖 6－19 內所示之懸臂樑，求出其中點撓度 δ 及旋轉

角 θ 。若 $a = 3L/4$ 及 $P = qL$ 。

6.5－2　試爲圖 6－13a 內所示之懸臂伸出樑，獲得其左側支承處的旋轉角 θ_a 。

6.5－3　一根懸臂樑 AB 負荷兩個集中載重如習題圖 6.5－3 所示。假設 $a = b = c = \frac{L}{3}$，試求其自由端的撓度 δ_b 。

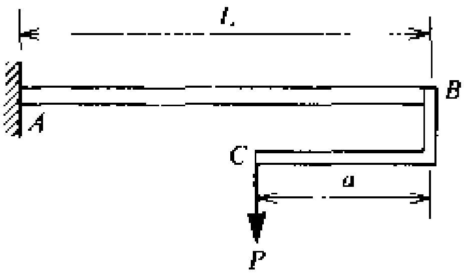


習題圖 6.5-3

6.5－4　一根簡支樑，負沿樑跨徑均等隔開的三個集中載重。第一個載重距樑左端支承的距離爲 $L/4$，第二個載重在跨徑的中點，第三個載重距樑右端支承的距離爲 $L/4$。假設每個載重等於 P，試求在該樑中點的撓度 δ 。

6.5－5　一根長度爲 L 的懸臂樑，其左端 A 爲固定，右端 B 爲自由，上負一個向下的集中載重 P 及一個反時針走向的力偶 M_0。(a)試以 P 及 L 爲項，求 M_0 値，將使樑的自由端的傾斜度等於零；(b)依此，在自由端的撓度 δ 爲若干？

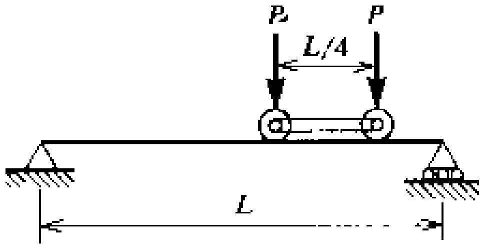
6.5－6　示於習題圖 6.5－6 內之懸臂樑 AB，具有一個托架 BC 連接在樑的自由端 B。在托架的末端，有一 P 力作用在該處。試求比値 a/L，使 B 點的垂直撓度爲零。



習題圖 6.5-6

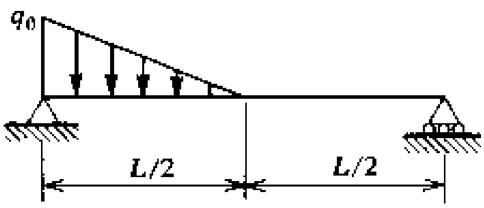
6.5－7　兩根用同樣材料做成的等截面樑，其形狀相似。第二根的每一尺寸均爲第一根的相當尺寸的 n 倍。兩根樑的支承狀況亦完全相同，而在兩根樑上的惟一載重均爲樑本身的重量。試求第二根樑的撓度 δ_2 對第一根樑及其相當撓度 δ_1 的比値 δ_2/δ_1 。

6.5 － 8　兩個相等的輪重，相離的距離為 $L/4$，移動緩慢地越過一根簡支樑，其長度為 L（見習題圖 6.5 － 8）。試決定在該樑中點的最大撓度值。



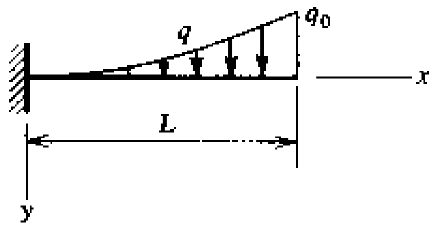
習題圖 6.5 - 8

6.5 － 9　試決定習題圖 6.5 － 9 內簡支樑中點的撓度 δ。



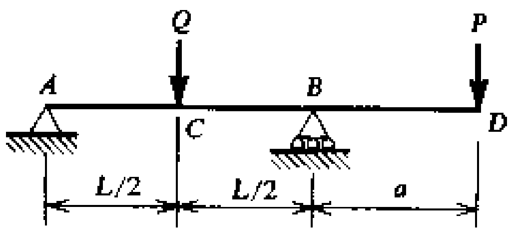
習題圖 6.5 - 9

6.5 － 10　一根懸臂樑負依拋物線變化的載重如習題圖 6.5 － 10 所示。載重強度方程式為 $q = q_0 x^2/L^2$。問該樑的最大傾斜度為何？



習題圖 6.5 - 10

6.5 － 11　一根具有懸臂伸出部分之樑，負兩個集中載重如習題圖 6.5 － 11 所示。試求在 $Q = 0$ 時，C、D 兩點上的撓度。

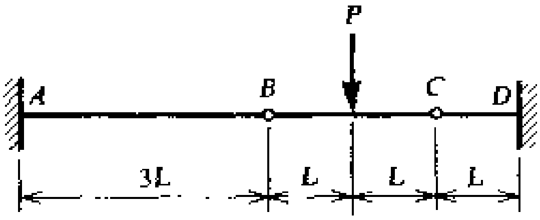


習題圖 6.5 - 11，12，13

6.5－12 若 $Q=2P$ 及 $a=L/2$，試求在習題圖 6.5－12 內所示懸臂伸出樑 A 點處的傾斜角 θ_a 。

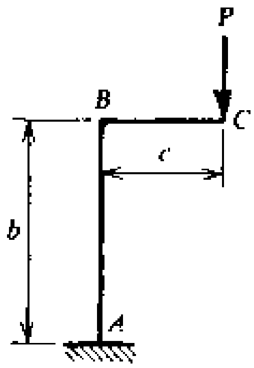
6.5－13 爲使在載重 P 下的撓度等於零起見，試求在習題圖 6.5－13 內的樑上載重 P/Q 之比值。

6.5－14 在習題圖 6.5－14 內所示之樑，其 A 及 D 點爲固定支承，由三根構材在 B 及 C 兩點用栓扣在一起而構成之。試求在載重 P 下的撓度 δ 。



習題圖 6.5－14

6.5－15 試求習題圖 6.5－15 內所示構架 ABC 上 C 端撓度的水平及垂直分撓度，假設 EI 爲常數。（略去軸向變形的影響僅考慮彎曲的影響）。



習題圖 6.5－15

6.6－1 試由解撓度曲線的微分方程式，獲得圖 6－15a 所示的簡支樑左側一半的撓度 v 。

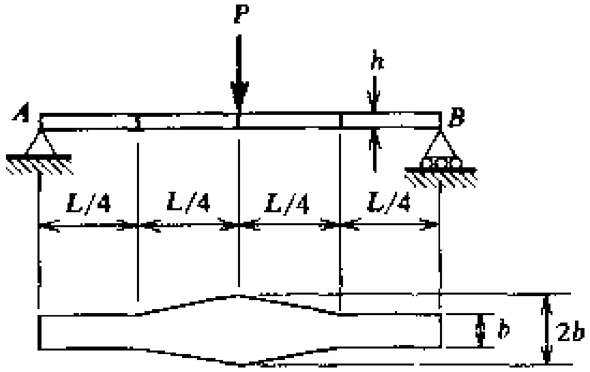
6.6－2 試求圖 6－17a 內所示的懸臂樑自由端 A 的旋轉角 θ 。

6.6－3 參照圖 6－15a 內所示簡支樑，並假設兩末端節段的慣性矩爲 I_1 ，中間節段的慣性矩爲 I_2 。試求該樑中間的撓度 δ_c 。

6.6－4 假設圖 6－17a 內所示懸臂樑，其左側一半的慣性矩爲 I_1 ，右側一半的慣性矩爲 I_2 。並假設樑上的載重爲均佈載重。在樑之全長上均爲強度 q（$P=0$）。試決定該樑自由端 A 處的撓度 δ_a 。

6.6－5 試決定習題圖 6.6－5 內所示之簡支樑 AB 中點的撓度 δ，該樑的高度 h 爲固定不變，寬度則變化如該圖下面部分所示的形狀。

6.6－6 假設圖 6－16 內所示的錐形懸臂樑，具有一個矩形截



習題圖 6-6-5

其寬度 b 爲固定不變。樑的高度自 A 端的 d_a 依直線變化至 B 端的 d_b。若 $d_a=2d_b$，試求自由端的撓度 δ_b。

6.6－7　假設圖 6－16 內所示之錐形懸臂樑，具有空心截面，其薄殼的厚度爲固定不變之 t。在 A 端的直徑 d_a 爲 B 端的直徑 d_b 的兩倍。試求該樑自由端的撓度 δ_b。

習題6.7－1至6.7－8應用差分法求解。

6.7－1　試將圖 6－19a 內所示的簡支樑，分爲長度相等的6個間隔，求出在該樑中間的撓度 δ。試將求得的撓度與6.7節例題1所得的結果，作一比較。

6.7－2　試決定在一根簡支樑中點負一集中力 P，在中點所起的撓度 δ。將該樑分爲四個相等的間隔，並假設 EI 爲常數。

6.7－3　試求一根簡支樑上在一個集中載重的施力點的撓度 δ。設該載重 P 在距左支端的距離爲 $L/4$ 處作用。將該樑分爲四個相等的間隔並假設 EI 爲常數。

6.7－4　試算出一根具有 EI 爲常數的懸臂樑，在自由端處的撓度爲 δ。若該樑在自由端負一集中載重 P。沿該樑採用三個相等的間隔。

6.7－5　若一根懸臂樑負強度爲 q 的均佈載重，其 EI 爲一常數。該樑被分成四個相等的間隔，試求在自由端的撓度 δ。

6.7－6　試決定一根懸臂樑負三角形分佈的載重，在其自由端的撓度 δ_b（見習題6.3－4）。若 EI 爲常數，該樑被分爲四個相等的間隔。

6.7－7　試爲習題圖 6－15a 內所示的非等截面簡支樑，獲得其中點的撓度 δ_c。沿該樑用六個長度相等的節段。

6.7－8　試決定圖 6－16 內所示之錐形懸臂樑，在自由端的撓度 δ_b。沿該樑可用三個節段。該樑具有矩形截面，其寬度 b 爲不變，A 端的

高度 d_a 爲 B 端高度 d_b 的兩倍。

6.8－1　試爲儲存在受純彎曲樑內的應變能 U，以樑的最大正交應力 σ_{max} 爲項導出其公式。假設樑的截面爲矩形（寬度爲 b，高度爲 h）。（將 U 表示最大應力 σ_{max}、彈性模數爲 E 與樑之各部尺寸的函數）。

6.8－2　試決定儲存於一根簡支樑內，其長度爲 L，在其中點負一集中載重之應變能 U。並從所得的結果，求出樑中點的撓度 δ。

6.8－3　一根長度爲 L 的簡支樑，其負荷的載重使其撓曲線方程式爲 $v = \delta \sin \pi x/L$，其中 δ 爲樑中點的撓度。試求儲存於樑內的應變能 U。

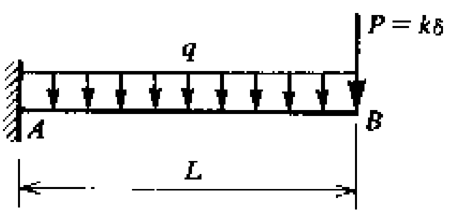
6.8－4　一根簡支樑，負荷兩個集中載重，如圖 5－1a 所示之形狀。假設 $a = L/4$。試求在樑內儲存的應變能 U。利用所得的結果，決定在兩個中的一個載重下的撓度。

6.8－5　兩根矩形截面的簡支樑，係用同一種材料做成，具有相同長度，且載重的情形完全一樣。樑的寬度相同，但第一根樑的高度兩倍於第二根樑的高度。試求儲存於兩根樑內應變能 U_1 及 U_2 的比值。

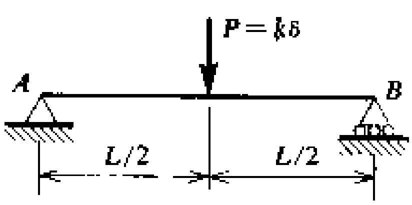
6.8－6　一根木質懸臂樑長 2 m，具有矩形截面，（寬 120mm，高 200mm）負均佈載重 $q = 3$ kN/m，若 $E = 10$ kN/mm^2；試決定儲存於樑內之應變能 U。

6.8－7　一個重量 W 自高度 h 處落在一根簡支樑上（見圖 6－22）。該樑的截面爲矩形，長度爲 L，截面面積爲 A。假設高度 h，如與由 W 所產生的靜力撓度相比，頗爲巨大。試爲樑內之最大正交應力 σ_{max} 導出一個公式。

6.8－8　一個重量 $W = 500$N，自高度 $h = 300$mm 處落下，落在一根長度 $L = 3$ m 的簡支樑（見圖 6－22）上。若該樑之容許正交應力爲 200N/mm^2。試從附錄 C 內的附表 $C－3$，選用一根可以合用的最輕 I 字樑。假設 $E = 200$kN/mm^2。



習題圖 6.9-1



習題圖 6.9-2

6.9－1　一根懸臂樑負強度爲 q 的均佈載重，並在其自由端 B 處負荷一個等於 $\kappa\delta_b$ 的集中載重 P，式中的 κ 爲一比例常數。試求自由端 B 處的撓度 δ_b。在何種條件下樑才是穩定的。（見習題圖6.9－1）

6.9－2　試求負一個等於 $\kappa\delta$（見習題圖6.9－2）的集中載重 P，簡支樑 AB 中點的全部撓度爲 δ。假設樑之中點具有最初撓度 δ。在那種條件下，該樑是穩定的。

6.9－3　試解一根簡支樑，在其中點具有一個集中載重 P 的成塌問題。

6.10－1　一根簡支樑的長度爲 L，高度爲 h（見圖6－24a）受到溫度變化在樑底的溫度爲 T_2 樑頂的溫度爲 T_1。試求該樑的撓曲線方程式。

6.10－2　一根長度爲 L 高度爲 h 的懸臂樑，其頂面溫度爲 T_1 底面溫度爲 T_2。試求，由於溫度差 T_2-T_1 所引起在該樑自由端的撓度 δ 及旋轉角 θ。

6.10－3　一根長度爲 L 高度爲 h（見圖6－24a）的簡支樑，在其頂面的溫度爲 T_1 在底面的溫度爲 T_2。T_1 及 T_2 均爲 x 的函數，形成 $T_2-T_1=T_0x$。其中 T_0 爲一常數。試求該樑的最大撓度。

第七章　靜不定樑

7．1　靜不定樑

在本章內，我們將研究那些樑所具的反力數大於其靜力平衡方程式數。此樑被稱靜不定樑（statically indeterminate beam）。其分析工作，需將其撓度一併考慮在內。在以前各章中，僅研究靜定樑，且在每一實例中，可由靜力平衡方程式立刻獲得樑上的各個反力。由已知反力，即可獲得彎力矩及剪力。因此要求應力及撓度變成可能。若為一靜不定樑，僅以靜力學為依據，即不可能由解平衡公式而求得各應力值。代替的辦法，必須將樑的撓度一併加入考慮，並獲得適合的方程式以輔助靜力學方程式的不足。與此相同的步驟，曾在第一章內，為靜不定問題所包含受拉力及受壓力的構材，加以討論。

有若干種靜不定樑的型式在圖7－1內舉出說明為下。在該圖(a)之樑，其支承A處為固定（被夾住）並在B點為簡支者；此樑稱謂支着懸臂樑（propped cantilever beam），或稱“固定簡支（fixed-simple beam）樑。樑上的反力包括在A點的水平力及垂直力，在A點的力偶，及B點的垂直力。因該樑只能有三個獨立的靜力平衡方程式，因此不能用靜力學算得該全部四個反力。反力的數目超出平衡方程式的數目，稱為靜不定次數（degree of statical indeterminacy）。例如繪於圖7－1 a內之樑，即為一次靜不定。任何數目超出需要用以支承該結構，使其處於靜定狀況的反力，均被稱為靜的贅餘力（statical redundants），而此類贅餘力的數目，必與靜不定的次數相等。例如圖7－1 a內所示之反力R_b，即可視為一個贅餘反力。應注意者，當其從該結構上移去後，只剩下一根懸臂樑。當贅餘力被放鬆之後，所剩下的靜定結構，稱為放鬆結構（released structure）或主結構（primary structure）。另外研究圖7－1 a樑的辦法，將反力矩M_a現作贅餘反力。如被移去，則該被放鬆的結構，為一根簡支樑；在樑上的A點為一個樞接支承，而在B點為一個輥軸支承。

若在樑上的一切載重均爲垂直（見圖７－１ｂ），即將發生一個特殊情形。此時水平反力將消失不見。但該樑依然是一次靜不定，在當時只有自獨立的靜不定平衡方程式，而具有三個反力。

一根固定端樑，有時被稱爲“固定－固定”（ fixed-fixed beam ）樑，如圖７－１ｃ所示。在每一支承處有三個反力，因此該樑總共有６個

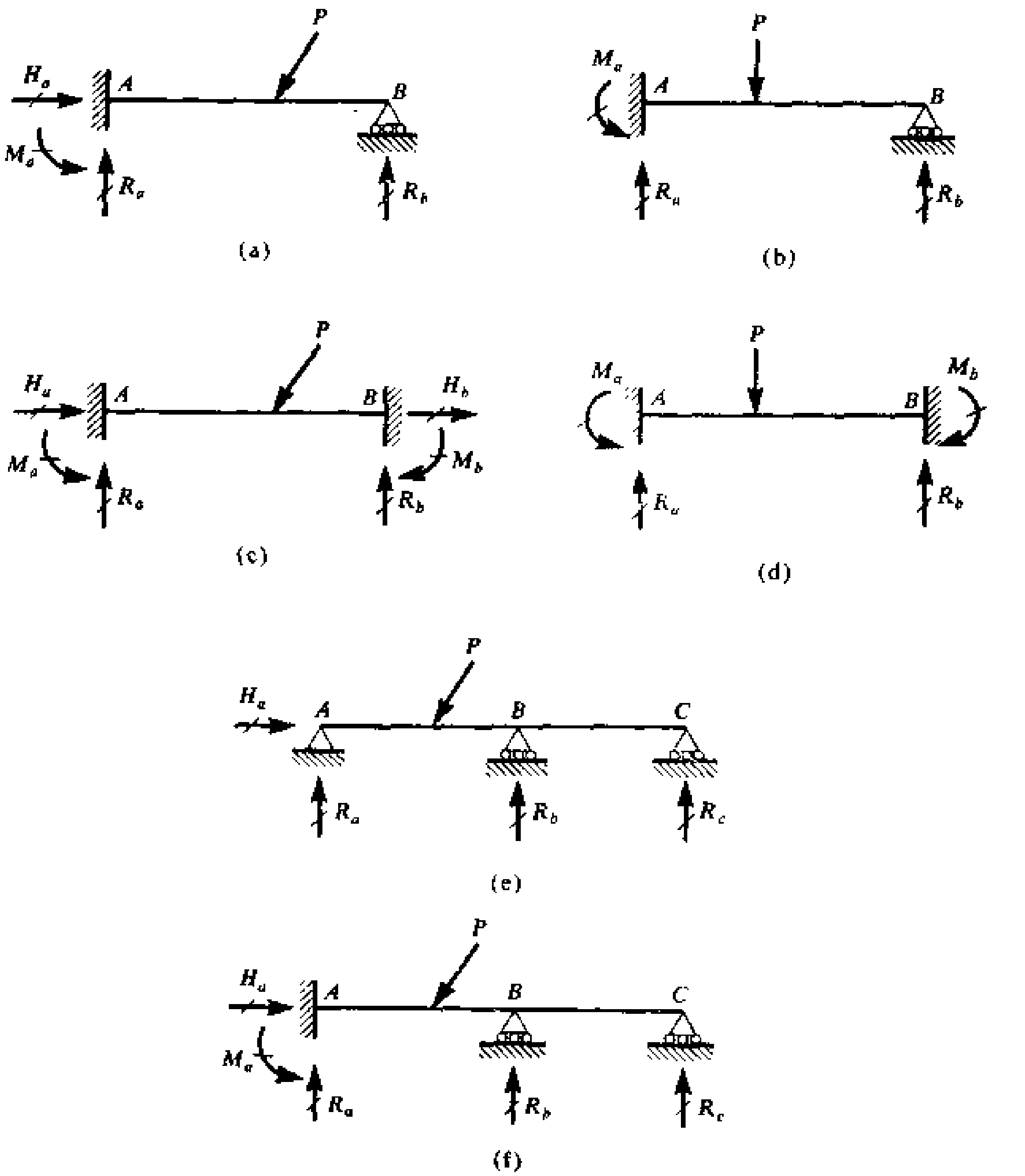


圖７-１　靜不定樑

未知反力。因爲只有三個平衡方程式，故該樑爲三次靜不定。若我們將其一端的各種反力當作三個贅餘反力，且將其自該結構上移去，剩下一根懸臂樑成爲被放鬆結構。若我們將兩個固定端力矩及一個水平反力移去，則該放鬆結構爲一根簡支樑。

再研究只負垂直載重的特殊情形（圖7－1d）。我們所遇到的只有4個反力需要決定。靜力平衡方程式的數目爲兩個，因此該樑爲二次靜不定。如圖7－1e所示。剩下的兩根樑，係連續樑之例；被稱爲連續樑，係因其具有的孔數比一多，且在中間一個支承上連續跨越之故。圖7－1e內所示之樑，爲一次靜不定樑，因有四個反力，但只有三個靜力平衡方程式之故。若R_b被選作贅餘反力，並將其從該樑上移去，只剩下一根靜定的簡支樑AC。若R_c被選作贅餘反力，則被放鬆的結構將爲一根簡支樑AB，具有一段懸出的部份BC。在該圖內所示的最後一根樑，爲二次靜不定樑。可將R_b及R_c選作贅餘反力，被放鬆的結構爲一根懸臂樑。

在以下各節，將討論分析靜不定樑用的各種方法。在每一種情形的目的均爲決定贅餘反力，因在各贅餘反力已知後，剩餘各力的數量，即可利用靜力學求得。在各力已知後，即能決定在任何一點上的各項應力及撓度

7.2　撓曲線之微分方程式

靜不定樑可由解撓曲線的微分方程式分析之。其主要程序與用來分析靜定樑相同（見6.1節至6.3節）。由建立的微分方程式求其通解，並應用邊界條件以估計積分常數等步驟。或採用彎力矩爲項的二階方程式（方程式6－9a），以剪力爲項的三階方程式（方程式6－9b），或以橫向載重的強度爲項的四階方程式（方程式6－9c）。永遠具有足夠的邊界條件，不但可用以確定積分常數，且可用以求得贅餘反力。因爲有數目很多的常數需要估計，因而引起計算上的困難，故此種方法僅對於載重比較簡單的情形，及僅爲單孔之樑，始能實際應用。

茲舉例說明此種方法。分析一端支着的懸臂樑負均佈載重如圖7－2所示。若選擇解二階微分方程式法，則分析方法變成獲取在該樑任何截面上彎力矩的一個式子。爲達到這個目的，需要選擇一個贅餘反力，並以該贅餘反力爲項，表示所有其他的一切反力。茲選擇反力R_b作爲該贅餘反力

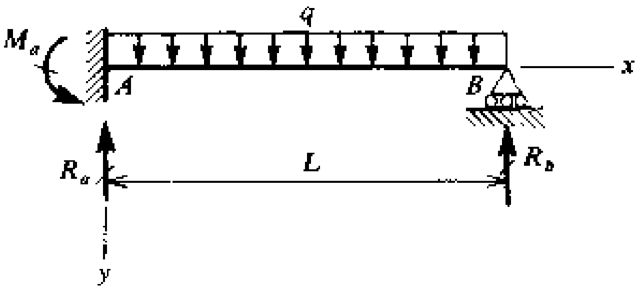


圖 7-2 一端支着之懸臂樑

；於是從靜力平衡方程式，可看出，以 R_b 爲項，在 A 點上的各個反力爲

$$R_a = qL - R_b \qquad M_a = \frac{qL^2}{2} - R_b L \tag{a}$$

至此，可以 R_b 爲項，寫出彎力矩的通式爲：

$$M = R_a x - M_a - \frac{qx^2}{2} = qLx - R_b x - \frac{qL^2}{2} + R_b L - \frac{qx^2}{2}$$

於是撓曲線的微分方程式成爲

$$EIv'' = -M = -qLx + R_b x + \frac{qL^2}{2} - R_b L + \frac{qx^2}{2}$$

經接連兩次積分，得：

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{2} + \frac{R_b x^2}{2} + \frac{qL^2 x}{2} - R_b Lx + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EIv = -\frac{qLx^3}{6} + \frac{R_b x^3}{6} + \frac{qL^2 x^2}{4} - \frac{R_b Lx^2}{2} + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

在這幾個方程式內，有三個未知數（C_1，C_2 及 R_b），而三個邊界條件爲；

$$v(0) = 0 \qquad v'(0) = 0 \qquad v(L) = 0$$

應用這幾個邊界條件，在以上的幾個方程式得到 $C_1 = 0$、$C_2 = 0$ 與

$$R_b = \frac{3qL}{8} \tag{7-1}$$

至此，採用已確定的贅餘反力 R_b 值，從方程式(a)，可求得其餘各個反力

$$R_a = \frac{5qL}{8} \qquad M_a = \frac{qL^2}{8} \tag{7-2}$$

此時，可將這些數量代入撓度 v 傾斜度 v' 及彎力矩 M 等方程式內，由此獲

得該樑的完整分析。

另外一個分析該樑的方法，如圖7－2所示。以反力的彎力矩M_a作爲贅餘反力。於是需要以M_a爲項代表彎力矩M，將得到的式子代入二階微分方程式，再照以上的方法求解。另外一個途徑是由四階微分方程式開始，將在下列例題中加以說明。

【例題】　試用解撓曲線的四階微分方程式，以分析圖7－3所示的固定端樑。

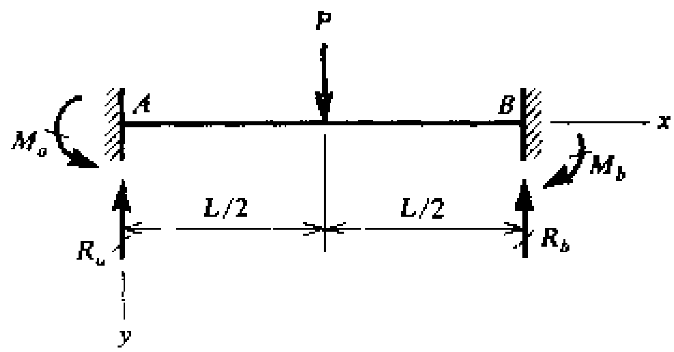


圖7-3　例題 固定端樑

集中載重P作用在樑的中點，因此由對稱關係，即可斷定$M_b = M_a$，及$R_a = R_b = P/2$。於是只剩下一個贅餘數量留待確定。在$x = 0$及$x = L/2$的區段內，樑上並無載重，因此撓曲線的微分方程式成爲

$$EIv'''' = 0$$

由此產生下列各式

$$EIv''' = C_1 \tag{b}$$

$$EIv'' = C_1 x + C_2 \tag{c}$$

$$EIv' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \tag{d}$$

$$EIv = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \tag{e}$$

可應用於該樑左半孔的邊界條件如下：首先，在整個樑上這一部份的剪力等於R_a；於是從方程式(b)可得$C_1 = -P/2$。下一步，可看出，在$x = 0$處的彎力矩等於$-M_a$，因此從方程式(c)可得$C_2 = M_a$。關於傾斜度（方程式d），共有兩個條件，即在$x = 0$及$x = L/2$時，$v' = 0$。這兩

個條件產生$C_3=0$及

$$M_a=\frac{PL}{8} \tag{7-3}$$

由此可將贅餘力矩M_a求得。最後在$x=0$時，$v=0$，從此式得出$C_4=0$。將一切結果合併，可寫出下列的撓曲線公式：

$$v=\frac{Px^2}{48EI}(3L-4x) \qquad \left(0\leq x\leq\frac{L}{2}\right) \tag{7-4}$$

且可從該方程式的微分，得傾斜度及彎力矩。

與本例同樣眞實，數目充分夠用的邊界條件，將永遠存在；不但可求得各個積分常數，且可用來求得各個贅餘反力。有時需要爲該樑的一個以上的區段，分別建立各該區段的微分方程式，再利用介於各區段間的連續條件，一如以前在靜定樑所完成者，完成其分析*。

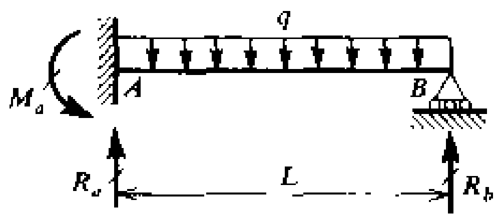
7.3 重疊法

此種方法，可認爲靜不定結構分析的最基木辦法。重疊法（method of superposition）除可應用於樑，即在本章中爲我們所最關心者，且可應用於許多型式不同的結構如桁構及剛構架等。在以前，曾應用這個方法來分析由拉力及壓力構材所構成的靜不定系統。（見1.6節）。

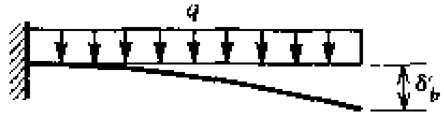
重疊法的本質，可用很簡單的語句加以說明。第一步驟，爲鑑定靜力學的贅餘反力，如上節所說明的。於是再將贅餘的鉗制力（constraints）從靜不定樑上移去，剩下一個被放鬆的靜定結構。在這個被放鬆的結構上，任何一個想要得到的變位，可利用第六章中所述的技巧求得。特別是與贅餘反力相當的變位（或作直線移動或作旋轉），而由載重所引起者，可被確定。下一步驟，各反力的本身可想像爲被放鬆結構上起作用的載重，而與其相當的變位即可計算得出。從重疊原理，我們知道，由於實際載重及各贅餘反力同時起作用而導致的最終變位，必等於由分開計算得到的各個變位之和。以鉗制力爲贅餘反力的情形中，與其相當的變位，或者爲零，或爲另一已知量。因此我們可寫出重疊方程式，以表明此一事實。最

*最早用微分方程式分析靜不定樑的是Navier氏，在其所著材料強度書中出現。見參考書7-1與7-2。

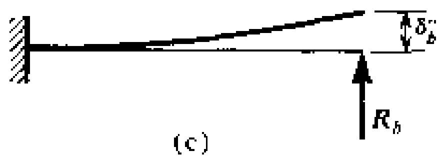
後由這些方程式可解得各贅餘反力值。在此項步驟之後，其他一切反力，即可從靜力平衡方程式分別確定。



(a)



(b)



(c)

圖 7．4　重疊法

在前段所述的各個步驟，舉例說明使其更易了解。讓我們再分析一端支着的懸臂樑，負荷一項均佈載重（見圖 7 － 4 a ）。當反力 R_b 被選爲靜贅餘力，且與其相當的鉗制力被移去後，即可獲得一根懸臂樑作爲被放鬆的結構。此樑相當於由贅餘力及其均佈載重所引起的撓度，用 δ_b'（見圖 7 － 4 b ）表示之。由贅餘力所引起的撓度，則用 δ_b''（見圖 7 － 4 c）表示之。在原來結構上的全部撓度 δ_b 可由撓度 δ_b' 及 δ_b'' 重疊相加且必須爲零。由此項結論，導出下列的重疊方程式：

$$\delta_b = \delta_b' - \delta_b'' = 0 \tag{a}$$

該(一)號出現在這方程式內，是由於 δ_b' 爲向下，而 δ_b'' 爲向上。由於均佈載重 q 及反力 R_b 所致的撓度 δ_b' 及 δ_b'' ，可借助附錄D 中的附表 D-1（第 1 種及第 4 種情形）很容易求得。採用在該附錄中所提供的公式，可從方程式(a)得：

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_b L^3}{3EI} = 0$$

由上式可得：

$$R_b=\frac{3qL}{8} \tag{7-5}$$

至此，反力R_a與力矩M_a由考慮樑的平衡求得，其結果爲：

$$R_a=\frac{5qL}{8} \qquad M_a=\frac{qL^2}{8} \tag{7-6}$$

同一根樑，可另用一種方法，將力矩M_a當作贅餘力加以分析。在那種情形的被放鬆結構，將爲一根簡支樑（圖７－５ｂ）。

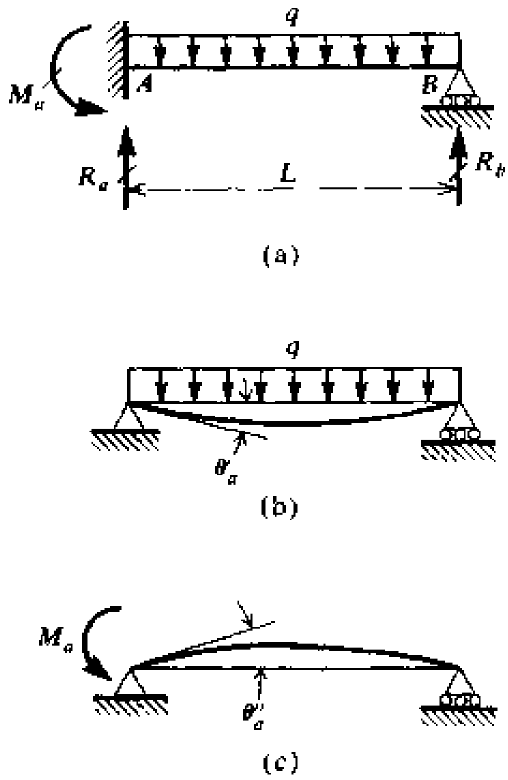


圖７．５　重疊法

因在被放鬆結構上起作用的均佈載重所產生的旋轉角（附表D－２情形１）爲：

$$\theta'_a=\frac{qL^3}{24EI}$$

與其由贅餘力矩M_a所引起的相當的旋轉角（附表D－２，情形７）爲：

$$\theta''_a=\frac{M_aL}{3EI}$$

用重疊方程式以表示在原樑支承A點的總旋轉角爲零，即寫成

$$\theta_a = \theta'_a - \theta''_a = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_a L}{3EI} = 0 \qquad \text{(b)}$$

解此方程式，可得$M_a = \frac{qL^2}{8}$，與以前所得的結果相符。

在求出一根靜不定樑的各反力之後，一切應力合力的計算（軸向力、剪力及彎力矩等），將不會有任何困難。因靜力平衡方程式已足夠達成此項任務。此外，可利用撓曲線的微分方程式，或聯合應用重疊原理與附錄D內所列的撓度公式，以獲得任何一點上的撓度及傾斜度。在以下所舉例題及在本章習題內，其注意力將着重在如何求得各個反力，因爲這是解法中的主要關鍵步驟。

本節內所使用的分析方法，常被稱爲韌性分析法（ flexibility method of analysis ）或稱爲力分析法（ force method of analysis ）。後一名詞，起源於用力量（力及力偶）作爲贅餘反力；而前一名詞係因未知數的係數（如在方程式(b)之$L/3EI$項）具有韌性之故。亦即由單位載重所產生的韌性（ flexibilities ）。此韌性，將在第十一章內作更廣泛的討論。在該章內的結構分析主題，將以一種普遍化的形式提出。重疊方程式，表示加於韌性上的條件（見方程式(a)及(b)），常稱爲適合性方程式（ equations of compatibility ）。

【例題】1.示於圖7－6a內的兩孔連續樑，各個反力以重疊方法決定之。注意，該樑是承受強度爲q的均佈載重。

選擇中間反力R_b爲贅餘反力，我們明白，被放鬆的結構爲一根簡支樑（圖7－6b）。在均佈載重作用下，被放鬆結構內B點的撓度（見表D－2情形1）爲：

$$\delta'_b = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

式中的L爲每孔長度。因贅餘反力而產生的向上撓度（見圖7－6c）爲

$$\delta''_b = \frac{R_b(2L)^3}{48EI} = \frac{R_b L^3}{6EI}$$

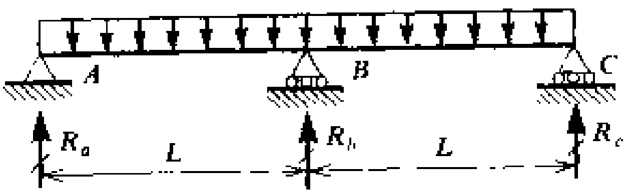
上式係從附表D－2，情形4查得。關於B點垂直撓度的適合性方程式爲

$$\delta_b = \delta'_b - \delta''_b = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_b L^3}{6EI} = 0$$

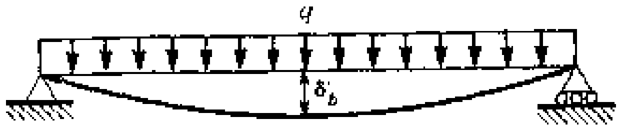
由此式求得：

$$R_b = \frac{5qL}{4} \tag{7-7}$$

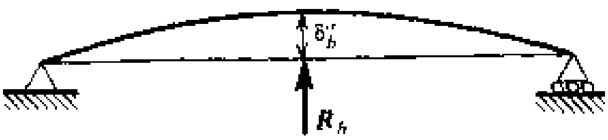
另外兩個反力值爲 $R_a = R_c = 3qL/8$ ，係從靜力平衡獲得。在所有反力已知後，在進行求應力合力及撓度時，將無任何困難。



(a)



(b)



(c)

圖 7-6　例題 1　雙孔連續樑

【例題】2 一根具兩固定端之樑負荷一個集中載重 P ，如圖 7－7 a 所示。求該樑兩端所起的反力及反力矩。

選擇反力矩 M_a 及 M_b 爲贅餘反力，因而得到一個形式爲簡支樑的放鬆結構（圖 7－7 b）。由載重 P 使樑兩端所起的旋轉角由附表 D－2，情形 5 內查得：

$$\theta_a' = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad \theta_b' = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

至此，可將贅餘彎力矩 M_a 及 M_b 當作載重一樣，加於該已放鬆的結構上（圖 7－7 c及 d）。在樑的兩端，因 M_a 而產生的旋轉角爲：

$$\theta_a'' = \frac{M_a L}{3EI} \qquad \theta_b'' = \frac{M_a L}{6EI}$$

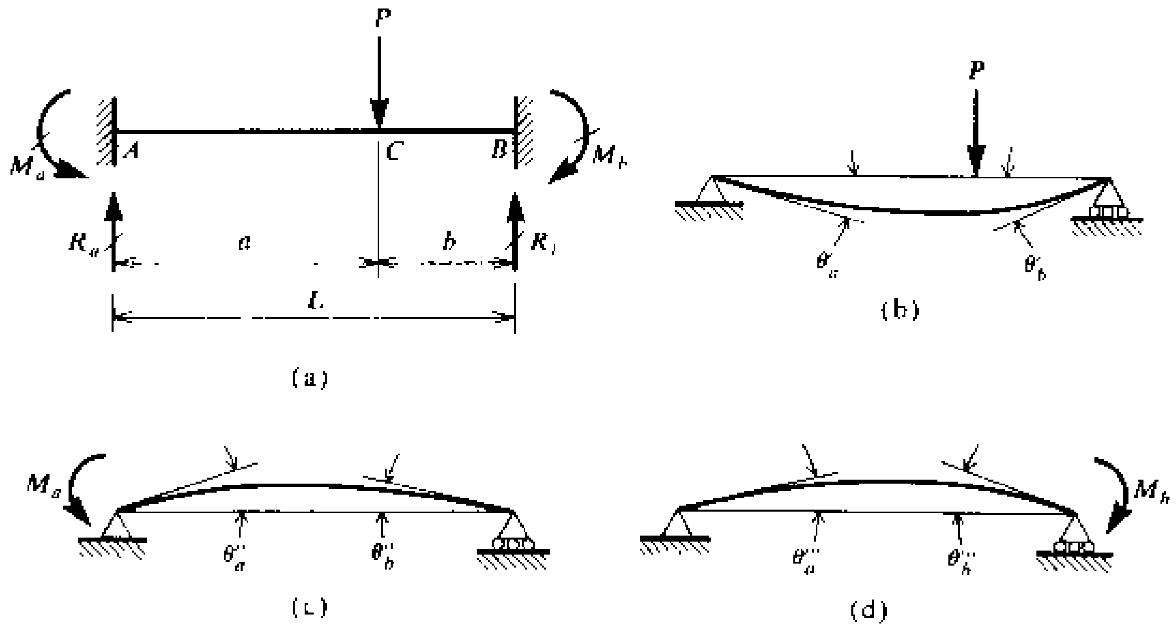


圖 7-7　例題 2　固定端樑

因 M_b 而產生的旋轉角爲：

$$\theta_a''' = \frac{M_b L}{6EI} \qquad \theta_b''' = \frac{M_b L}{3EI}$$

在原樑兩端的旋轉角應爲零，故可得兩個適合性方程式：

$$\theta_a = \theta_a' - \theta_a'' - \theta_a''' = 0$$

$$\theta_b = \theta_b' - \theta_b'' - \theta_b''' = 0$$

將各個旋轉角的式子代入上列兩個適合性方程式後，得到兩個以 M_a 及 M_b 的聯立方程式：

$$\frac{M_a L}{3EI} + \frac{M_b L}{6EI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$\frac{M_a L}{6EI} + \frac{M_b L}{3EI} = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

由兩式解得：

$$M_a = \frac{Pab^2}{L^2} \qquad M_b = \frac{Pa^2b}{L^2} \tag{7-8}$$

應用以上結果與平衡方程式，求得垂直反力公式：

$$R_a = \frac{Pb^2}{L^3}(L+2a) \qquad R_b = \frac{Pa^2}{L^3}(L-2b) \tag{7-9}$$

茲再舉例說明如何應用重疊原理以獲得撓度。設計算在固定端樑 C 點上的撓度，C 點是該載重的施力點（見圖7－7 b），其撓度爲：

$$\delta_c' = \frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

係從附表D-2情形5查得。由於力偶 M_a 及 M_b（見圖7－7 c及d），在被放鬆結構的同一點上的向上撓度爲：

$$\delta_c'' = \frac{M_a ab}{6LEI}(L+b) \qquad \delta_c''' = \frac{M_b ab}{6LEI}(L+a)$$

係從附表D-2，情形7查得。將方程式（7－8）內 M_a 及 M_b 值代入，以上兩式將化爲：

$$\delta_c'' = \frac{Pa^2b^3}{6L^3EI}(L+b) \qquad \delta_c''' = \frac{Pa^3b^2}{6L^3EI}(L+a)$$

於是在 C 點的總撓度爲：

$$\delta_c = \delta_c' - \delta_c'' - \delta_c''' = \frac{Pa^3b^3}{3L^3EI} \tag{7-10}$$

當載重 P 置在樑中點時，在樑中點的撓度爲：

$$\delta_c = \frac{PL^3}{192EI} \tag{7-11}$$

兩端的反力爲：

$$M_a = M_b = \frac{PL}{8} \qquad R_a = R_b = \frac{P}{2} \tag{7-12}$$

【例題】3 試求一固定端樑在其跨徑上一部份負有均佈載重時的各種反力（見圖7－8）。

先將距樑左端距離 x 處的一個載重元體 qdx 予以孤立。將元體當作一個集中載重，即可應用例題2內所導得的公式。從力矩 M_a 及 M_b 公式開始（見方程式7－8），以 qdx 代替 P，以 x 代替 a，並以（$L-x$）代替 b；於是因載重元體所產生的固定端力矩爲：

$$dM_a = \frac{qx(L-x)^2\,dx}{L^2} \qquad dM_b = \frac{qx^2(L-x)\,dx}{L^2}$$

求該樑的載重部份長度的積分，得

$$M_a = \int dM_a = \frac{q}{L^2}\int_0^a x(L-x)^2\,dx = \frac{qa^2}{12L^2}(6L^2 - 8aL + 3a^2) \qquad (7\text{-}13)$$

$$M_b = \int dM_b = \frac{q}{L^2}\int_0^a x^2(L-x)\,dx = \frac{qa^3}{12L^2}(4L-3a) \qquad (7\text{-}14)$$

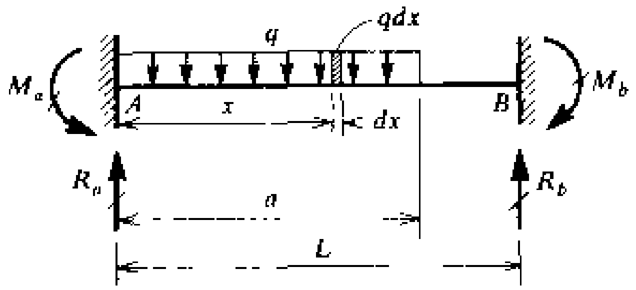


圖 7・8　例題 3　固定端樑在跨徑一部份負均佈載重

與此相似，在樑兩端的反力，可借方程式（７－９）而得：

$$R_a = \frac{q}{L^3}\int_0^a (L-x)^2(L+2x)\,dx = \frac{qa}{2L^3}(2L^3 - 2a^2L + a^3) \qquad (7\text{-}15)$$

$$R_b = \frac{q}{L^3}\int_0^a x^2(3L-2x)\,dx = \frac{qa^3}{2L^3}(2L-a) \qquad (7\text{-}16)$$

即爲所求的反力。

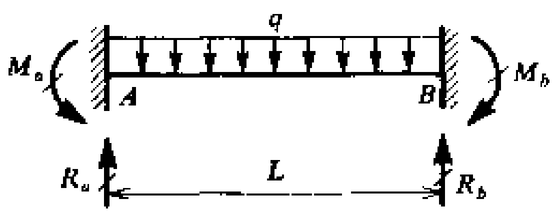


圖 7・9　例題 3　固定端樑負荷均佈載重

若一固定端樑在其跨徑的全部負均佈載重（圖７－９）時，可將 $a = L$ 代入上式，以獲得反力：

$$M_a = M_b = \frac{qL^2}{12} \qquad R_a = R_b = \frac{qL}{2} \qquad (7\text{-}17)$$

在具有固定端之樑，其支承點諸反力，通常被稱為固定端力矩（fixed-end moments）及固定端反力（fixed-end reactions）。這種反力在結構分析法中如勁性法（stiffness method）及力矩分配法（the moment distribution method）等，均佔重要地位。已算成範圍廣大的固定端力矩及反力表，可資利用（例如參考書7－3）。

【例題】4 一根 ABC 樑，簡支於 A、B 兩點，並在 C 點懸掛於 CD 索上。在施加均佈載重 q 之前，索內並未受力，而在索內亦無任何鬆弛之處。

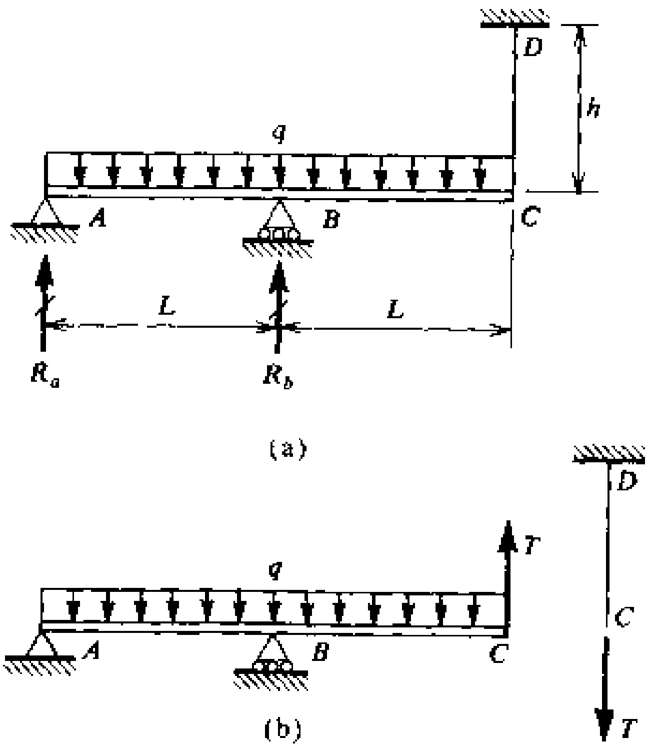


圖 7·10　例題 4 用索支另之樑

當施加載重時，樑在 C 點向下移位，且使索內發生拉力 T。試求該力之量。

在分析時，可選擇在索內的未知力 T 作為贅餘反力，並將該結構切斷成兩部份，如此頗為方便（圖 7－10b）。於是被放鬆的結構係由 ABC 樑及 CD 索所組成，各成獨立結構。力 T 在該樑上係向上作用，而在索內則係向下。在樑上 C 點的撓度，將包括兩部份，一個向下的撓度 δ_c'，係因均佈載重而產生，一個向上的撓度係因力 T 而產生。在同時，索的末端（即 C 點）將向下移位 δ_c''' 量，等於索伸長量。因此，適合性方程式，將表示這項事實，即樑端的向下變位，等於索端的變位，即：

$$\delta_c' - \delta_c'' = \delta_c'''$$

將此方程式列成公式後，我們卽可轉至估計該三項撓度工作。

由於均佈載重使懸臂伸出部份的末端發生的撓度，可從6.5節例題3所提供的結果求得。應用該例題的方程式(a)，並將 $a = L$ 代入得：

$$\delta_c' = \frac{qL^4}{4EI}$$

式中的 EI ，爲該樑的撓曲剛度。因力T而使該樑C點所生的撓度，可從習題 6.5 － 11 的答案，將 $a = L$ 代入卽得，於是

$$\delta_c'' = \frac{2TL^3}{3EI}$$

最後，從索的簡圖可得：

$$\delta_c''' = \frac{Th}{EA}$$

式中 h 爲索的長度，而 EA 爲其軸向剛度 。

將以上各撓度公式代入適合性方程式內，求力T得：

$$T = \frac{3qAL^4}{8AL^3 + 12hI} \tag{7-18}$$

注意：在本例題內，係將一個內在的力，選作贅餘反力，以代替一個外在的反力。贅餘反力的選用，通常基於求解時的方便而設的。

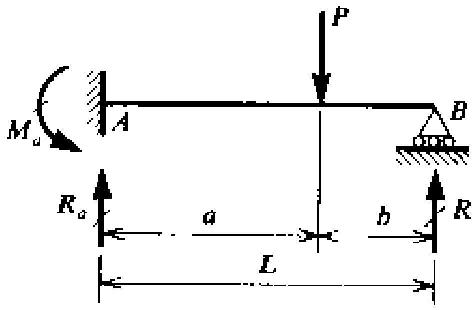
7·4 力矩面積法

另外一種分析靜不定樑的方法，是力矩 - 面積法（ moment - area method ）。此種方法在6.4節內作爲求樑的撓度方法加以敘述。其步驟係應用兩個力矩 - 面積定理，以獲得另外的方程式。由這些方程式計算所需的各贅餘力。這些另外的方程式，是代表在樑上的傾斜度及撓度所具的條件，而此類條件數目，將永遠等於贅餘力的數目。

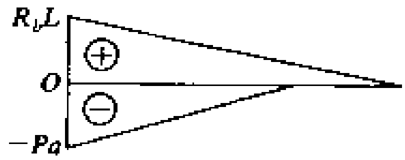
用力矩 - 面積法作樑的分析，開始用前述相同的步驟，卽各贅餘力的選擇，其後將贅餘力自該結構上移去，以便鑑定被放鬆的靜定結構。於是假設該載重作用於被放鬆的結構上，並繪出與其相當的彎力矩圖。與此相似，贅餘反力被當作載重加於該被放鬆的結構上，再就其結果所得的彎力矩繪出力矩圖。在此階段，力矩 - 面積原理被引用來供給另外的關係，是包括面積與M / EI圖的第一力矩方程式所組成。被採用的個別關係，自然

將視樑的型式及贅餘力的選擇而定。

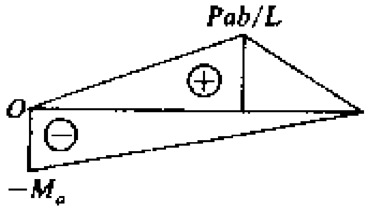
【例題】1　應用力矩－面積方法，試求圖7－11a所示的固定－簡支樑的各反力。



(a)



(b)



(c)

圖7-11　例題1　力矩－面積法

若 R_b 被選作贅餘力，被放鬆的結構爲一根懸臂樑，該樑因 P 及 R_b 所產生的彎力矩圖，如圖7－11b　所示。因在樑的支承 A 處的傾斜度爲零，我們明瞭在撓曲線上 A 點的正切線將通過 B 點。因此，按照第二力矩－面積原理，介於 A，B 兩點間的 M/EI 圖，在 B 點所取的第一力矩，必等於零。由此種關係得下列方程式：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R_bL}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{EI}\right)(a)\left(L-\frac{a}{3}\right)=0$$

由上式可得：

$$R_b=\frac{Pa^2}{2L^3}(3L-a) \tag{7-19}$$

已知此贅餘反力後，由靜力平衡卽可求得另外兩個反力；其結果爲：

$$R_a = \frac{Pb}{2L^3}(3L^2 - b^2) \qquad M_a = \frac{Pab}{2L^2}(L + b) \tag{7-20}$$

作爲二中擇一的處理辦法，可將力矩M_a當作贅餘反力，以解相同的樑問題。在那種情形，被放鬆的結構爲一根簡支樑，而由P及M_a所致與其相當的彎力矩圖，示於圖７－１１ｃ。再用第二力矩面積原理，在B點取M/EI圖的第一力矩得：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Pab}{LEI}\right)(L)\left(\frac{L+b}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M_a}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

解此方程式，求得與前相同的M_a結果（見方程式７－２０）。

從以上結果，將$a = b = L/2$代入，卽可很容易得到一根樑，在其中點受一集中載重時的各個反力爲：

$$R_a = \frac{11P}{16} \qquad R_b = \frac{5P}{16} \qquad M_a = \frac{3PL}{16} \tag{7-21}$$

【例題】２　試決定固定端樑上負一力偶M_0時的反力（圖７－１２ａ）。並求樑上C點的撓皮。此C點卽爲該力偶作用之處。

必須先作贅餘力的選擇；其可能的選擇是：R_a及M_a，R_b及M_b或M_a及M_b讓我們作第一種選擇並取支承A處的各反力作爲贅餘力。於是有一根在B點固定的懸臂樑，作爲被放鬆的結構。可很容易的繪出因R_a、M_a，及該載重M_0所產生的彎力矩圖（見圖７－１２ｂ）。

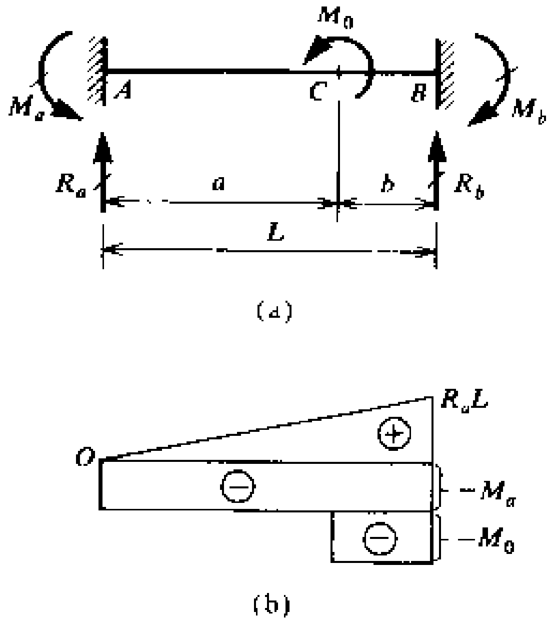


圖７‧１２　例題２　力矩－面積法

需要有兩個關於樑的撓度條件，以求兩個贅餘力。第一個條件，我們注意到樑的兩端傾斜度均爲零。因此在 A 、B 兩點間傾斜度的變化爲零。依照第一力矩 - 面積原理，介於 A 、B 兩點間的 M/EI 圖必須等於零；於是得成立

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R_a L}{EI}\right)(L)-\frac{M_a}{EI}(L)-\frac{M_0}{EI}(b)=0$$

或

$$R_a L^2-2M_a L=2M_0 b \tag{a}$$

第二個條件係從下列的事實獲得之。在撓曲線 A 點上的切線，將通過 B 點，意指在 B 點上所取 介於 A 、B 兩點間 M/EI 圖的面積第一力矩爲零。結果得到下列的方程式：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R_a L}{EI}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)-\frac{M_a}{EI}(L)\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{M_0}{EI}(b)\left(\frac{b}{2}\right)=0$$

或

$$R_a L^3-3M_a L^2=3M_0 b^2 \tag{b}$$

至此，可同時解方程式(a)及(b)以求各贅餘力：

$$R_a=\frac{6M_0 ab}{L^3} \qquad M_a=\frac{M_0 b}{L^2}(2a-b) \tag{7-22}$$

其他兩個反力：

$$R_b=-R_a \qquad M_b=\frac{M_0 a}{L^2}(a-2b) \tag{7-23}$$

係由靜力平衡條件求得者。

在載重施力點處的撓度 δ_c，可從第二個力矩 - 面積原理求得。這個撓度等於介於 A 、C 兩點間 M/EI 圖的面積。在 C 點上所取的第一力矩。（見圖 7 － 12 b），這個撓度爲：

$$\delta_c=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\left(\frac{R_a L}{EI}\right)(a)\left(\frac{a}{3}\right)-\frac{M_a}{EI}(a)\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{R_a a^3}{6EI}-\frac{M_a a^2}{2EI}$$

將 R_a 及 M_a 式代入（見方程式 7 － 22 ），可得在載重下的撓度爲

$$\delta_c=\frac{M_0 a^2 b^2(b-a)}{2L^3 EI} \tag{7-24}$$

當力偶 M_0 在跨徑中點起作用時，在樑上的反力將爲

$$M_a = -M_b = \frac{M_0}{4} \qquad R_a = -R_b = \frac{3M_0}{2L} \tag{7-25}$$

而在跨徑中點的撓度（方程式 7 － 24 ）將爲零。

7·5 差分法

差分法（ finite difference method ），曾在以前用來求樑的撓度，亦可用來分析靜不定樑。在 6.7 節內我們了解，爲求樑的撓度，需要明瞭順沿樑軸線每個選定點上的彎力矩M_i（見方程式 6.30 ）。因爲有多少未知的撓度，即可有多少差分方程式，而其撓度可在解各方程式同時求得。

對於一根靜不定樑的分析工作與一般情形相同。開始作贅餘力的選擇。在將贅餘力選妥之後，可以贅餘力及所施加的載重兩項爲項，以表示樑上任何一個截面的彎力矩。於是將所得的彎力矩式，代入差分方程式內(方程式 6 － 30）。至差分方程式內出現的未知數量的數目，自應等於順沿該樑軸線未知撓度的數目與贅餘力數目之和。永遠有足夠的方程式數目，以解出這些未知數。因爲與每個贅餘力聯在一起，總有一個關於傾斜或關於撓度的條件。差分法具有這種優點，可用來分析非等截面樑，所費之力幾與用以分析等截面所需要的相同。

【例題】 示於圖 7 － 13 之支着懸臂樑AB，具有固定不變的撓曲剛度EI，並在中點負荷一個集中載重P，垂直反力R_b被選作贅餘反力。分析的目的係計算該數值。

當該樑被分爲四個長度相等的間隔（見圖 7 － 13 ），便有三個未知的撓度（ v_1 ，v_2 及 v_3）。因爲另外尚有一個贅餘力，未知數量的總數爲

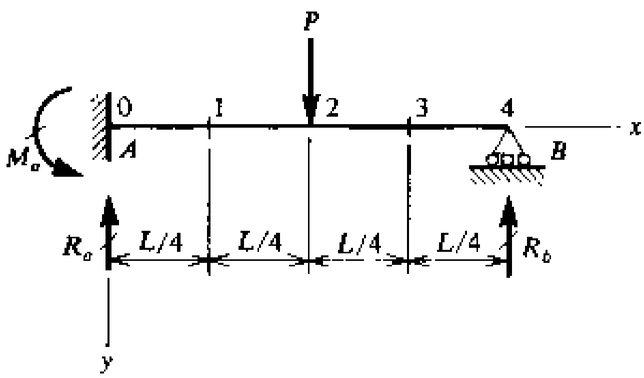


圖 7 - 13 例題 差分法

4；因此需要有四個差分方程式。這些方程式將因應用方程式（6－30）順沿該樑軸線0、1、2及3各點而獲得。因此需要以贅餘力爲項估計這幾點上的彎力矩如下：

$$M_0 = R_b L - \frac{PL}{2} \qquad M_1 = \frac{3R_b L}{4} - \frac{PL}{4} \qquad M_2 = \frac{R_b L}{2} \qquad M_3 = \frac{R_b L}{4}$$

在0點上的差分方程式化爲：

$$v_{-1} - 2v_0 + v_1 = -\frac{L^2}{16EI}\left(R_b L - \frac{PL}{2}\right)$$

因在固定端的撓度零（$v_0 = 0$及傾斜度爲零（$v_{-1} = v_1$），該方程式將簡化爲：

$$v_1 + \frac{R_b L^3}{32EI} = \frac{PL^3}{64EI} \tag{a}$$

應注意的v_1及R_b兩者均爲未知數量，因此被安置在該方程式的左側。在1、2及3各點上的差分方程式，可以類似的樣式獲得下列三個方程式：

$$-2v_1 + v_2 + \frac{3R_b L^3}{64EI} = \frac{PL^3}{64EI} \tag{b}$$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 + \frac{R_b L^3}{32EI} = 0 \tag{c}$$

$$v_2 - 2v_3 + \frac{R_b L^3}{64EI} = 0 \tag{d}$$

(a)、(b)、(c)及(d)四個方程式，可用來求解三個撓度及一個贅餘力R_b，R_b之解爲：

$$R_b = \frac{7P}{22} = 0.3182P$$

此值略高於正確值（見方程式7－21）：

$$R_b = \frac{5P}{16} = 0.3125P$$

如此，用差分法求贅餘力，甚至該樑僅被分數目極少間隔時，亦可得到很合適的結果。當採用數目很多間隔時，計算工作不宜採用手算。應當利用計算機求解各個聯立方程式。

7·6 連續樑

連續跨越幾個支承之樑（例如圖7－14之樑），稱爲連續樑（

continuous beams ）。常在房屋、管線、橋樑及各種特殊的結構中遇到。若在連續樑上的載重皆成垂直，無軸向變形，則所有反力均將一律爲垂直。爲代表此種行態，我們將支承中的一個，當作一個樞支承（ pin

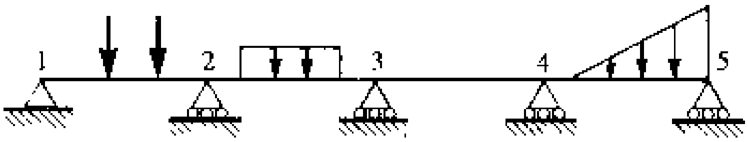


圖 7 . 14　連續樑

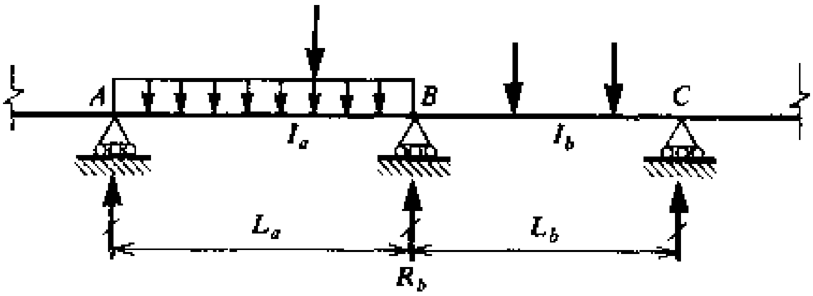
support）；而所有其他支承，均爲輥軸支承（ roller supports ），如在圖中所示。於是反力的總數將與支承數目相同，而靜不定的級次將少於此數兩個。如此圖 7 － 14 中所示之樑，將有 5 個垂直反力，其中 3 個爲贅餘力。

雖然在前幾節所述的任何一種方法，皆可用來分析一個連續樑，但只有重疊法是適於實用的。有一種可能，選擇中間各支承上的反力作爲贅餘力，在此種情形下，被放鬆的結構將爲一根簡支樑。此種技巧曾被採用於 7.3 節的例題 1（參閱圖 7 － 6 ），對於僅有兩三孔的連續樑，頗爲合用。當贅餘力多於兩個時，則選用在中間各支承上樑內的彎力矩爲贅餘力，將更爲有利。如此選擇，將簡化很多計算工作，因其導致一套聯立方程式，其中最多只有 3 個未知數出現在每一方程式中，不管贅餘力的總數有多少。

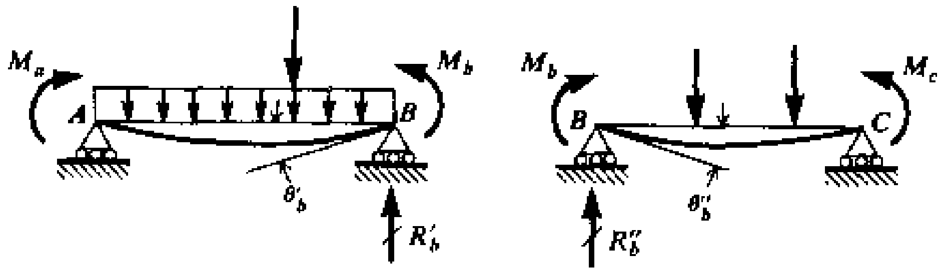
讓我們在此爲這個分析程序，發展出更多的細節。當各支承點上的彎力矩從結構上放鬆之後，該樑在各支承點上的連續性已被破壞，因此該放鬆的結構，將由一系列簡支樑所組成。如此每一根樑上，均負荷外載重作用，並在其兩端的兩個贅餘力矩。在這些載重作用下，可決定每根簡支樑兩端的旋轉角。其適合性方程式，即表示在每一支承處相鄰的兩樑，必須具相同的旋轉角這一事實，供作求解未知各彎力矩的方程式。例如考慮圖 7 － 15a所示連續樑的一部份。三個連續支承用 A 、B 及 C 來標明，相鄰兩孔的長度及慣性矩則分別以 L_a 、I_a 及 L_b 、I_b 等來表示。以 M_a 、M_b 及 M_c 表示此三個支承上的彎力矩，這些力矩的眞正方向，將依樑上載重而定。但爲達成這種誘導目的，將假設各力矩的方向均爲正號，即在樑的頂上產生壓力。被放鬆的結構，係由幾個簡支樑所組成，其相鄰的兩孔，則

示於圖 7 － 15 b 。每孔均負荷所加的外在載重及贅餘彎力矩。

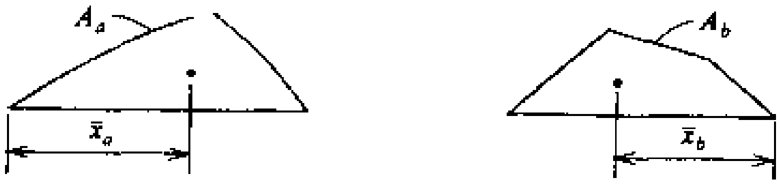
圖 7 － 15b所示之載重，產生兩個簡支樑的撓度。在左側的樑支承 B 處的旋轉角在圖內用 θ_b' 表示，而右側的樑在同一支承處的旋轉角則爲 θ_b''



(a)



(b)



(c)

圖 7 . 15　三 - 力矩方程式

。這兩個角均當作正號，如圖內所示。此與正號的彎力矩 M_b 在相同方向之意。因爲樑之軸線係實際連續跨越支承 B，故其適合性方程式爲：

$$\theta_b' = -\theta_b'' \tag{a}$$

此式表示兩根簡支樑的傾斜度必須在 B 點互相配合的事實。下一個步驟，將爲旋轉角 θ_b' 及 θ_b'' 發展出適當的式子。

彎力矩圖，與被放鬆的結構上作用的外在載重聯合一起，如圖 7 － 15c

所示。這兩幅圖的個別形狀，將依載重的性質而定。但在一切情形中，均可用面積及重心距離來表示彎力矩圖的特徵。讓我們分別將兩幅力矩圖的面積以 A_a 及 A_b 來表示。自 A 點至 A_a 的重心間距離，以 $\overline{x_a}$ 表示；自 C 點至 A_b 的重心間距離以 $\overline{x_b}$ 表示。至此即可應用各彎力矩圖的性質，以估計旋轉角 θ_b'，θ_b''。我們注意到，依照第二力矩－面積定理，由於 AB 樑上的外在載重所引起對 θ'_b 角的貢獻為：

$$\frac{A_a\bar{x}_a}{EI_aL_a}$$

此外，力矩 M_a 及 M_b 對 θ_b' 角貢獻了下列兩量：

$$\frac{M_aL_a}{6EI_a} \quad 與 \quad \frac{M_bL_a}{3EI_a}$$

於是，θ_b' 角為：

$$\theta_b' = \frac{M_aL_a}{6EI_a} + \frac{M_bL_a}{3EI_a} + \frac{A_a\bar{x}_a}{EI_aL_a} \tag{b}$$

考慮在右側的一孔 BC，用類似的樣式可為 θ_b'' 獲得下列的方程式

$$\theta_b'' = \frac{M_bL_b}{3EI_b} + \frac{M_cL_b}{6EI_b} + \frac{A_b\bar{x}_b}{EI_bL_b} \tag{c}$$

將(b)及(c)代入方程式(a)，並重行排列，得：

$$M_a\left(\frac{L_a}{I_a}\right) + 2M_b\left(\frac{L_a}{I_a} + \frac{L_b}{I_b}\right) + M_c\left(\frac{L_b}{I_b}\right) = -\frac{6A_a\bar{x}_a}{I_aL_a} - \frac{6A_b\bar{x}_b}{I_bL_b} \tag{7-26}$$

這個方程式被稱三－力矩方程式（ three-moment equation ）。因其將樑內三個連續的彎力矩，使其發生關係也。對於連續樑在中間的每一支承，均可寫出這個方程式一次，於是有多少未知的彎力矩，即可提供多少個方程式。

若所有各孔均具相同的慣性矩，則三－力矩方程式可稍微簡化成下式

$$M_aL_a + 2M_b(L_a + L_b) + M_cL_b = -\frac{6A_a\bar{x}_a}{L_a} - \frac{6A_b\bar{x}_b}{L_b} \tag{7-27}$$

若已知樑上的各項載重，則在上面各方程式的右側各項永遠可以估計出來。例如，若強度為 q 的均佈載重作用在樑的 AB 孔上，即可得到：

$$A_a = \frac{2}{3}\left(\frac{qL_a^2}{8}\right)(L_a) = \frac{qL_a^3}{12} \qquad \bar{x}_a = \frac{L_a}{2}$$

於是

$$\frac{6A_a\bar{x}_a}{L_a}=\frac{qL_a^3}{4} \tag{7-28}$$

如在跨徑中點有一集中載重P作用，其結果爲：

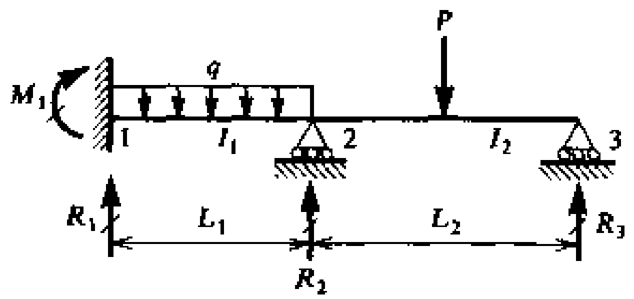
$$A_a=\frac{1}{2}\left(\frac{PL_a}{4}\right)(L_a)=\frac{PL_a^2}{8}\qquad \bar{x}_a=\frac{L_a}{2}$$

及

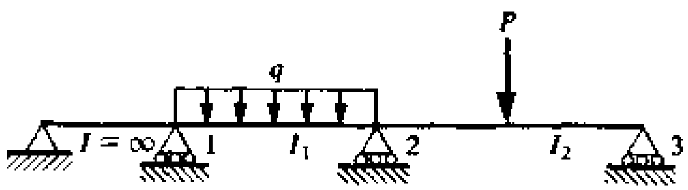
$$\frac{6A_a\bar{x}_a}{L_a}=\frac{3PL_a^2}{8} \tag{7-29}$$

這兩個例，已足表示在估計包括彎力矩圖的各項並無重大困難。一旦將此項步驟完成，僅需將其寫成公式，即可將方程式解出得未知的彎力矩 *。

在以上全部討論中，均假設連續樑的兩個最外端均爲簡支的。若其中一個或兩個是固定支承，則贅餘力矩的數目勢將增加（見圖7－16a）。處理這種情形的最簡單方法，將該連續樑向外增加一孔，以代替固定端；且爲此新增的一孔樑選用一個無窮大的慣性力矩（圖7－16b）。此另外增加具有無窮大勁性的一孔樑，其效應是可以阻止支承1處的旋轉，也就



(a)



(b)

圖7－16　用具無窮大慣性力矩一孔樑代替一個固定支承

---

*三－力矩方程式係由法國工程師「克列布昂」（Clapeyron）及波杜（Bertot）二氏在十九世紀中葉發展成功的（見參考書7－4）。

是由固定支承所強行派給的同樣條件。在圖7－16b的連續樑1、2及3各點所求得的彎力矩，將與原樑上所求得完全相同。選作外加的一孔，其長度並無關係（其長度必須大於零），因其永遠從三－力矩方程式中退出之故。

求得連續樑各支承處的彎力矩後，應用靜力平衡以求各反力並無困難。再重行考慮相鄰的兩孔，並以R_b'及R_b''為AB及BC兩孔簡支樑在B點上的反力。兩者之和，將為支承B處的總反力R_b（圖7－15a）。反力R_b'係由三部分所組成；由外載重所產生的簡支樑反力，由M_a所產生的反力（等於M_a/L_a），及由M_b所產生的反力（等於$-M_b/L_a$）。與此相似，反力R_b''等於由外載重所產生的簡支樑反力，加M_c/L_b。將各項合併，即可得到總反力R_b。應用與此相同的程序於每一支承處，一直到所有一切反力均已算出為止。自然，若有一個集中載重置在樑上一個支承處，則該載重將直接傳遞於該支承為其反力。

【例題】1　為三－力矩方程式用途作一說明，將其解示於圖7－17之例。該樑具有長度相等的三孔及固定不變的慣性力矩，且在第一孔及第三孔負載重。集中載重P假設等於qL。

方程式（7－27）可用於本例題中，因各孔的慣性矩均為相同之故。作為初步工作，先為三孔的每一孔決定$6A\bar{x}/L$這一項，即出現於方程式的右側一項。在1－2孔內，此項為$qL^3/4$，如方程式（7－28）所得者。在2－3孔內，此項為零，因在該孔上並無載重之故。最後在3－4孔內，可看到彎力矩圖為三角形，其最大縱標等於$3PL/16$。三角形的面積為$3PL^2/32$，其距4點的重心距離為$5L/12$（見附錄B，情況3）。因此$6A\bar{x}/L$項，等於$15PL^2/64$，因假設P等於qL故可化為$15qL^3/64$。

至此，已準備好為兩個中間支承2及3，分別寫出其三－力矩方程式。就支承2，我們看出M_a在一般方程式（7－27）內將成為M_1（其值等於零），M_b成為M_2及M_c成為M_3於是

$$2M_2(2L)+M_3(L)=-\frac{qL^3}{4}$$

或

$$4M_2+M_3=-\frac{qL^2}{4} \tag{d}$$

與此相似，支承3的三－力矩方程式為：

$$M_2(L)+2M_3(2L)=-\frac{15qL^3}{64}$$

或

$$M_2 + 4M_3 = -\frac{15qL^2}{64} \tag{e}$$

求解(d)及(e)兩方程式，得到下列的彎力矩：

$$M_2 = -\frac{49qL^2}{960} \qquad M_3 = -\frac{11qL^2}{240} \tag{f}$$

將該樑的三個部份每個的隔離體畫出，並寫出靜力平衡方程式，可得到下列諸反力：

$$R_1 = \frac{431qL}{960} \qquad R_2 = \frac{89qL}{160} \qquad R_3 = \frac{93qL}{320} \qquad R_4 = \frac{169qL}{240} \tag{g}$$

由已得各種資料，我們即可為全樑畫出其剪力圖及彎力矩圖如圖7－17b及7－17c所示。

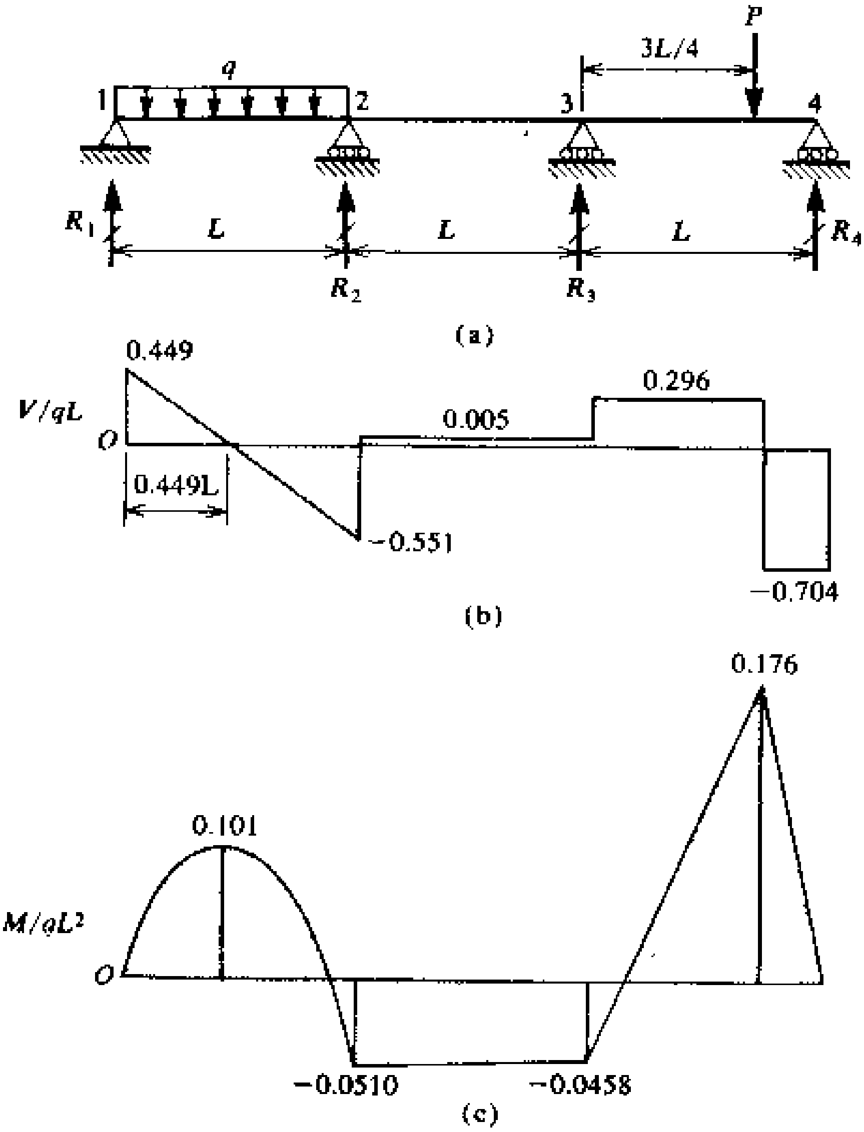


圖7・17　例題1　三－力矩方程式

【例題】2　假設一連續樑的各支承，不在同一高度上，或由於各支承繼續向下沉落，或由於其他原因。此種影響，將如何使其加入三 - 力矩方程式中？

假設三個連續支承 A、B 及 C，列成如圖 7 － 18 所示之情形。連接

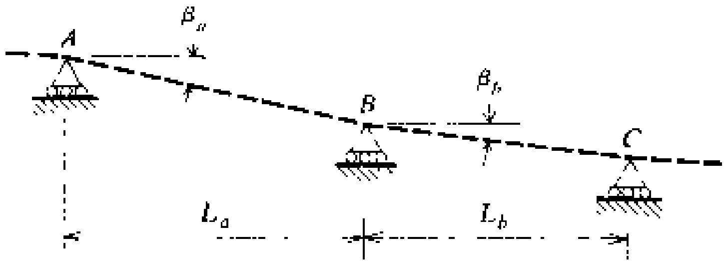


圖 7 · 18　例題 2　在不同高度之支承

A、B 及 C 的虛線，並非代表樑的軸線，只是介於各支承點間的直線而已。（與圖 7 － 15a 比較）。試以 β_a 及 β_b 代表這幾條線的傾斜角度，當右側支承低於左側支承時，假設角為正號。現在仍回至 θ_b' 角的方程式(b)，我們注意到，現有的各項仍將保留在這種方程式之內，但必須對於 β_a 的影響另加考慮。於是代替方程式(b)得下列方程式：

$$\theta_b' = \frac{M_a L_a}{6EI_a} + \frac{M_b L_a}{3EI_a} + \frac{A_a \bar{x}_a}{EI_a L_a} - \beta_a \tag{h}$$

θ_b'' 的方程式（見方程式(c)）亦改變成

$$\theta_b'' = \frac{M_b L_b}{3EI_b} + \frac{M_c L_b}{6EI_b} + \frac{A_b \bar{x}_b}{EI_b L_b} - \beta_b \tag{i}$$

代入連續性方程式（方程式(a)）並重行排列，得一更具普遍性的三 - 力矩方程式

$$M_a\left(\frac{L_a}{I_a}\right) + 2M_b\left(\frac{L_a}{I_a} + \frac{L_b}{I_b}\right) + M_c\left(\frac{L_b}{I_b}\right) = -\frac{6A_a \bar{x}_a}{I_a L_a} - \frac{6A_b \bar{x}_b}{I_b L_b} + 6E(\beta_a - \beta_b)$$

(7-30)

當各支承不在同一高度時，均可應用這個方程式來代替方程式（7 － 26)。

7 · 7　熱 影 響

一根靜不定樑受溫度變化，在樑內將產生應力及撓度。這些數量可應用樑負載重的方法，加以決定有如前述。最有用的方法可能為重疊法。此法由考慮圖 7 － 19 內所示的固定端樑予以說明。此樑被假設在其頂面的

溫度爲T_1，在底面的溫度爲T_2。採用重疊法時，我們開始將贅餘力放鬆，以獲取一個靜定樑。若取R_b及M_b爲贅餘力，則被放鬆的結構將變成一根

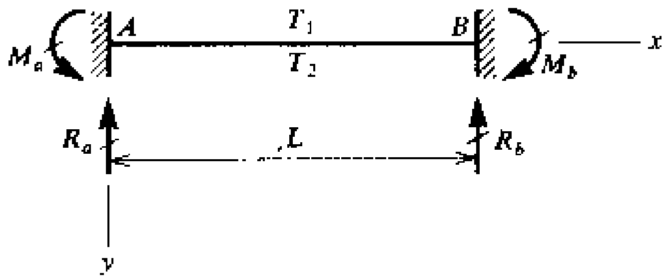


圖7·19　具溫度差之固定端樑

懸臂樑。由於溫度的差別，在這根懸臂樑的B端所發生的撓度及旋轉角分別爲：

$$\delta_b' = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} \qquad \theta_b' = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{h}$$

一如以前在習題6.10－2內所獲得者。在這兩個方程式內，α爲熱膨脹係數而h爲樑之高度。當T_2大於T_1時，撓度δ_b'向上，而旋轉角θ_b'作反時針走向。

由於R_b，在被放鬆結構內的撓度及旋轉角分別爲：

$$\delta_b'' = \frac{R_b L^3}{3EI} \qquad \theta_b'' = \frac{R_b L^2}{2EI}$$

由於M_b而發生的，分別爲

$$\delta_b''' = -\frac{M_b L^2}{2EI} \qquad \theta_b''' = -\frac{M_b L}{EI}$$

式中向上的撓度及反時針走向的旋轉角均爲正號。至此，我們可寫出適合性的方程式如下：

$$\delta_b' + \delta_b'' + \delta_b''' = 0 \qquad \theta_b' + \theta_b'' + \theta_b''' = 0$$

將各種撓度代入這兩個方程式內，然後求解，得：

$$R_b = 0 \qquad M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

R_b 爲零這個事實，可能從樑的對稱而先被料到。若這個事實在開始時即被利用，則以上的解法卽將簡化。因爲在那時僅需一個適合性方程式。根據對稱觀察得到的另一結果爲力矩 M_a 等於 M_b 。於是示於圖 7 － 19 內的固定端樑，其最後的反力爲：

$$R_a = R_b = 0 \qquad M_a = M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \tag{7-31}$$

用來分析示圖 7 － 19之樑的另一途徑，爲求解撓曲線的微分方程式。在本例題內的微分方程式將寫成

$$EIv'' = -M - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \tag{7-32}$$

注意，這個方程式將彎力矩（與方程式 6 － 9 a 比較）及溫度影響（見方程式 6 － 24)兩者一律合併在內。樑內的彎力矩式爲：

$$M = R_a x - M_a$$

但，如在以前曾經注意到的，從樑的對稱性質，可知在樑上沒有垂直反力；因此可使 $R_a = 0$ 而獲得：

$$EIv'' = M_a - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

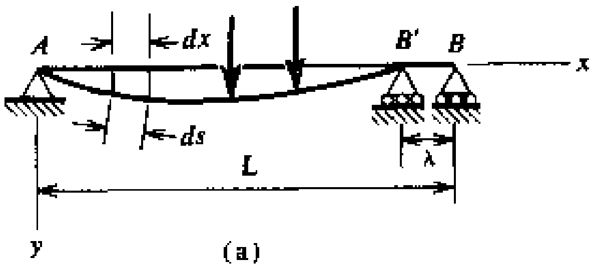
該方程式的第一次積分將爲

$$EIv' = M_a x - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} x + C_1$$

由傾斜度的兩個邊界條件（卽在 $x = 0$ 及 $x = L$ 時，$v' = 0$ ），提供 $C_1 = 0$ 及 $M_a = \alpha EI\ (T_2 - T_1)\ /\ h$ ，此式與方程式（ 7 － 31 ）相符。按照這種樣式求得固定端力矩之後，卽可認爲已將靜不定問題解出。若要求撓曲線方程式，應再完成另一次積分。結果，此撓度 v 所得的式子，有時成爲一個料想不到的事。

7．8　樑端之水平變位

假設有一根 AB 樑，在其一端爲樞支承，在另一端可在水平方向作自由移動（圖 7 － 20a）。當樑負載重而彎曲時，則 B 端將自 B 移至 B' 作水平移動，經過很小一段距離 λ 。變位 λ 等於該樑原來的長度 L 與彎曲樑



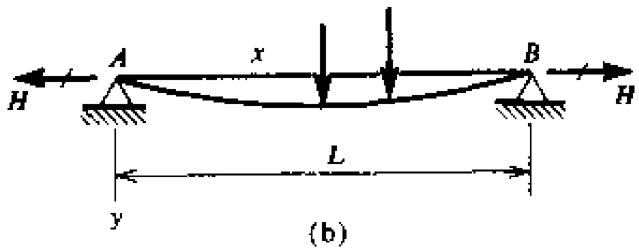


圖 7 - 20　(a)樑端之水平變位
(b)樑具不能移動支承之水平反力

AB' 弦長度之差。為求出這個距離，開始考慮一個長度為 ds 元體，順沿樑的彎曲線而量得。這個元體在 x 軸線上的投影具有長度 dx 。介於長度 ds 及其水平投影間之差為

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dv^2} - dx = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx \qquad \text{(a)}$$

式中的 v 代表樑的撓度。至此，從二項式定理

$$(1 + t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \cdots$$

若 t 與 1 相較頗為微小，可將包含 t^2，t^3各項，略去不計。僅留出最前的兩項，而得下式：

$$(1 + t)^{1/2} \approx 1 + \frac{t}{2} \qquad \text{(7-33)}$$

在方程式(a)內的（ dv/dx ）^{2} 一項永遠是很微小的；於是應用方程式（ 7 — 33 ），將方程式(a)重寫成：

$$ds - dx = dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] - dx = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

若就樑的全長求該式的積分，即可獲得介於樑的全長及 AB' 弦間之差值 λ 爲：

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \tag{7-34}$$

因此，無論何時，在樑之撓曲線爲已知後，即可應用方程式（7－34）獲得水平變位 λ，通常是一個很微小的數量。

若樑的兩端被防止使其不能在水平方向移動，如圖 7－20b 所示之情形。則在樑的兩端均將發生一個水平反力 H。當彎曲發生時，此反力 H 將使樑的軸線伸長。此外，H 力的本身將對樑內的彎力矩具有一種影響，並因此對樑的撓曲線也有影響。企圖爲這個複雜問題作一準確的分析，不如讓我們爲 H 力獲一近似的式子作爲代替，以便確定其重要性 *。一個可作爲樑的撓曲線的近似形狀，爲一個具有下列拋物線形方程式：

$$v = \frac{4\delta x(L-x)}{L^2} \tag{b}$$

式中 δ 爲樑中點的撓度。符合這個假設的撓曲變形後的形狀，其移動距離 λ，可將(b)式代入方程式（7–34）而得下式：

$$\lambda = \frac{8\delta^2}{3L}$$

使該樑伸長 λ 量的力 H 爲：

$$H = \frac{EA\lambda}{L} = \frac{8EA\delta^2}{3L^2}$$

與其相應的軸向拉應力爲：

$$\sigma = \frac{H}{A} = \frac{8E\delta^2}{3L^2} \tag{c}$$

在一根樑中點的撓度 δ 如與樑的長度比較，通常是很微小。例如，δ/L 的比值可能爲 1/500。應用這個數值，並假設樑用材料爲鋼，其 $E=$

*具有軸向及橫向載重之樑，將在高等材料力學內詳加討論。

200 kN / mm² 從方程式(c)其應力値爲 2.2 N / mm² 。因此如與樑內的容許彎應力作一比較，因H而誘發的軸向應力頗爲微小。此外，在事實上，樑的兩端不能很牢固的被鉗住不能移動，且永遠有很小的水平移動發生。因此將減少在上面所算出的軸向力。於是可下結論，將水平鉗制力的影響略去不計，並假設樑的一端放在一個輥軸上，這種慣例可認爲是正當的*。

習　題

7.2－1　試應用 7.2節內獲得的結果，爲圖 7.2 所示一端支着之懸臂樑，繪出其剪力圖及彎力矩圖，將所有一切臨界的縱標，包括最大及最小值在內，分別標明之。

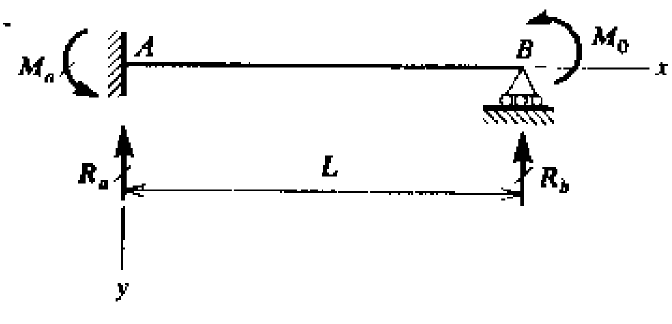
7.2－2　試決定圖 7－2 所示一端支着的懸臂樑之最大撓度 δ_{max} 位置及其數量。

7.2－3　試由解撓曲線第二階微分方程式，並以彎力矩M_a爲贅餘力決定圖 7－2所示一端支着懸臂樑的各反力。

7.2－4　試由解撓曲線第四階微分方程式，決定圖 7－2所示一端支着懸臂樑的各反力。

7.2－5　試爲一根固定端樑負均佈載重（見圖7－9）導出其撓度曲線方程式並決定其一切反力。

7.2－6　試爲習題圖 7.2－6所示一端支着懸臂樑決定在其上的各個

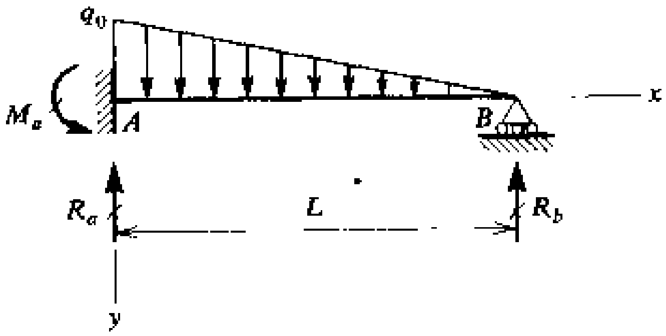


習題圖 7.2-6

反力，及其撓曲線方程式。在該樑上的載重，係由一個在B端起作用的力偶M_0所構成。

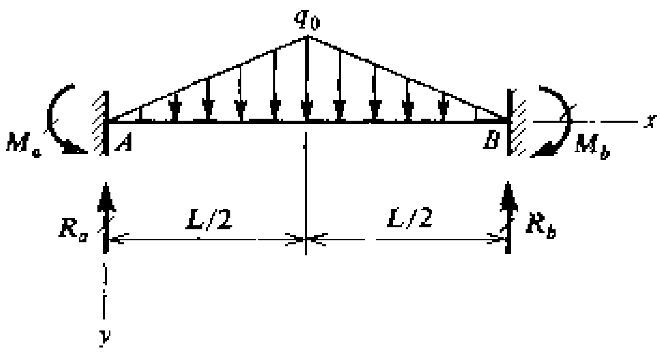
7.2－7　試爲圖 7.2－7所示一端支着懸臂樑負三角形分佈的載重獲得其撓曲線方程式並求出一切反力。

*關於具不能移動支承之樑的更正確分析（見參考書 7－7）。



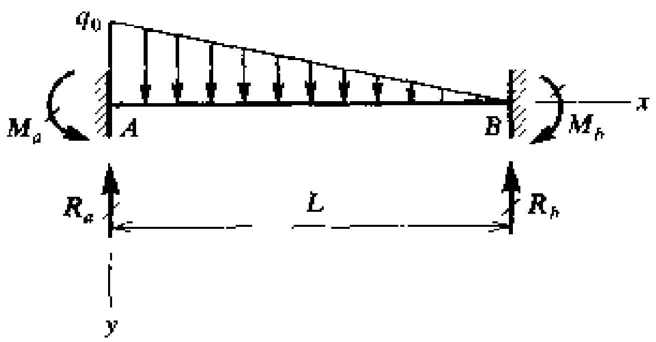
習題圖 7・2－7

7.2－8　試爲圖 7.2－8所示的固定端樑，求出其一切反力，及其撓曲線方程式。



習題圖 7・2－8

7.2－9　試爲圖 7.2－9所示的固定端樑負三角形分佈的載重，導出其撓曲線方程式，並求出一切反力。



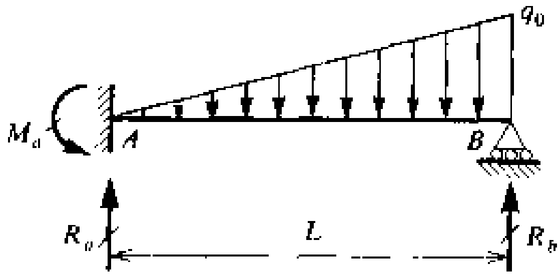
習題圖 7・2－9

將7.3－1至7.3－15各習題，應用重疊法求解。

7.3－1　試由選用反力R_c爲贅餘力，求出圖 7－6a內所示兩孔樑上的一切反力。並爲該樑繪出剪力圖及彎力矩圖。

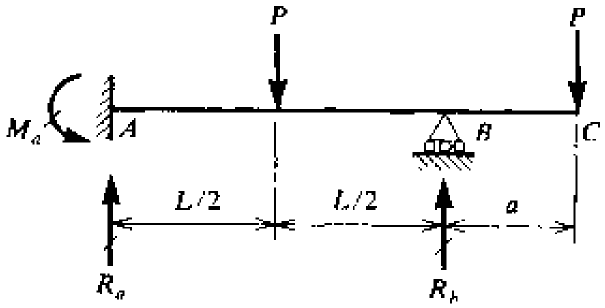
7.3－2　試應用反力M_b及R_b爲贅餘力，爲示於圖7－7a內的固定端樑負一集中載重者，求出其一切反力。且爲該樑畫出剪力圖及彎力矩圖。

7.3－3　試爲圖7.3－3所示一端支着懸臂樑負三角形分佈的載重，決定其一切反力。



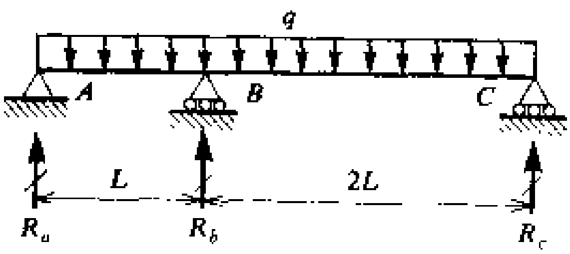
習題圖7.3-3

7.3－4　試爲習題圖7.3－4所示之樑，求其各個反力。



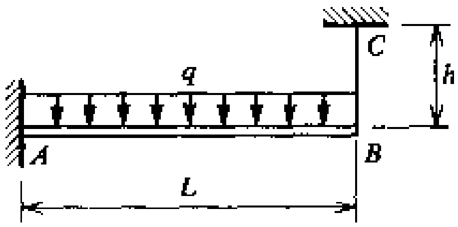
習題圖7.3-4

7.3－5　一根具有兩孔跨徑不同的連續樑，負均佈載重q如習題圖7.3－5所示。求該樑的一切反力。



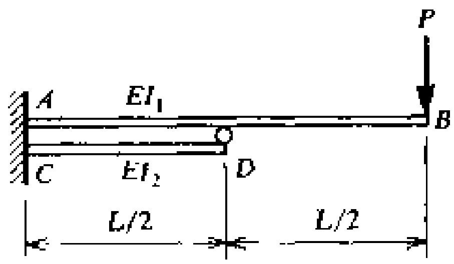
習題圖7-3-5

7.3－6　示於習題圖7.3－6內懸臂樑AB，由一根BC索在其自由端支吊着。在加上載重之前，索被拉緊但並未有力存在。試求因受強度q的均佈載重在索內所產生的力T。假設EI＝樑之撓曲剛度及EA＝索之軸向剛度。



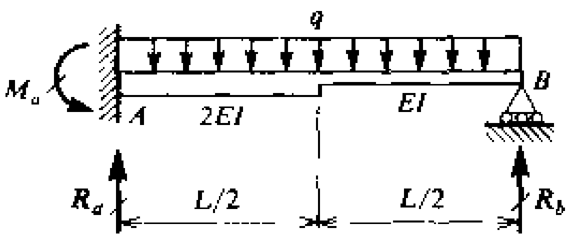
習題圖 7.3-6

7.3－7 兩根懸臂樑 AB 及 CD，其支承如示於習題圖 7.3－7的狀況。在上面之樑具有撓曲剛度 EI_1，在下面之樑具有撓曲剛度爲 EI_2。試求出在 D 點傳遞於兩樑間的力 F。



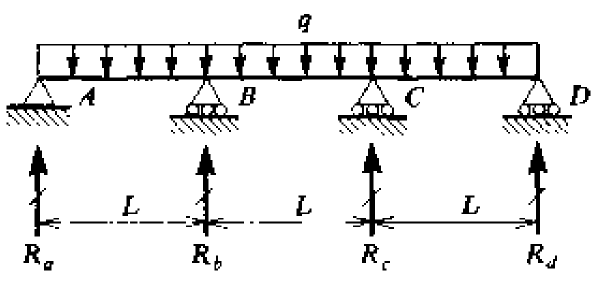
習題圖 7.3-7

7.3－8 繪於習題圖 7.3－8內的一根負均佈載重 q 的非等截面樑 AB。試求在該樑上的一切反力。



習題圖 7.3-8

7.3－9 試爲示於習題圖 7.3－9的三孔連續樑，求出反力的式子。

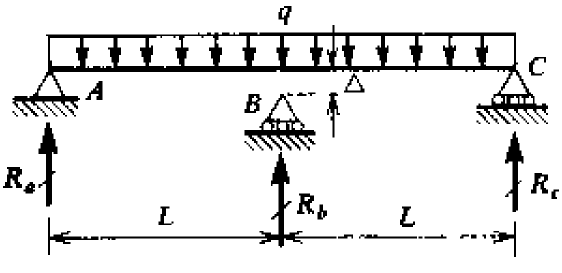


習題圖 7.3-9

7.3－10　試以各支承上的力矩爲賸餘力，求一根在跨徑一部分上負均佈載重的固定端樑的一切反力（見圖7－8）。

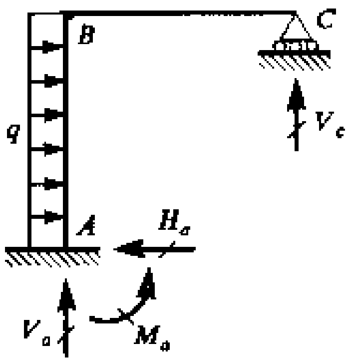
7.3－11　一個三孔連續樑（習題圖7.3－9），在AB孔上負有均佈載重q，在BC及CD兩孔上沒有載重。試決定該樑上的各反力。

7.3－12　一個雙孔連續樑，在加負載重之前，支承在A及C兩個支承上（見習題圖7.3－12）。在樑與支承B間，有一很小的空隙Δ。當均佈載重被加在樑上時，空隙被封閉，並在三個支持上全部發生反力。試問空隙Δ的數量應爲若干，才使三個反力相等。



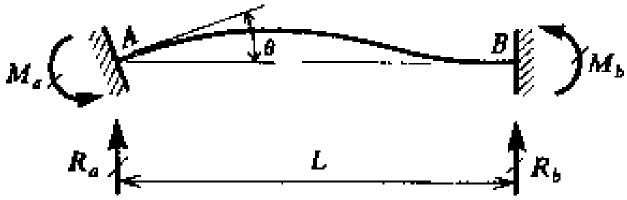
習題圖7.3-12

7.3－13　一個連續構架ABC固定在支承A，用輥軸支承在C，並在B點具有一個剛勁隅角連接（見習題圖7.3－13）。試爲該構架求得其一切反力。（注意：略去各構材的軸向變形，並僅考慮彎曲影響。假設每一構材均具長度L及撓曲剛度EI）。



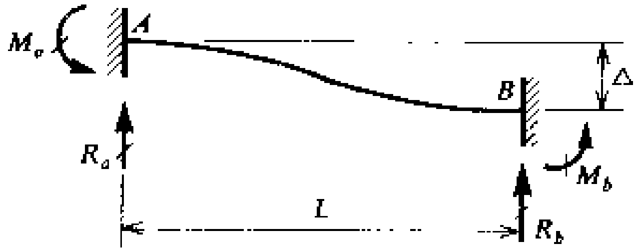
習題圖7.3-13

7.3－14　一根固定端樑AB，其左側支承已旋轉一個很小的角度θ（見習題圖7.3－14）。試爲該樑定出各個反力。



習題圖7.3-14

7.3－15　一根固定端樑AB的一端，就其與另一端的關係而言，已經橫向變位一段距離Δ（見習題圖7.3－15）。試爲該樑求出各個反力。



習題圖 7.3-15

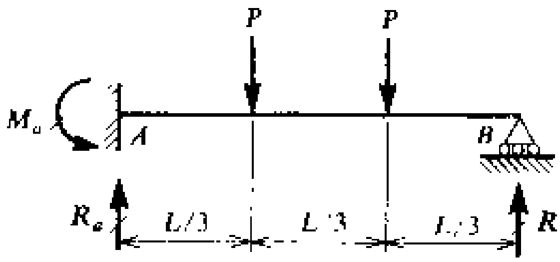
將7.4－1至7.4－9各習題應用力矩－面積方法解出。

7.4－1　試求出圖7－2內所示一端支着懸臂樑負均佈載 q 時各個反力。

7.4－2　習題圖7.2－6，表示一根承受力偶 M_o 的一端支着懸臂樑。試求出該樑的各個反力。

7.4－3　試爲在習題圖7.3－4具有一段懸出部分之支着懸臂樑，定其一切反力。

7.4－4　有兩個集中載重作用在一根固定簡支樑上，如習題圖7.4－4所示。試求該樑的反力。

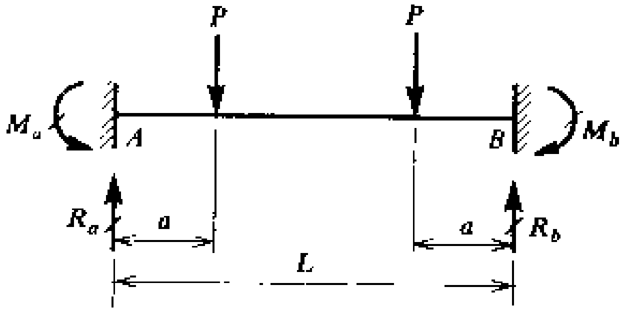


習題圖 7.4-4

7.4－5　試求一根固定端樑在中點負一集中載重（見圖7－3）的各反力。並求出在該樑中點的撓度。

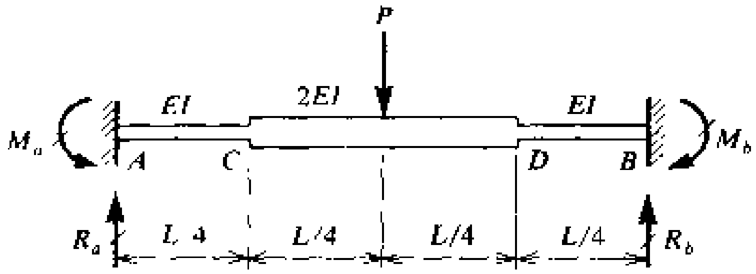
7.4－6　試爲固定端樑負均佈載重時決定各反力及在樑中點的撓度。（見圖7－9）。

7.4－7　試爲固定端樑負荷兩個集中載重時求出各個反力（見習題圖7.4－7）



習題圖 7.4-7

7.4－8　試爲習題圖（7.4－8）內所示的非等截面樑負一集中載重P時，求出其固定端力矩。



習題圖7.4-8

7.4－9　試爲圖7－7a內所示之固定端樑，求出各支承上的反力及在載重P下的撓度。

將習題7.5－1至7.5－4各習題應用差分法求解。

7.5－1　試求出圖7－2所示一端支着的懸臂樑負均佈載重時，在其右端的反力R_b。順沿該樑採用四個相等的間隔。

7.5－2　試爲習題7.3－3內之樑，負荷三角形分佈的載重時，求出在左端的反力力矩M_a。順沿該樑採用四個相等的間隔。

7.5－3　試爲一根固定端樑在其中點負一集中載重P時，求出其固定端力矩M_a及M_b（見圖7－3）。將該樑分成長度相同四個間隔。

7.5－4　試爲習題7.3－5內的兩孔連續樑，決定在其支承B處的反力R_b。使每一間隔的長度爲$L/2$。

將7.6－1至7.6－10各習題，應用三－力矩方程式求解。

7.6－1　解習題7.3－5。

7.6－2　解習題7.3－9。

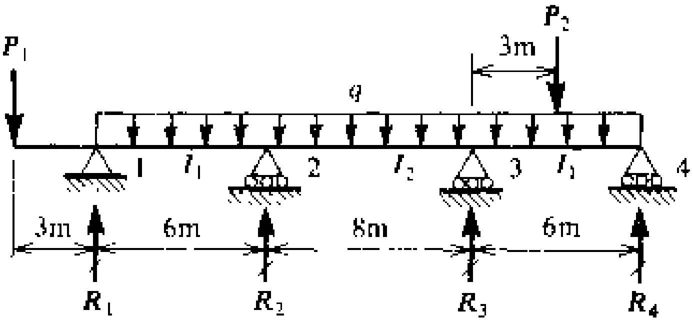
7.6－3　一根雙孔連續樑，全長均承受強度爲q的均佈載重。試決定在中間支承上的彎力矩M。假設當載重q被加在樑上時，此支承將沉落一段距離Δ。兩孔均具相同的長度L及相同的撓曲剛度EI。

7.6－4　一個三孔連續樑，每孔的長度均爲L，並在每孔的中點支承一個集中載重P。試爲此樑畫出其剪力圖及彎力矩圖。

7.6－5　一個三孔連續樑，在其第一孔的全長上承受強度爲q的均佈載重，在第二孔及第三孔上則無載重。假設每孔的長度均爲L，試求每個支承處在樑內的彎力矩。

7.6－6　一個四孔連續樑，在其全長均負強度q的均佈載重。假設每孔的長度爲L，試決定在各支承處的彎力矩，並畫出其剪力圖及彎力矩圖。

7.6－7 一個在四個支承上的連續樑，在其左端有一段懸出部份如習題圖 7.6－7所示。假設 $P_1 = 3$ kN，$q = 6$ kN/m，$P_2 = 9$ kN，$I_1 = 50 \times 10^6 mm^4$ 及 $I_2 = 45 \times 10^6 mm^4$ 試求出各支承上的彎力矩。

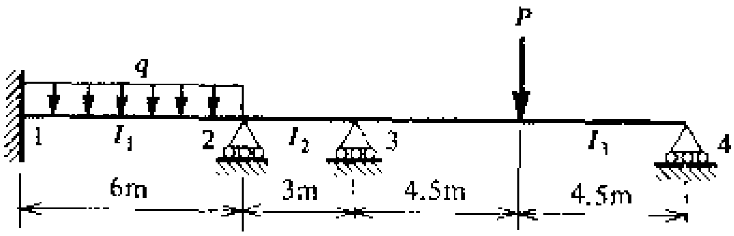


習題圖 7-6-7

7.6－8 依圖7－16a所示具有固定支承的連續樑，並假設 $L_1 = L_2 = L$，$I_1 = I_2$ 及 $P = 0$。試決定由載重 q 所產生的彎力矩 M_1 及 M_2。

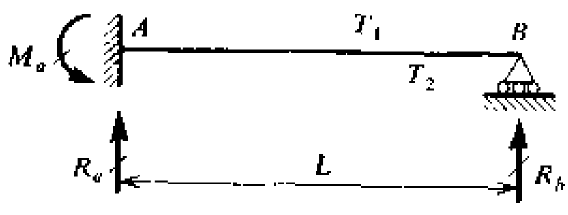
7.6－9 一個七孔，每孔長度相等均爲 L 的連續樑，當僅有中間的一孔承受強度爲 q 的均佈載重時，試決定在各支承處的彎力矩。

7.6－10 示於習題圖 7.6－10 的連續樑，具有一個固定支承 1 處及簡支承 2，3 及 4 各處。均佈載重 $q = 80$ kN/m，及 $P = 44$ kN，三孔的慣性矩分別爲 $I_1 = 10^9 mm^4$，$I_2 = 0.5 \times 10^9 mm^4$，及 $I_3 = 3 \times 10^9 mm^4$。在這幾個載重作用下，3 處的支承垂直沉落量 $\Delta = 2mm$ 試求出樑內的 M_1，M_2 及 M_3（假設 $E = 200 kN/mm^2$）。



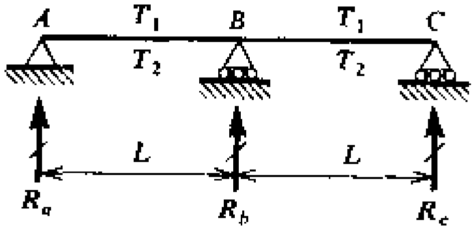
習題圖 7-6-10

7.7－1 一根一端支着懸臂樑，其左端 A 爲固定右端 B 爲簡支，在上表面的溫度爲 T_1 及在下表面的溫度爲 T_2（見習題圖 7.7－1）。試求樑的各個反力。



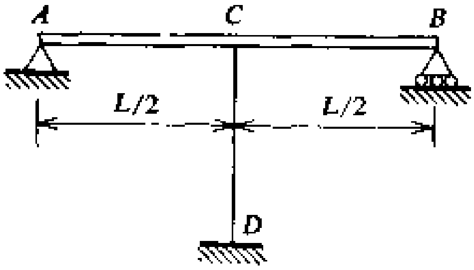
習題圖 7-7-1

7.7－2　一個雙孔連續樑，遭遇到一種溫度的差別（見習題圖 7.7－2）。試求該樑的各個反力。



習題圖 7.7-2

7.7－3　一個簡支樑 AB 連接在一個 CD 索上，索是拉緊的，但沒有最初的拉力（見習題圖 7.7－3）。索的長度爲 H，其截面面積爲 A。假設樑及索均用相同的材料作成。試求出當溫度下降 T 度時，在索內的拉力 S 爲若干。



習題圖 7.7-3

7.8－1　一根簡支樑負強度 q 的均佈載重，試計算其水平移動 λ。

7.8－2　假設一根具有不能移動支承之樑，受荷重撓曲變形後的形狀可用方程式 $v=\delta\sin\ \pi x/L$ 表示。試決定在其兩端的水平力 H。

第八章　不對稱彎曲

8・1　負斜載重之對稱樑

樑之彎曲理論在第五章內展開時，我們的注意力被限定在具有軸向對稱平面之樑（見圖5－1至5－3內的 xy 平面）。此外，我們假定有側向的載重，作用於此同一平面內。因此該樑亦在此平面內發生撓曲。在此種外在狀況下，中性軸與垂直對稱軸皆爲截面的主要重心軸。又，由於彎曲所生的正交應力隨其距中性軸距離成直線形變化，並由彎曲公式 $\sigma_x = My/I$（見圖5－3與5－10）計算之。

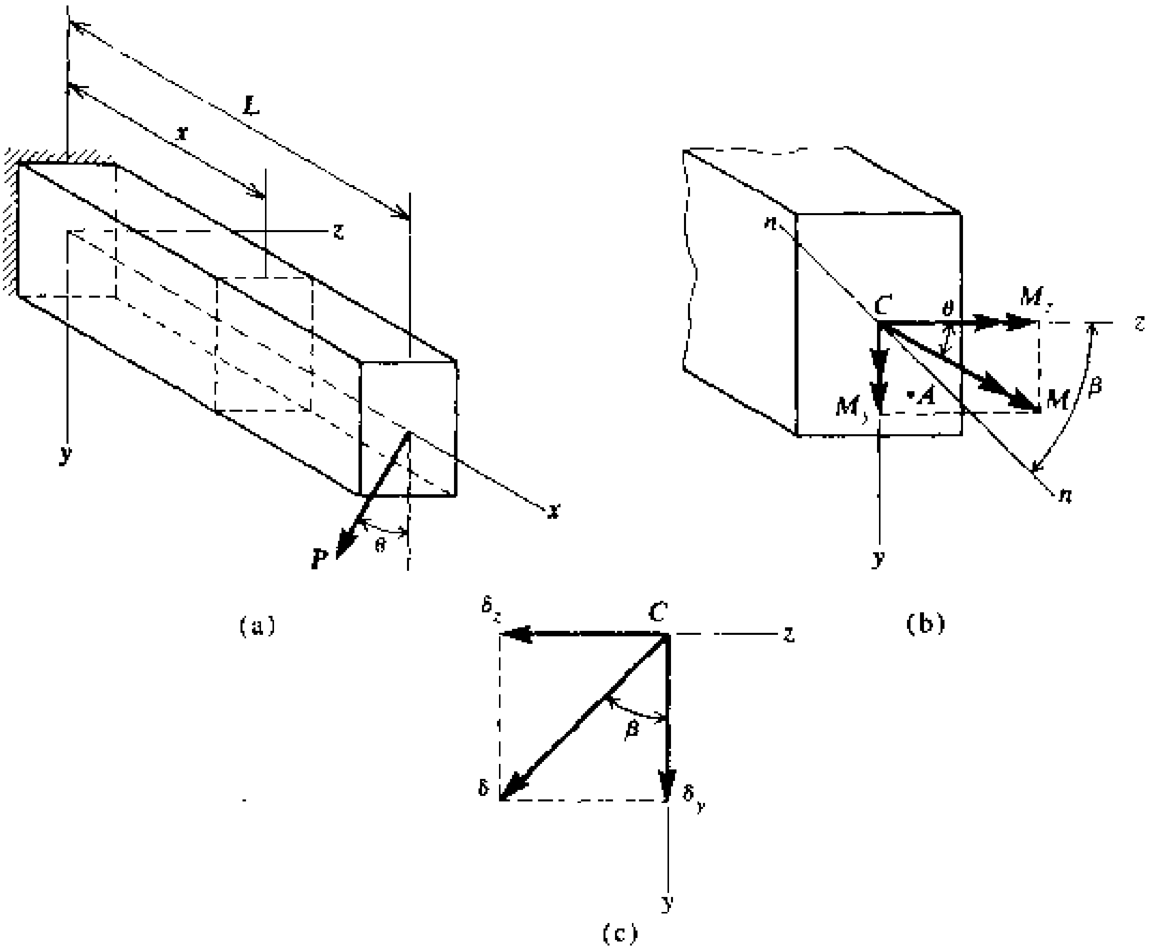


圖8・1　負斜載重之對稱樑

在本章內，我們將考慮各種不對稱彎曲（unsymmetrical bending）實例。這種不對稱彎曲在沒有遇到前段所提及諸假定時，一定就會發生。當我們有一對稱樑（截面內有兩個對稱軸），但載重卻與對稱軸成傾斜方向作用時，則最簡單的不對稱彎曲情況立即發生（見圖8－1a）。當樑本身為不對稱時，則發生另外一種不對稱彎曲；本問題將在下一節加以討論。

例如一個對稱樑負一斜向載重，如圖8－1a之懸臂樑，此時可用重疊法求各應力與撓度。載重可分解成兩個作用於對稱面內的分力，然後彎曲問題即可分別就各分載重求解。最後的應力與撓度均以重疊各結果求得之。就圖8－1a之樑而言，載重P在y方向的分力為$P\cos\theta$，而在負z方向者為$P\sin\theta$。在一個距固定支承點x距離的中間截面上，相當的彎力矩為

$$M_z=(P\cos\theta)(L-x)\qquad M_y=(P\sin\theta)(L-x)$$

彎力矩M_z與M_y以其正方向示於圖8－1b；要注意各力矩被假定成，當其各向量（依據力矩方向之右手法則繪出），係在該相當軸的正方向。其合力的向量M亦示於圖中；其向量係與z軸成θ角。

因為力矩M_y及M_z係該樑對稱面內的彎力矩，其相當應力可由彎曲公式求得。假如我們考慮在截面內有座標y與z的任何點A（圖8－1b），我們瞭解在該點的正交應力為

$$\sigma_x=\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z} \tag{8-1}$$

式內I_y及I_z各為對y及z軸的慣性矩。

最大應力將發生在距中性軸最遠之各點。中性軸位置可用方程式（8－1）使應力σ_x等於零而定出。將$M_y=M\sin\theta$及$M_z=M\cos\theta$代入方程式（8－1），然後使σ_x等於零，得成立

$$\frac{\sin\theta}{I_y}z-\frac{\cos\theta}{I_z}y=0 \tag{8-2}$$

為中性軸方程式（在圖8－1b之nn線上）。中性軸與z軸間之夾角β，可由下式寫出：

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \tag{8-3}$$

一般，β 角與 θ 不同，所以中性軸亦不垂直於載重平面。當 $\theta = 0°$，$\theta = 90°$ 或 $I_z = I_y$ 時，則發生惟一的例外。在三種情況中之第一種，載重置於 xy 主平面內，而中性軸爲 z 軸。第二種情況與之相似，惟載重置於 xz 平面內而以 y 軸爲中性軸。最後在第三種情況，我們得 $I_z = I_y$，意爲主要慣性矩爲相等。此時，所有通過重心之軸，均有相同之慣性矩，且皆爲主軸。因此，載重平面，不論其方向如何，總是一個主平面，而中性軸總是與之成垂直。

負斜向載重的對稱樑的撓度，可由載重的兩個分力個別求出，然後以重疊法求其結果。例如，在圖 8－1a 懸臂樑的情況，自由端在正 y 方向的撓度與在負 z 方向的撓度分別爲

$$\delta_y = \frac{PL^3\cos\theta}{3EI_z} \qquad \delta_z = \frac{PL^3\sin\theta}{3EI_y}$$

如在圖 8－1c 所示，其總撓度 δ 爲

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} \tag{8-4}$$

介於合成撓度向量 δ 與 y 軸間之 β 角，可由下列方程式求得之：

$$\tan\beta = \frac{\delta_z}{\delta_y} = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

上式與方程式（8－3）相同。由此，可得一結論；合成之撓度係在垂直於中性軸的一個平面內。

8．2 不對稱樑之純彎曲

現在我們準備考慮一個具有不對稱截面之樑（圖 8－2）。任意選擇兩個在截面平面內的垂直軸 y 與 z，並研究 z 軸爲中性軸時所需的條件。假定有一彎力矩作用於該截面上。如此作法，即可看出，如由方程式（5－5）所提示者，在距中性軸爲 y 距離的元體面積 dA 上面的應力爲 $\sigma_x = kEy$，而元體上的相當力爲 $kEydA$。瞭解此種作用力，我們現在便可用靜力學求得應力之合力。因在 x 方向並無軸向力，故在 x 方向的合力必爲零；因此，

$$\kappa E\int y\,dA=0 \quad 或 \quad \int y\,dA=0 \qquad \text{(a)}$$

此處的積分，是擴及整個截面面積。方程式(a)表示中性軸必定通過截面的形心，由此定出 y 與 z 軸相交的原點。

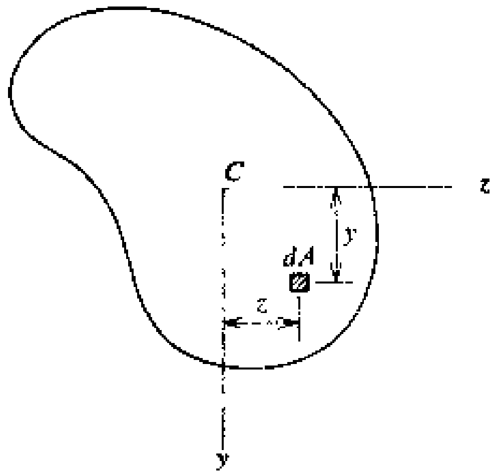


圖 8·2　不對稱截面具任意選擇之軸線

其次，考慮各彎力矩，對 z 軸的合成力矩爲

$$|M_z|=\kappa E\int y^2\,dA=\kappa EI_z \qquad \text{(b)}$$

而對 y 軸的合成力矩爲

$$|M_y|=\kappa E\int yz\,dA=\kappa EI_{yz} \qquad \text{(c)}$$

此處 I_{yz} 爲該截面面積對 y 軸及 z 軸之慣性積（ product of inertia ）。（使用方程式(b)與(c)內絕對值符號之理由是因對於力矩與曲度迄未建立一致的符號慣例；不過，此事在本階段並無任何影響）。從方程式(b)與(c)，能推斷出一些有趣的結論。假如彎曲是以 z 軸作爲中性軸而發生，對 y 軸及 z 軸之彎力矩必皆存在。此兩力矩可被合而爲一個單一的合成力矩，而得其傾向 y 與 z 兩軸的向量，因此，彎力矩所加的平面並不與中性軸垂直。若將 y 與 z 軸選作通過截面形心的主軸，則 $I_{yz}=0$ ，而M_y 便將消失（見方程式 c ）。此種情形，意即所需作用於截面的惟一力矩爲M_z ，而 M_z 即爲作用於 xy平面內的力矩，並且沿 z 軸（中性軸）定出其向量位置。

因此，我們可得下列的重要結論。當一不對稱樑在純彎曲狀態時，彎力矩的平面（ xy 平面）祇有在 y 軸與 z 軸通過截面形心之主軸，而垂直於中性平面（ xz 平面）。所以，假如彎力矩是加於主平面內，該平面即變爲彎曲平面，中性軸與之成垂直，而常用的彎曲理論始有確實的理論根據。

照前面的結論，對於分析一個承受任一彎力矩 M（圖8－3）的不對

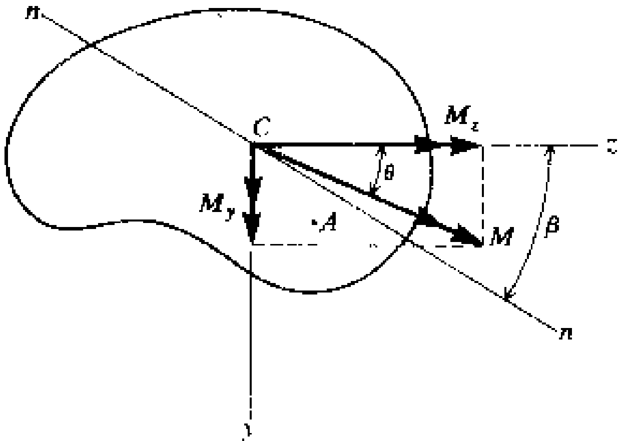


圖8·3　不對稱截面具有彎曲偶力 M。該偶力沿通過形心主軸方向分解成兩個分偶力

稱樑，提出一直捷了當的途徑。我們開始可用附錄A中所描述的技巧定出通過形心的主軸 y 與 z。然後將偶力 M 在 y 與 z 的方向內分解成 M_y 與 M_z。偶力 M_y 在 xz 平面內作用，當在 y 軸方向時被假定爲正設其向量爲正。同樣，偶力 M_z 在 xy 平面內作用，當在 z 軸方向時爲正設其向量爲正。此類分偶力爲

$$M_y = M\sin\theta \qquad M_z = M\cos\theta \tag{d}$$

式內 θ 爲向量 M 與 z 軸間的夾角。因爲偶力 M_z 作用在主平面的，我們可得 M_z 將產生樑之彎曲，使 z 軸成爲中性軸，而所有在純彎曲情況下的常用應力與撓曲公式均適合此種情況。同樣，偶力 M_y 將產生以 y 軸爲中性軸的彎曲。因此在任何點 A 的總彎應力爲

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \tag{8-5}$$

式中 y 與 z 爲 A 點的座標。此方程式與對稱截面所導的方程式（8－1）是一樣的。

中性軸 nn （參閱圖 8－3 ）是應力爲零之線，而其方程式係用 8.1 節同樣方法求得之；方程式爲

$$\frac{\sin\theta}{I_y}z-\frac{\cos\theta}{I_z}y=0 \tag{8-6}$$

介於中性軸與 z 軸間的 β 角，亦可用前法求得之；其方程式爲

$$\tan\beta=\frac{I_z}{I_y}\tan\theta \tag{8-7}$$

再者，我們可看出，一般，θ 角與 β 角並不相等，所以中性軸並不垂直於所加偶力 M 起作用之平面內。惟有前節所提及的三種情況是例外。

由彎曲偶力 M_y 與 M_z 所產生的撓度，可由常用的撓曲公式求得。由 M_y 所產生的撓度將全在 xz 平面內，而由 M_z 所生的將全在 xy 平面內。將此類撓度以重疊法可求得在垂直於中性軸之平面內的合成撓度。

純彎曲之一般理論

在以上的討論中，曾詳述一個分析方法，即要求確定截面的主軸，然後將彎力矩在兩主軸的方向分解成爲分力矩。此一程序，係從這個事實聯想而起。當在使用主軸時，可使用求應力與撓度普通公式。不過，另有其他幾種情況，利用在截面中不是主軸之軸倒是很方便。在圖 8－4 內所示之 Z 形截面就是這種形式的一個例子。其 y 軸與 z 軸並非主軸，用此兩軸來計算却是很方便。

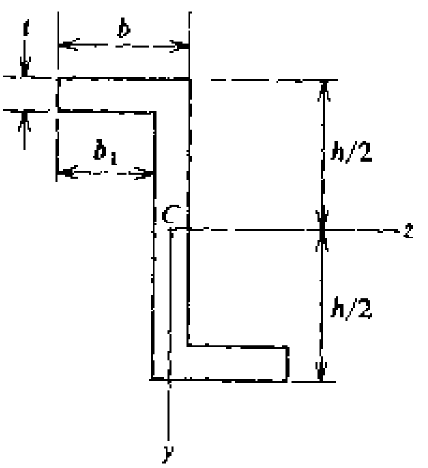


圖 8．4　不對稱 Z 截面，具有非形心主軸線

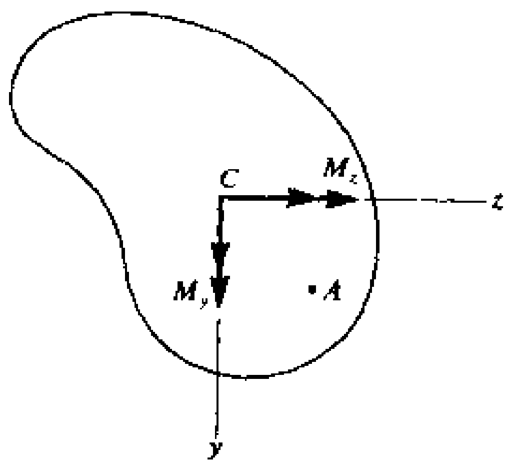


圖 8．5　不對稱截面，具有非重心主軸線

如欲誘導一個更普遍化且與主軸無關的彎曲理論方程式。取圖 8－5 所示的不對稱截面，並假定 y 軸與 z 軸為形心軸，但並非主軸。我們再假定彎曲偶力 M_y 及 M_z 正作用在截面上，如圖內所示。在此種一般情形，樑之彎曲將會同時在 xy 平面與 xz 平面內發生。取 $k_y = 1/\rho_y$，ρ_y 為曲度半徑，表示 xy 平面內的曲度，並以 $k_z = 1/\rho_z$ 表示 xz 平面內的曲度。當樑在 xy 平面內的撓曲形狀是向下凹時，曲度 k_y 將被假定為正。即向正 y 方向凹入。又，當樑在 xz 平面內撓曲，其形狀是向正 z 方向凹入時 k_z 將被假定為正。此類符號慣例均示於圖 8－6內。於是在 A 點的應力，設其座標為 y 與 z，為

$$\sigma_x = -\kappa_y Ey - \kappa_z Ez \tag{e}$$

式內需用負號，是因為假定曲度的符號慣例。

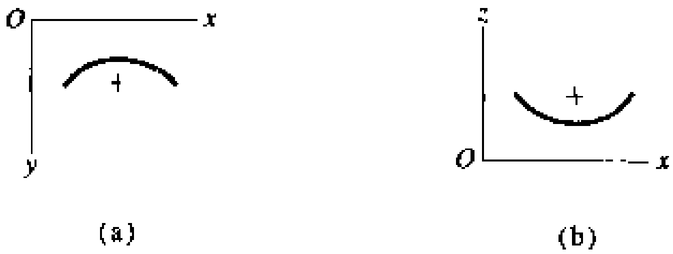


圖 8.6　曲度慣用符號：(a)正曲度 k_y；(b)正曲度 k_z

現在可估計截面上諸應力的合力。因為在 x 方向內的合力為零，故得

$$\int \sigma_x \, dA = 0 \quad 或 \quad \kappa_y \int y \, dA + \kappa_z \int z \, dA = 0$$

此方程式因為軸的原點係截面之形心，自動地滿足了條件。所以方程式內兩個積分式皆為零。對 y 軸的力矩 M_y 為

$$M_y = \int \sigma_x z \, dA = -\kappa_y E \int yz \, dA - \kappa_z E \int z^2 \, dA$$

或

$$M_y = -\kappa_y EI_{yz} - \kappa_z EI_y \tag{f}$$

以相似的方法，得對 z 軸的合矩 M_z 為

$$M_z = -\int \sigma_x y\, dA = \kappa_y E \int y^2\, dA + \kappa_z E \int yz\, dA$$

或

$$M_z = \kappa_y EI_z + \kappa_z EI_{yz} \tag{g}$$

同時求解方程式(f)與(g)，得下面兩個包含彎力矩爲項的曲度式子：

$$\kappa_y = \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \qquad \kappa_z = -\frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \tag{8-8a,b}$$

最後，將這些式子代入方程式(e) 可得求 σ_x 的公式：

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{8-9}$$

此最後的方程式爲一般化彎曲公式（ generalized flexure formula)。當對任何兩個互成垂直的形心軸的力矩 M_y 與 M_z 爲已知時，可用以計算樑內之彎應力。這些軸皆不必全是主軸。

少數特殊情況的彎曲，現在可以認識一下。假如一個彎力矩 M_z 存在，但力矩 M_y 爲零。例如，圖 8 － 4 內所示 Z 形截面的彎曲，此種條件可能會發生。於是表示曲度的式子簡化爲

$$\kappa_y = \frac{M_z I_y}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \qquad \kappa_z = -\frac{M_z I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \tag{8-10a,b}$$

而彎應力爲

$$\sigma_x = \frac{M_z(I_{yz} z - I_y y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{8-11}$$

再者，假如兩軸爲主軸，所以 $I_{yz} = 0$，這些方程式更可簡化爲

$$\kappa_y = \frac{M_z}{EI_z} \qquad \kappa_z = 0 \qquad \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{8-12a,b,c}$$

這是在 xy 平面內常用的彎曲方程式。

假如力矩 M_y 與 M_z 都在一起作用，而兩軸均爲主軸，於是置 I_{yz} 等於零，而方程式（ 8 － 8 ）與（ 8 － 9 ）化爲

$$\kappa_y = \frac{M_z}{EI_z} \qquad \kappa_y = -\frac{M_y}{EI_y} \tag{8-13a,b}$$

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \tag{8-14}$$

要注意此最後的方程式與方程式（８－５）是相同的。

8.3 不對稱樑受橫向載重之彎曲

在前節中所討論的皆係處理不對稱樑的純彎曲。現在發生的問題是；當此類樑受到橫向載重（ lateral load ）而彎曲，在彎力矩處同時產生剪力，此時該樑的行態又將如何。讓我們用圖８－７ａ所示不對稱懸臂樑來瞭解本題的性質。在該樑自由端之 P 力，作用於垂直方向，並與 y 軸平行。因爲 z 軸爲對稱軸，故 y 與 z 軸皆爲形心主軸（圖８－７ｂ）。

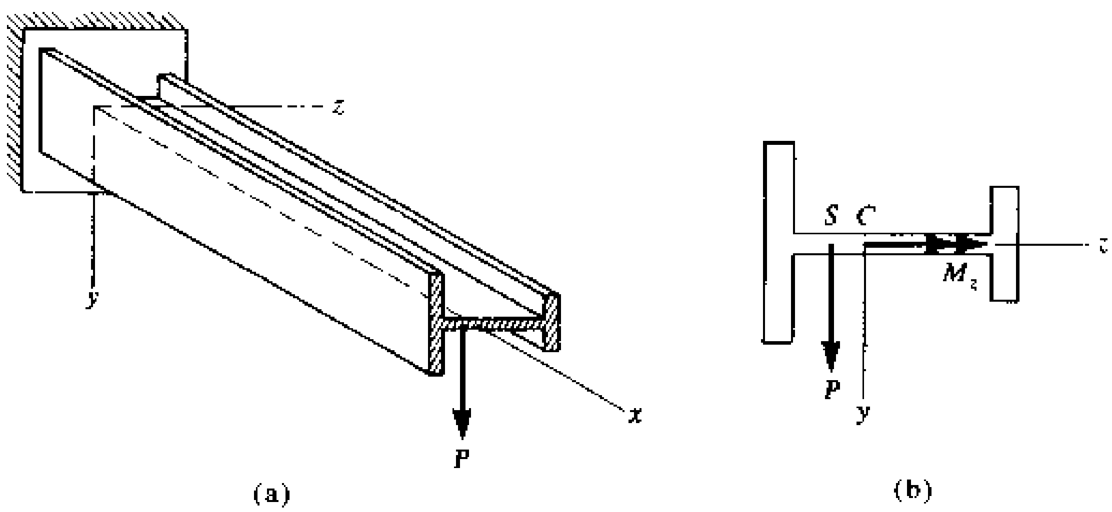


圖８・７　(a)具有橫向載重之不對稱樑
(b)樑之截面表示剪力重心 S 及重心 C

讓我們假定載重 P 對 z 軸產生彎曲，亦即 z 軸爲中性軸。於是，在該樑之中間任何截面上將存在兩個應力合力，一爲對 z 軸的彎力矩與一爲對 y 方向的剪力 V_y（等於 P）（圖８－７ｂ）。相當於此兩個應力合力的正交應力與剪應力將發生在整個截面上。正交應力的合力，當然是彎力矩 M_z，而剪應力之合力是剪力 P。此合成剪應力作用線將穿過在 z 軸上的某點 S；通常，此點不會與形心點 C 相合。此點稱爲該樑截面之剪力中心（ shear centre ），或彎曲中心（ flexural centre ）。假如載重 P 並

未穿過剪力中心，結果將發生扭轉作用，而扭力乃相繼而起。

現在我們已達成一項重要的觀察。即，作用於不對稱樑上的載重常會產生樑的組合彎曲（ combined bending ）與扭力。普通無扭轉的彎曲祇有在假定所加載重通過剪力中心作用時始會發生。所以剪力中心位置的決定乃是頗有趣味的事。

就圖 8 － 7 內所示之樑而言，欲定其截面的剪力中心比較容易。我們可將該樑當作由三個矩形部份，兩個翼緣與腹鈑所構成（圖 8 － 8 ）。這三部份共同在 xy 平面內彎曲，因此乃有同樣的彎曲度；所以，每一部份

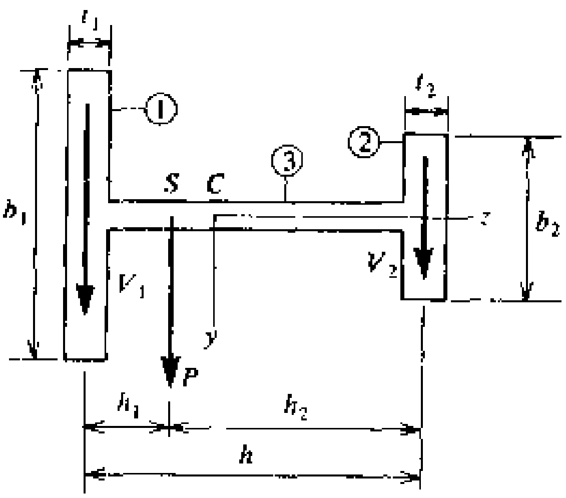


圖 8 - 8　不對稱工字樑截面表示剪力中心 S 之位置

所負荷的彎力矩與其對 z 軸的彎力矩成正比，即

$$\kappa = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2} = \frac{M_3}{EI_3}$$

式內 M_1 ，M_2 ，與 M_3 各爲 1 、 2 與 3 部份所負荷的力矩，而 I_1 ，I_2 ，與 I_3 各爲其對 z 軸的慣性矩。因 I_3 對 I_1 與 I_2 而言，乃一極端微小之值，故能省略此腹鈑的影響，並假定所有載重全由兩個翼緣負擔。於是可得

$$\frac{M_1}{I_1} = \frac{M_2}{I_2}$$

而

$$M_1 = \frac{M_z I_1}{I_1 + I_2} \qquad M_2 = \frac{M_z I_2}{I_1 + I_2}$$

此處 $M_z = M_1 + M_2$ 爲總力矩。在兩個翼緣內剪力 V_1 與 V_2 將與各彎力矩成同一比例，所以

$$V_1 = \frac{VI_1}{I_1 + I_2} \qquad V_2 = \frac{VI_2}{I_1 + I_2} \tag{a}$$

此處 $V = V_1 + V_2$ 爲總剪力（等於 P）。這些剪力的合力作用線，即可定出剪力中心 S（圖 8 − 8）。

設兩翼緣間的中心距離爲 h，自剪力中心 S 至翼緣的距離爲 h_1 與 h_2。將對 S 點力矩和置爲零，求得這兩個距離：

$$V_1 h_1 - V_2 h_2 = 0$$

或，用方程式(a)

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{I_2}{I_1} \tag{8-15}$$

將 $I_1 = t_1 b_1^3/12$ 與 $I_2 = t_2 b_2^3/12$ 值代入，並用方程式 $h_1 + h_2 = h$，由方程式（8 − 15），可得下列距離 h_1 與 h_2 的公式：

$$h_1 = \frac{t_2 b_2^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3} \qquad h_2 = \frac{t_1 b_1^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3} \tag{8-16a,b}$$

由此建立了不對稱工字樑剪力中心的位置。將剪力中心 S 與形心 C 之位置作一比較，即能表示出 S 永遠是在形心 C 與左翼緣之間，假如 $b_1 > b_2$ 及 $b_1^3 t_1 > b_2^3 t_2$。

在特殊情形下，y 軸亦爲截面之對稱軸之一時，則 $t_1 = t_2$ 而 $b_1 = b_2$，由方程式（8 − 16）得：

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$$

此式表示剪力中心是在形心上。總之，其截面爲具有兩個對稱軸，如一個圓形、矩形或寬翼緣型之截面等，其剪力中心皆將與重心相重合。在這些情況下，任何通過形心作用之載重，將產生彎曲而無扭轉作用。

當 b_2 尺寸爲零時，乃發生另外一種情況，成爲T型樑（圖 8 − 9）。由方程式（8 − 16）得到 $h_1 = 0$ 及 $h_2 = h$，表示剪力中心位於腹鈑與翼緣的交會處。

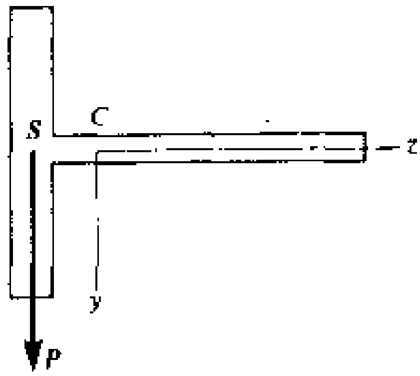


圖 8·9 一個T型樑之剪力中心

大體上，假如一根樑具有一對稱軸，如在圖8－8與8－9所說明者，則剪力中心將永遠在對稱軸上。任何通過剪力中心的載重，縱使該載重或許作用在一個斜的方向，亦可分解成兩個分力，一個在 z 軸方向，而另一個平行於 y 軸方向。第一個載重將在 xz 平面內以 y 軸爲中性軸而產生彎曲。第二個載重將在 xy 平面內以 z 軸爲中性軸而產生彎曲（並無扭轉）。假如載重並未通過剪力中心，則該載重將永遠被一個通過該點的載重和一個扭轉偶力所代替。於是通過剪力中心載重的影響，可如前述處理，而扭轉偶力的影響可用適當的扭轉分析法處理之。

定出剪力中心位置，並不永遠是一件容易工作。對於實心截面和封閉的空心截面，剪力中心位置常接近形心位置。此類截面通常都有高度的抗扭剛度，因此，假如載重接近形心時，我們可不理會其扭轉的影響。至於薄型截面，開放的橫截面（如槽鐵與角鐵）的扭轉性很是微弱，在這些情況內，當載重不通過剪力中心時，應明瞭其剪力中心位置，並計算其扭轉影響，而成爲一件重要的事情。此類型式的橫截面，將在以下二節中詳加說明。

8·4 開放型薄壁橫截面樑內之剪應力

我們早已考慮過，在具有兩個對稱軸的樑內剪應力的分佈（見5.3節）。前曾證明過，剪應力在均勻分佈在樑寬的條件下，可用下列公式求得

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \qquad \text{(5-18) repeated}$$

這種限制對於薄壁矩形截面樑，寬翼緣樑的腹鈑，與一些其他形式尚屬良

好。現在我們考慮一特種樑，通稱爲薄壁開放型橫截面樑，其剪應力可用誘導方程式（5－18）的同一方法求之。所考慮之樑可以兩個特點來判別：①橫截面的厚度與其全高或全寬比較起來很小，及②橫截面是作開放型的，如工字樑或槽形樑的情況，而不是一個空心箱型截面那種封閉型的情況。開放薄壁截面型之樑（beam of thin walled open section），常被稱爲結構截面（structural section）或半截面（profile sections），在工程作業內廣泛使用着。

我們開始結構截面內剪應力之研究。審視一條具有任意形狀橫截面的

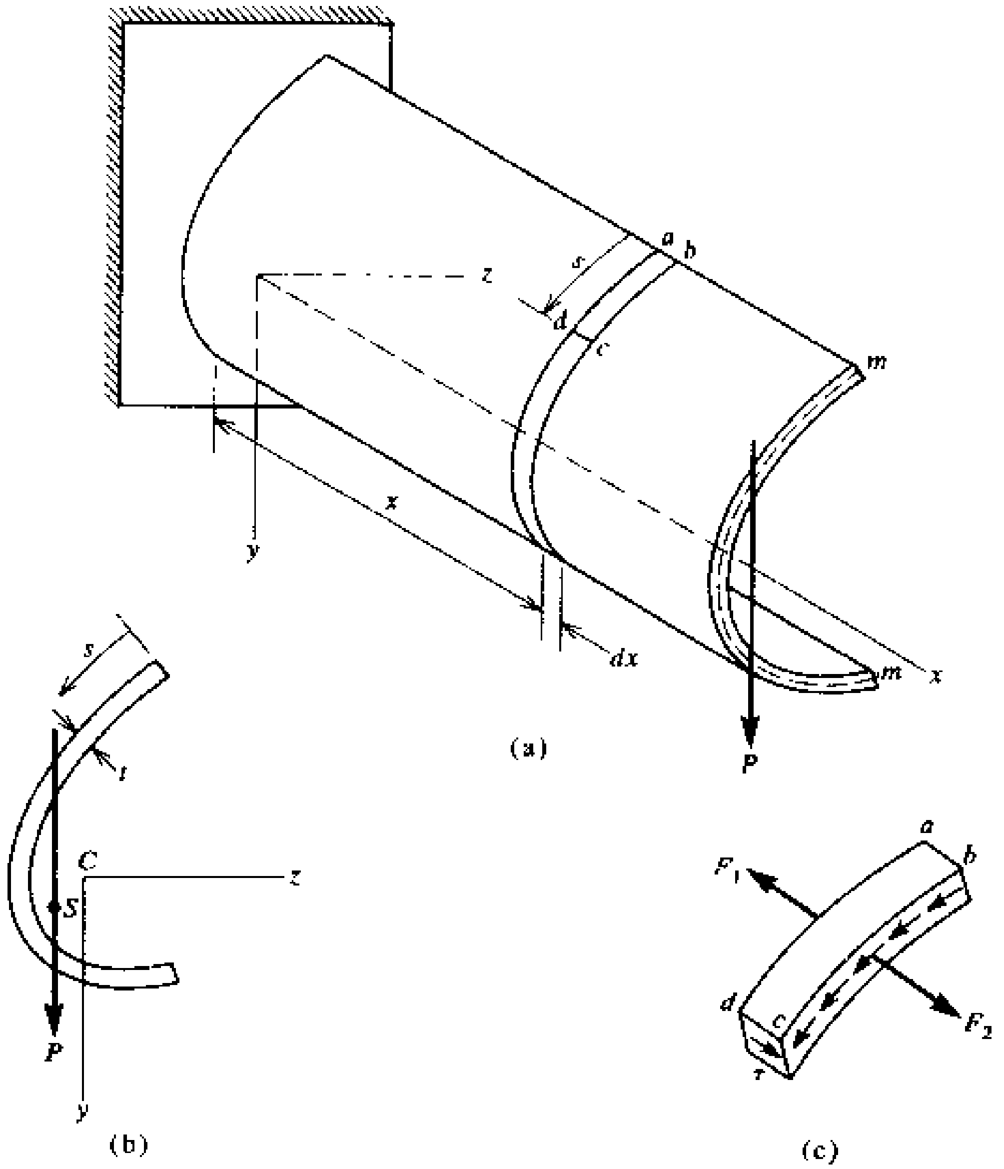


圖 8-10　一個薄壁開口截面樑內之剪應力
（注意：y 及 z 軸爲主重心軸）

中心線mm(圖 8 − 10 a)，y 與 z 軸爲該截面的重心主軸，而載重 P 與 y 軸平行作用（圖 8 − 10 b）。假如載重 P 係通過剪力中心 S，樑內卽無扭轉作用。在 xy 平面內只發生彎曲，而 z 軸將爲中性軸。該樑內任何點的正交應力可用方程式求得。

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{a}$$

式內 M_z 爲對 z 軸的彎力矩，而 y 爲被考慮點的座標。

現在考慮一個相距 dx 距離的兩個橫截面間切出元體 $abcd$，具有順沿截面中心線量度的長度 S（圖 8 − 10a）。作用在 ad 面上之正交應力之合力以 F_1 表示（圖 8 − 10 c），而在 bc 面上的合力以 F_2 表示。因爲旣是在 ad 面的彎力矩大於在 bc 面的，故合力 F_1 就大於 F_2。因此，剪應力 τ 必定爲了達到靜力平衡而順沿 cd 面作用。此類剪應力必定是平行於沒有應力的元體之各切口面，並且必定在仍用於截面 ad 與 bc 上跟着有補餘剪應力（ complementary shear stresses ）。將圖 8 − 10 c 所示的元體，在 x 方向諸力相加而得

$$\tau t\, dx = F_1 - F_2 \tag{b}$$

此處 t 爲在 cd 截面之厚度，卽，t 爲在距截面之空邊 s 距離處的厚度。用方程式(a)，我們的結論爲

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x\, dA = -\frac{M_{z1}}{I_z}\int_0^s y\, dA$$

此處 dA 爲元體 ad 邊上的一個元體面積，y 爲元體 dA 的座標，而 M_{z1} 爲該截面的彎力距。F_2 力的類似式爲：

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x\, dA = -\frac{M_{z2}}{I_z}\int_0^s y\, dA$$

將 F_1 及 F_2 兩式代入方程式(b)，得

$$\tau = \frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx}\frac{1}{I_z t}\int_0^s y\, dA$$

該量（$M_{z2} - M_{z1}$）$/dx$ 爲彎力矩的變率，並等於 $-V_y$，但 V_y 爲 y 方向

的剪力（在圖8－10等於P）。所以，剪應力方程式為

$$\tau = -\frac{V_y}{I_z t}\int_0^s y\,dA \tag{8-17}$$

此方程式可求得距空邊s距離的截面內任何點的剪應力。方程式右側的積分係代表對$s=0$至$s=s$截面面積的中性軸的第一力矩。以Q_z表示此第一力矩，並祇用該剪應力的絕對值，便能寫出較簡單的方程式

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_z t} \tag{8-18}$$

該方程式與方程式（5－18）相類似。剪應力τ的方向是順沿着截面中間線，平行於截面的各邊緣，並假定在全面壁的厚度t上的強度並無變化。該厚度本身用不着是一常數，但可以s為函數而變化之。

在截面內任何一點的剪力流，等於剪應力與該點厚度的乘積，即

$$f = \tau t = \frac{V_y Q_z}{I_z} \tag{8-19}$$

因為V_y與I_z為常數，本方程式表示剪力流係與Q_z成正比。在該截面的頂邊與底邊的第一力矩Q_z為零，而剪應力亦為零。當發生在中性軸之Q_z為一最大值時，剪力流在頂底兩端點間連續變化，而達剪力最大值。

假如在圖8－10內所示之樑，受通過剪力中心並平行於z軸作用之載重所彎曲。於是y軸將成為彎曲的中性軸。在這種情形，我們能重做同樣的分析而達成下列代替方程式（8－18）與（8－19）的方程式：

$$\tau = \frac{V_z Q_y}{I_y t} \qquad f = \tau t = \frac{V_z Q_y}{I_y} \tag{8-20a,b}$$

在這些方程式內，V_z為平行於z軸的剪力，而Q_y為對y軸的第一力矩。

【例題】　試研究在一個寬翼緣樑內的剪應力。在該樑腹鈑平面內的垂直方向有一P力載於該樑上（圖8－11a）。

開始選取該樑中間部份的截面（圖8－11b），並考慮頂翼緣右側內之應力。該樑此部份距離s，從剪應力為零之a點向左量至bb截面，介於

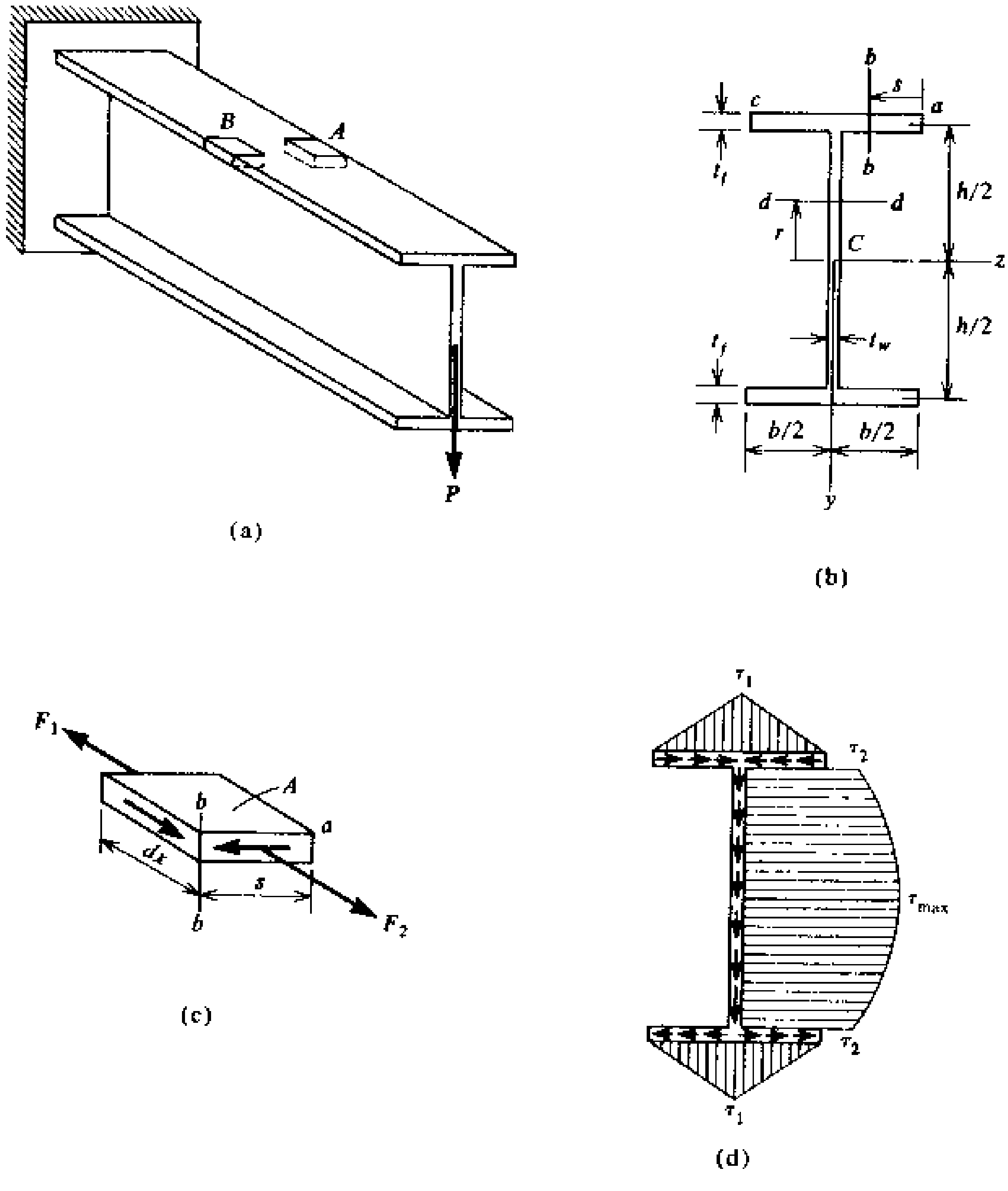


圖 8．11　在寬翼緣樑內之剪應力

a點與bb截面間的面積為st_f，t_f為翼緣的厚度，而自中性軸至該面積重心的距離為$h/2$（注意h為介於兩翼緣中心線間之樑高）。因此，對bb截面而言，得$Q_z = st_fh/2$；所以，在bb上的剪力為

$$\tau = \frac{shP}{2I_z} \qquad \text{(c)}$$

一如從方程式（8－18）所得。此應力的方向，可由作用在介於a點與

截面 bb間切出來的元體上諸力而求得（見圖 8-11a 元體A）。爲了清晰地顯示作用在元體上諸力，在圖8－11c係用較大比例尺繪出，我們能立刻看出，拉力F_1大於拉力F_2。因在元體後面的彎力矩大於元體前面的。因此，爲了平衡的關係，自然在元體左面的剪應力τ作用方向必定朝向讀者這邊。於是這一結論指出，在截面上諸剪應力的方向，必定皆朝左邊作用。現在回到圖8－11b，已完全決定了在bb截面剪應力的大小和方向。此一截面可在a點與翼緣腹鈑連接處之間的任何位置。因此，在整個右翼緣區內剪應力是水平向左，其大小可由方程式(c)求出。由方程式(c)亦可知道應力係隨距離s成直線形增加，如在圖8－11d圖解中所表示者。當$s=b/2$，b爲翼緣寬度，τ_1乃達到其最大值。因此，

$$\tau_1=\frac{bhP}{4I_z} \tag{d}$$

其相當的剪力流爲

$$f_1=\tau_1t_f=\frac{bht_fP}{4I_z} \tag{e}$$

要注意，在這近似性的分析內，已計算出在翼緣與腹鈑中心線連接處的剪應力。惟未顧及橫截面的厚度。此種分析程序對於薄壁截面尚稱滿意。

從頂翼緣左邊部份的c點開始，向右量出距離s，可再來一次類似的分析。再用方程式(c)與(d)求得剪應力的大小。不過，在切出一個元體B（圖8－11a）並考慮其平衡狀態，將得知現在截面上的剪應力係向右作用，如圖8－11d所示。

次一步驟爲求腹鈑內的剪應力。考慮一個正在腹鈑之頂，翼緣之下的水平切口，求得第一力矩爲

$$Q_z=\frac{bt_fh}{2}$$

其相當的剪應力爲

$$\tau_2=\frac{bht_fP}{2I_zt_w} \tag{f}$$

此處t_w爲腹鈑的厚度。關聯的剪力流爲

$$f_2=\tau_2t_w=\frac{bht_fP}{2I_z} \tag{g}$$

此式，正如所預期者，等於剪力流f_1的兩倍。腹鈑內的剪應力垂直向下

作用，並增加其大小一直到中性軸爲止。在 dd 截面，位於距中性軸爲 r 距離處的剪應力計算如下：

$$Q_z = \frac{bt_f h}{2} + \left(\frac{h}{2} - r\right)(t_w)\left(\frac{h/2 + r}{2}\right) = \frac{bt_f h}{2} + \frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

及

$$\tau = \left(\frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)\frac{P}{2I_z} \tag{h}$$

當 $r = h/2$ 時，此方程式化爲方程式(f)。當 $r = 0$ 時，得出最大應力爲

$$\tau_{max} = \left(\frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{4}\right)\frac{Ph}{2I_z} \tag{i}$$

再者，應該指出的是，在截面中心線尺寸的基礎上已作過一切運算，對於薄截面合理地得到準確的結果，可是，爲了這個理由，用方程式(h)計算寬翼緣樑腹鈑所得的剪應力，可能與前面分析中所得的（見方程式5－21）略有不同。

在該腹鈑內剪應力的變化雖然不大，如圖8－11d所示，其變化卻作拋物線形。此事實可由 τ_{max} 與 τ_2 之比值看出，其比值爲

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_2} = 1 + \frac{ht_w}{4bt_f} \tag{j}$$

第二項經常很小；例如，假如取有代表性值如 $h = 2b$ 及 $t_f = 2t_w$，該比值爲 $\tau_{max}/\tau_2 = 1.25$。

最後，可用於頂翼緣之同一方法研究下翼緣內的剪應力。除了剪應力如圖8－11d所示的方向外，餘和在頂翼緣內者一樣。

從圖8－11d，我們明瞭截面上的剪應力，係自頂翼緣的最外邊緣向內“流”，然後向下通過腹鈑，最後向外流至底翼緣的邊緣。此種流向在任何結構面內總是連續不斷的，因而就成爲一個決定應力方向的便利途徑。因爲剪應力在樑上係向下作用，由此得知腹鈑內的剪力流必定是向下的。於是，知道了腹鈑內的剪力流是向下的，由剪力流內所需的連續性，立刻知道翼緣內的方向。用此簡單的技巧以求應力的方向，要比自樑內切出像 A（圖8－11c）那樣的想像元體來求取爲容易。

在橫截面上，一切剪應力的合力顯然是一個垂直力。因爲翼緣內的水平應力互相抵銷，並未產生合力。腹鈑內的剪應力有一合力 R，可就腹鈑高度的剪應力積分求得之：

$$R=\int \tau\, dA=2\int_0^{h/2} \tau t_w\, dr$$

現在代入方程式(h)，得

$$R=2t_w\int_0^{h/2}\left(\frac{bt_f h}{t_w}+\frac{h^2}{4}-r^2\right)\left(\frac{P}{2I_z}\right)dr=\left(\frac{bt_f}{t_w}+\frac{h}{6}\right)\frac{h^2 t_w P}{2I_z} \tag{k}$$

該 I_z 項可展開成：

$$I_z=\frac{t_w h^3}{12}+\frac{bt_f h^2}{2} \tag{l}$$

此處第一項爲腹鈑的慣性矩，而第二項爲翼緣的慣性矩，亦以中心線尺寸計算而得。在 I_z 式被代入方程式(k)時，我們得 $R=P$，此乃證實了在橫截面上作用的剪應力的合力，等於垂直載重 P 的一事實。該合力通過形心 C，亦即寬翼緣樑的剪力中心。

8.5 開放型薄壁橫截面之剪力中心

在前節內發展了在開放型薄壁截面內求剪應力的公式與技巧。現在要利用該項資料來定出幾種不同形狀截面的剪力中心。第一件要考慮的是槽形樑，該樑係對 z 軸彎曲，並受一平行於 y 軸作用的垂直剪力 V_y。該槽形樑剪應力的分佈如圖 8－12b 所示。欲求在翼緣與腹鈑接合處的應力 τ_1，以 Q_z 等於翼緣面積對 z 軸的第一力矩方程式（8－18）：

$$Q_z=\frac{bt_f h}{2}$$

因此，應力 τ_1 爲

$$\tau_1=\frac{bhV_y}{2I_z} \tag{a}$$

同樣，得出在腹鈑頂部的應力 τ_2 爲

$$\tau_2=\frac{bt_f hV_y}{2t_w I_z} \tag{b}$$

又，在中性軸的應力爲

$$\tau_{max}=\left(bt_f+\frac{ht_w}{4}\right)\frac{hV_y}{2t_w I_z} \tag{c}$$

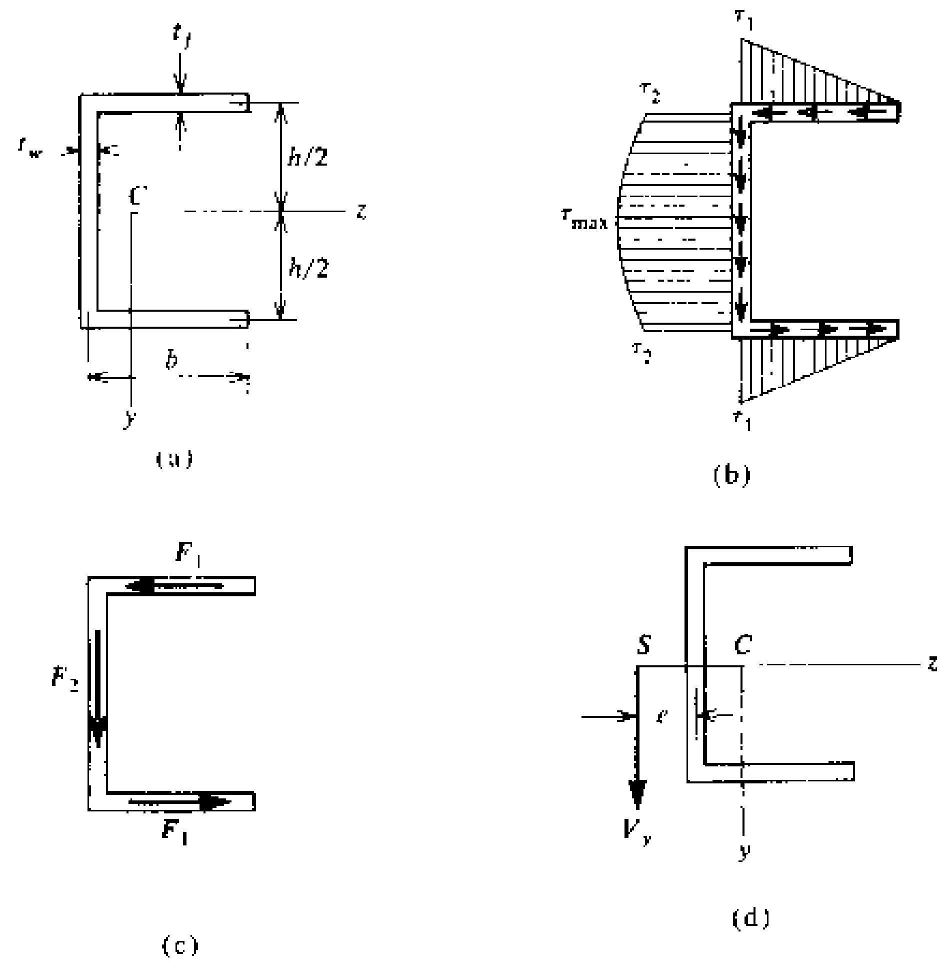


圖 8.12　槽形截面之剪力中心

從剪應力三角形圖中，可容易地求得各翼緣內的總力F_1。各力等於應力三角形的面積乘應力作用之翼緣厚度：

$$F_1=\left(\frac{\tau_1 b}{2}\right)(t_f)=\frac{hb^2t_fV_y}{4I_z}$$

在腹鈑內的垂直力F_2等於剪力V_y，從拋物線應力圖示可以證實如下。注意該圖示，係由兩部份所構成，一爲τ_2與h兩個尺寸的矩形，一爲拋物線面積，合計等於

$$\tfrac{2}{3}(\tau_{max}-\tau_2)h$$

因此，該應力圖面積乘腹鈑厚度的總力爲

$$F_2=\tau_2 ht_w+\tfrac{2}{3}(\tau_{max}-\tau_2)ht_w$$

將 τ_2 與 τ_{max} 式代入，並化簡之得

$$F_2 = \left(\frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2}\right)\frac{V_y}{I_z}$$

最後，代入

$$I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2} \tag{d}$$

顯示 F_2 等於 V_y，正如我們所預期者。

圖 8 － 12c內所示的三個力，在靜態上皆等於穿過剪力中心作用的合力 V_y（見圖 8 － 12d）。因爲該合力對剪力中心並無力矩，自然在圖 8 － 12c的各力，必定對於剪力中心亦不產生力矩；此種條件使我們求得從腹鈑的中心線到剪力中心的距離 e：

$$F_1 h - F_2 e = 0$$

或

$$e = \frac{F_1 h}{F_2} = \frac{F_1 h}{V_y} = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I_z} \tag{8-21a}$$

將方程式(d)的 I_z 代入，可得剪力中心方程式的形式：

$$e = \frac{3b^2 t_f}{ht_w + 6bt_f} \tag{8-21b}$$

一根槽鐵樑，當載重通過剪力中心時，一定會受到簡單的彎曲。例如載重係平行於 y 軸，但通過若干不是剪力中心之點（例如，載重可能在腹鈑平面內作用），這些力可被一套靜態地同等力系所代替。該力系包括通過剪力中心之載重，與扭轉偶力等；乃得樑的彎曲與扭力的組合。假如載重作用於 z 軸方向內，穿過 S 與 C，會得到對 y 軸的簡單彎曲。假如載重是斜方向作用，則可由靜態地同等兩平行於 y 與 z 軸之載重所代替；這些載重可照前幾種情況的解說來處理。

另一種截面要考慮的是一個等邊角鋼截面（圖 8 － 13 a）。假定其承受剪力 V_y。角鋼的各肢長爲 b 厚爲 t。在距一肢 s 距離，其剪應力爲

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_z t} = \frac{3sV_y}{\sqrt{2}\,b^3 t}\left(b - \frac{s}{2}\right) \tag{e}$$

式內，曾運用下列之關係：

$$Q_z = \frac{st}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right) \qquad I_z = \frac{b^3 t}{3}$$

方程式(c)顯示，τ 隨 s 成二次冪變化；當 $s = b$ 時，τ 達其最大值：

$$\tau_{max} = \frac{3V_y}{2\sqrt{2}\,bt}$$

在各肢的總剪力 F（見 8－13b）為

$$F = \int_0^b \tau t \, ds = \frac{3V_y}{\sqrt{2}\,b^3}\int_0^b \left(bs - \frac{s^2}{2}\right) ds = \frac{V_y}{\sqrt{2}}$$

取 F 的垂直分力，我們明瞭在角鋼兩肢內諸力之合力為一個等於 V_y 之垂直力。而且，此合力必定通過兩個 F 力作用線之相交點；因此，我們所作的結論為角鋼截面的剪力中心 S，在兩肢的接合處。

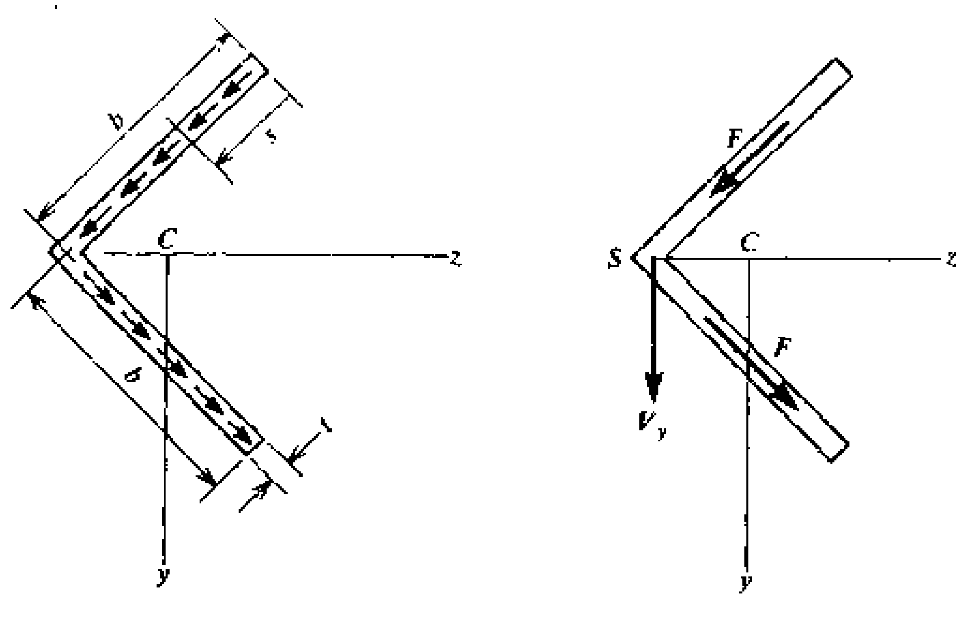


圖 8.13　等肢角鋼截面之剪力中心

在所有包含兩個相交矩形元體之截面實例中，如圖 8－14 內所示諸例，就會發現諸剪應力在各肢接合處所引起的兩個合力。因此，該接合點

變成了剪力中心 *。

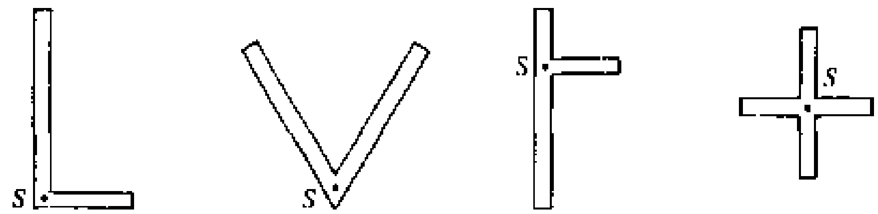


圖 8-14　由兩個矩形相交而成的截面之剪力中心

【例題】1. 試找出圖 8 － 15 所示之薄壁半圓形截面的剪力中心 S 的位置。

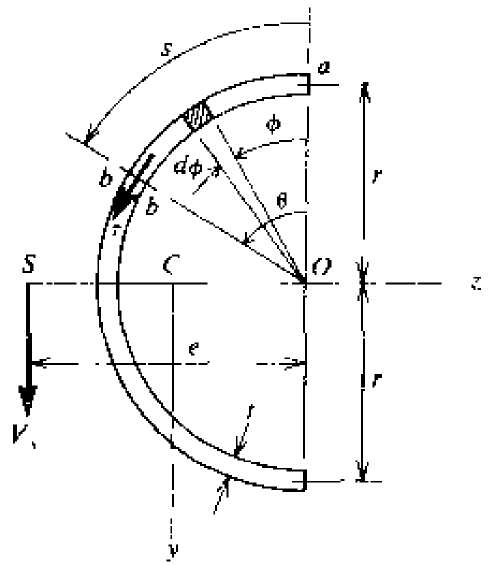


圖 8-15　例題 1　薄壁半圓形截面之剪力中心

考慮一個沿橫截面中線度量距離 s 所確定的截面 bb。a 點在橫截面的一邊，a 點與截面 bb 間所對的中心角用 θ 表示之。所以，得 $s = r\theta$，r 為中線之半徑，a 點與 bb 間面積之第一力矩為

$$Q_z = \int y\,dA = \int_0^{\theta} (r\cos\phi)(rt)d\phi = r^2 t\sin\theta$$

*第一次測定一個橫截面的剪力中心是在 1913 年（見參考書 8 － 1）關於以後的工作與剪力中心觀念的歷史性發展，見參考書 8－1至8－19。

此處 t 爲截面的厚度。如此，在截面 bb 的剪應力 τ 爲

$$\tau=\frac{V_y Q_z}{I_z t}=\frac{V_y r^2 \sin\theta}{I_z}$$

將 $I_z=\pi r^3 t/2$ 代入，得

$$\tau=\frac{2V_y \sin\theta}{\pi r t} \tag{f}$$

當 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi$ 時，由(f)式得 $\tau=0$，當 $\theta=\pi/2$，得最大剪應力。

剪應力 τ 對 O 點的力矩爲

$$T=\int \tau r\,dA=\int_0^{\pi}\frac{2V_y r \sin\theta\,d\theta}{\pi}=\frac{4rV_y}{\pi}$$

此力矩必與力 V_y 作用於剪力中心的力矩一樣，所以，

$$V_y e=\frac{4rV_y}{\pi}$$

因此，從 O 點到剪力中心的距離 e 爲

$$e=\frac{4r}{\pi} \tag{8-22}$$

【例題】2　試找出如圖 8－16a所示 Z 形截面的剪力中心。(圖內之 y 與 z 軸係通過形心 C 的主軸。)

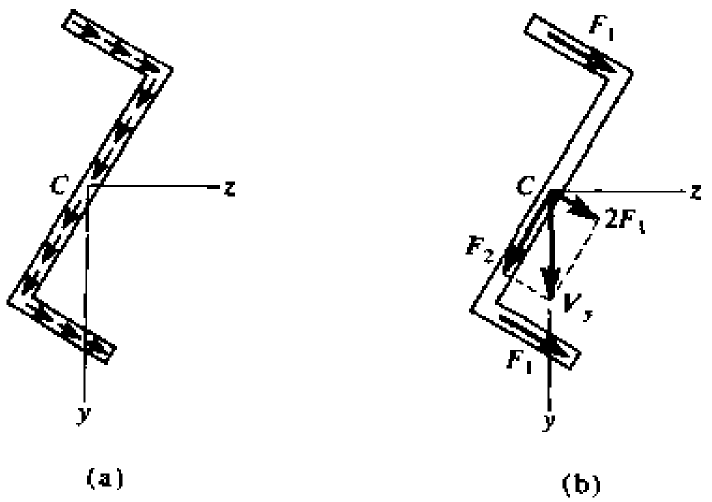


圖 8-16　例題2　Z形截面之剪力中心

開始想像一個剪力V_y平行於y軸作用。於是，在翼緣與腹鈑中的剪應力將如圖8－16a所指的方向。從對稱性的考慮，在兩翼緣內的總力F_1必定相等（圖8－16b）。作用於橫截面上三個力的合力（在翼緣內的F_1與腹鈑內的F_2）必定等於剪力V_y。兩個F_1力有一合力$2F_1$作用時通過形心並平行於翼緣。此力與F_2力相交於形心。因此，該點必爲剪力中心。力$2F_1$與力F_2的合成爲剪力V_y，如圖8－16b所示。

假如該樑承受一平行於z軸的剪力V_z，即可建立一項類似的結論。即剪力中心與形心重合。

假如Z形截面的翼緣與腹鈑與兩軸成傾斜，爲求明顯起見，要用兩個主軸以計算剪應力時，計算便變得複雜。在下節內，將說明如何用與腹鈑與翼緣成平行的非主軸，以計算Z形截面內的剪應力。

8.6 向非主軸彎曲之樑內剪應力

在先前對薄壁，開口橫截面樑內剪應力公式誘導時，假定y與z軸是主軸而得到方程式（8－18）至（8－20）。現在省去那種假定，誘導若干與非主軸y及z有關的更具一般性的方程式（圖8－17）。假定樑上載重與y軸平行，並產生一彎力矩及剪力V_y。再假定各力皆通過剪力中心S作用。彎力矩M_z將對y與z軸皆產生彎曲；其相當的應力用方程式（

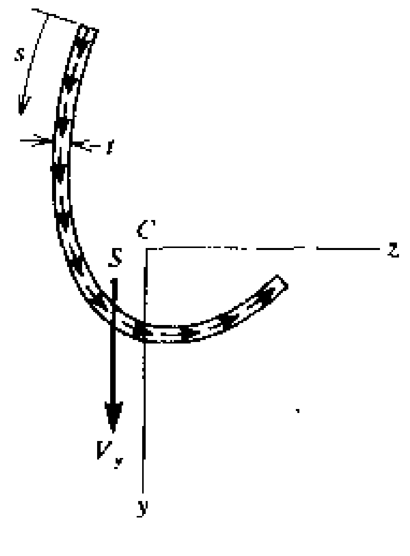


圖8.17　薄壁開口截面樑內之剪應力
（注意：y及z軸爲非主形心軸）

8 － 11 ）求出：

$$\sigma_x = \frac{M_z(I_{yz}z - I_y y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{8-11 repeated}$$

此處 y 與 z 爲橫截面內某一點的座標。現在着手從樑內照圖 8 － 10 所繪之情形切出一個元體。除了必需用方程式（ 8 － 11 ）求正交應力外，用以前同樣程序求出作用於元體（圖 8 － 10c ）之力 F_1 及 F_2 ；如此得

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x \, dA = \frac{M_{z1}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y)\, dA$$

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x \, dA = \frac{M_{z2}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y)\, dA$$

及

$$\tau = \frac{M_{z1} - M_{z2}}{dx} \frac{1}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y)\, dA$$

我們再注意此數量（ $M_{z2} - M_{z1}$ ）$/dx$ 等於 - V_y 因此

$$\tau = \frac{V_y}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s z \, dA - I_y \int_0^s y \, dA \right] \tag{8-23}$$

上列之方程式爲一般化的剪力公式（ generalized shear formula ）。當軸爲主軸時（ $I_{yz} = 0$ ），即化成方程式（ 8 － 17 ）。

照以上同樣方法繼續進行，即可導出一個由剪力 V_z 經過剪力中心並平行於 z 軸而引起的剪力公式；其結果爲

$$\tau = \frac{V_z}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s y \, dA - I_z \int_0^s z \, dA \right] \tag{8-24}$$

要注意，當有了主軸，該方程式卽化爲（除了負號以外）方程式（ 8 － 20 a ）在先前的工作內，永遠把 Q_y 與 Q_z 當作正的，並從實質的考慮得到剪應力的方向。但在方程式（ 8 － 23 ）與（ 8 － 24 ）內，需要遵守一個第一力矩的符號慣例。因爲這些力矩是正是負，把 y 與 z 當作代數量來處理是易於嫻熟的。

由已導出的一般化剪力公式（ 8 － 23 ）與（ 8 － 24 ），現在繼續進行在任何特殊情況內求得剪應力的分佈。截面的剪力中心，亦能以剪力 V_y 與 V_z 的作用線並記出兩剪力的相交點定出其位置。此項程序在下面例題內將予繪圖說明。

【例題】1　試決定在 Z 形截面內，由於剪力 V_y 與 V_z 所引起的剪應力。

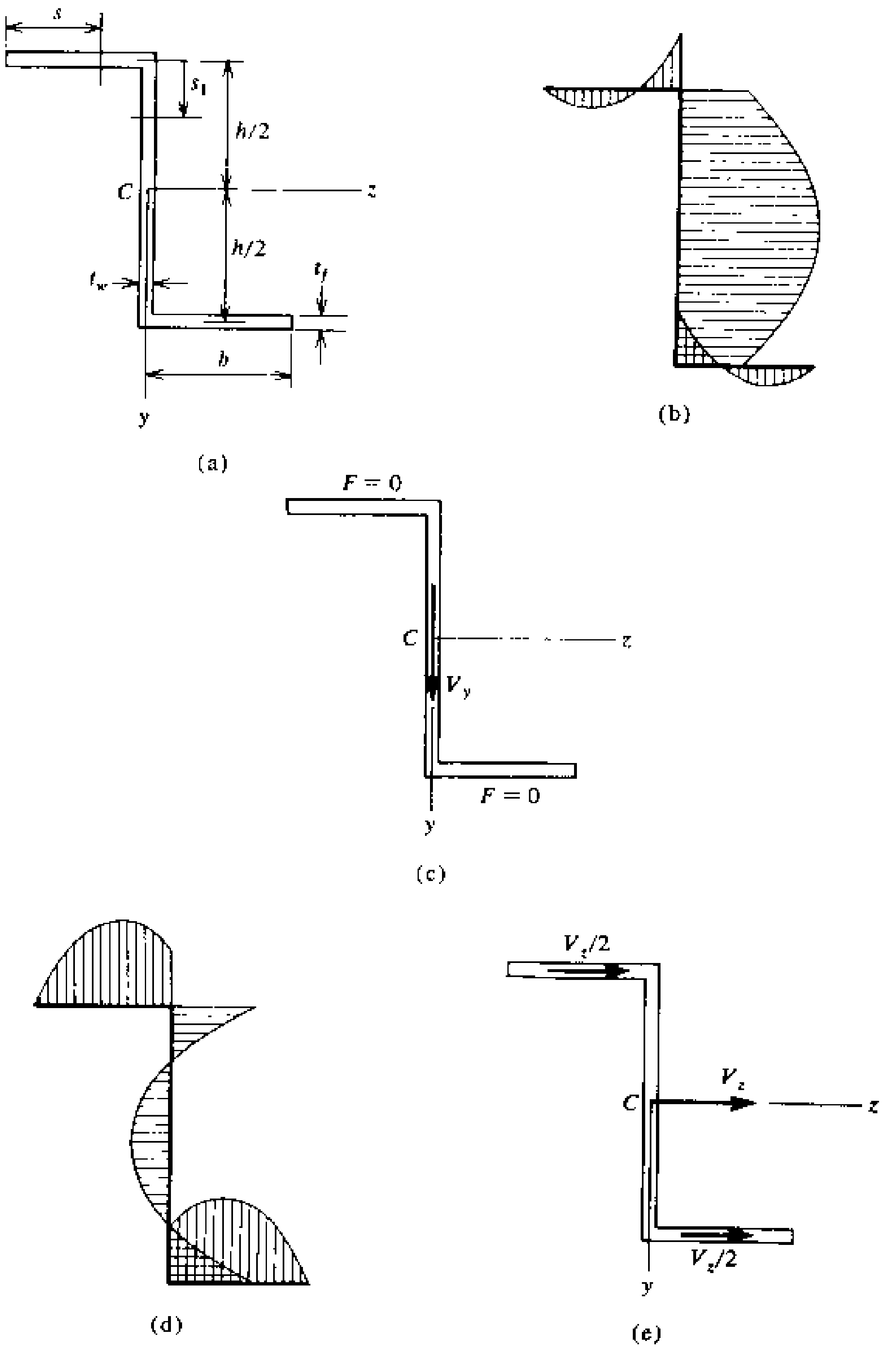


圖 8-18　例題 1　在 Z 形截面內之剪應力

開始計算截面的性質如下：

$$I_z=\frac{h^3t_w}{12}+\frac{bh^2t_f}{2}\qquad I_y=\frac{2b^3t_f}{3}\qquad I_{yz}=\frac{b^2ht_f}{2}\tag{a}$$

式內 h、b、t_w 與 t_f 這些尺寸，皆明定於所示的圖內。因剪力 V_y 之故，在上翼緣內的剪應力（由方程式 8－23）爲

$$\tau=\frac{V_y}{t_f(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s(s-b)t_f\,ds+I_y\int_0^s\frac{h}{2}t_f\,ds\right]$$

s 係順沿翼緣自左向右量取。實施積分後，乃得前列方程式方括弧內諸項，等於

$$\frac{b^2ht_f^2}{12}(3s^2-2bs)$$

將此式，與 I_y、I_z 與 I_{yz} 式，代入 τ 方程式，得下列在翼緣內的應力公式

$$\tau=\frac{3V_y(3s^2-2bs)}{bh(2ht_w+3bt_f)}\qquad(0\le s\le b)\tag{b}$$

在上翼緣內的剪應力，當 s 小於 $2b/3$ 時，係向左起作用；當 s 在 $2b/3$ 與 b 之間時，這些剪應力的方向乃作逆轉而向右作用。翼緣內的總合力爲

$$F=\int_0^b\tau t_f\,ds=0$$

一個類似的條件亦存在於下翼緣內。

腹鈑內的剪應力，亦能自方程式（8－23）中求得。顯示腹鈑內的總合力等於 V_y。在中性軸上的應力爲

$$\tau_{max}=\frac{3V_y(ht_w+bt_f)}{ht_w(2ht_w+3bt_f)}\tag{c}$$

由於 V_y 所生剪應力的分佈如圖 8－18b 所示。在翼緣內與腹鈑內的合力如圖 8－18c 所示。

現再考慮一個在横截面上作用的水平剪力 V_z。利用方程式（8－24），上翼緣的水平剪力變爲

$$\tau=\frac{V_z}{t_f(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[-I_{yz}\int_0^s\frac{h}{2}t_f\,ds+I_z\int_0^s(b-s)t_f\,ds\right]$$

求在方括弧內諸項之值，得

$$\frac{h^2t_f}{24}[bs(2ht_w+6bt_f)-s^2(ht_w+6bt_f)]$$

且 τ 的最後一式變爲

$$\tau = \frac{3V_z}{2b^3t_f(2ht_w+3bt_f)}\left[bs(2ht_w+6bt_f)-s^2(ht_w+6bt_f)\right] \tag{d}$$

這些在上翼緣內的應力向右起作用，而其分佈如圖 8 － 18d所示。在腹鈑內的總合力 F 爲

$$F=\int_0^h \tau t_f\,ds=\frac{V_z}{2}$$

如圖 8 － 18e 所示。

由于 V_z 在腹鈑內的剪應力，如由方程式（ 8 － 24 ）求得者，爲

$$\tau=\frac{3V_z(h^2+6s_1^2-6hs_1)}{2bh(2ht_w+3bt_f)} \tag{e}$$

此處 s_1 係量自翼緣與腹鈑的接合處（圖 8 － 18 a ）。此剪應力在腹鈑的中間區域內反轉其方向（見圖 8 － 18d），結果使腹鈑內的剪應力爲零。

【例題】2　試寫出圖 8 － 19a 所示不對稱槽鋼截面之剪力中心。

先開始注意上下翼緣的翼緣寬度各爲 b_1 與 b_2 ，截面高度爲 h 。厚度是常數並等於 t 。通過形心 C 的 y 與 z 軸與腹鈑及翼緣平行；因此 y 與 z 軸均非主軸。形心位置以 c 與 d 兩個尺寸來決定，即

$$c=\frac{h^2+2b_1h}{2h(+b_1+b_2)}\qquad d=\frac{b_1^2+b_2^2}{2h(+b_1+b_2)} \tag{f}$$

其次必須決定者，是兩個用來定出剪力中心 S 距形心軸的距離 e_1 與 e_2 。

現在假定一個剪力 V_y 通過剪力中心作用（圖 8 － 19 b ）。自方程式求頂翼緣內的剪應力爲

$$\tau=\frac{V_y}{t(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s(b_1-d-s)t\,ds+I_y\int_0^s(h-c)t\,ds\right]$$
$$=\frac{V_y}{I_yI_z-I_{yz}^2}\left[I_{yz}(b_1-d)s+I_y(h-c)s-\frac{I_{yz}s^2}{2}\right] \tag{g}$$

此處 s 的量度如圖內所示。翼緣內之總力 F_1 爲

$$F_1=\int_0^{b_1}\tau t\,ds=\frac{b_1^2tV_y}{6(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}(2b_1-3d)+3I_y(h-c)\right] \tag{h}$$

因爲沒有外在水平力作用在桿上，在下翼緣內的剪力必亦等於 F_1 ；又在

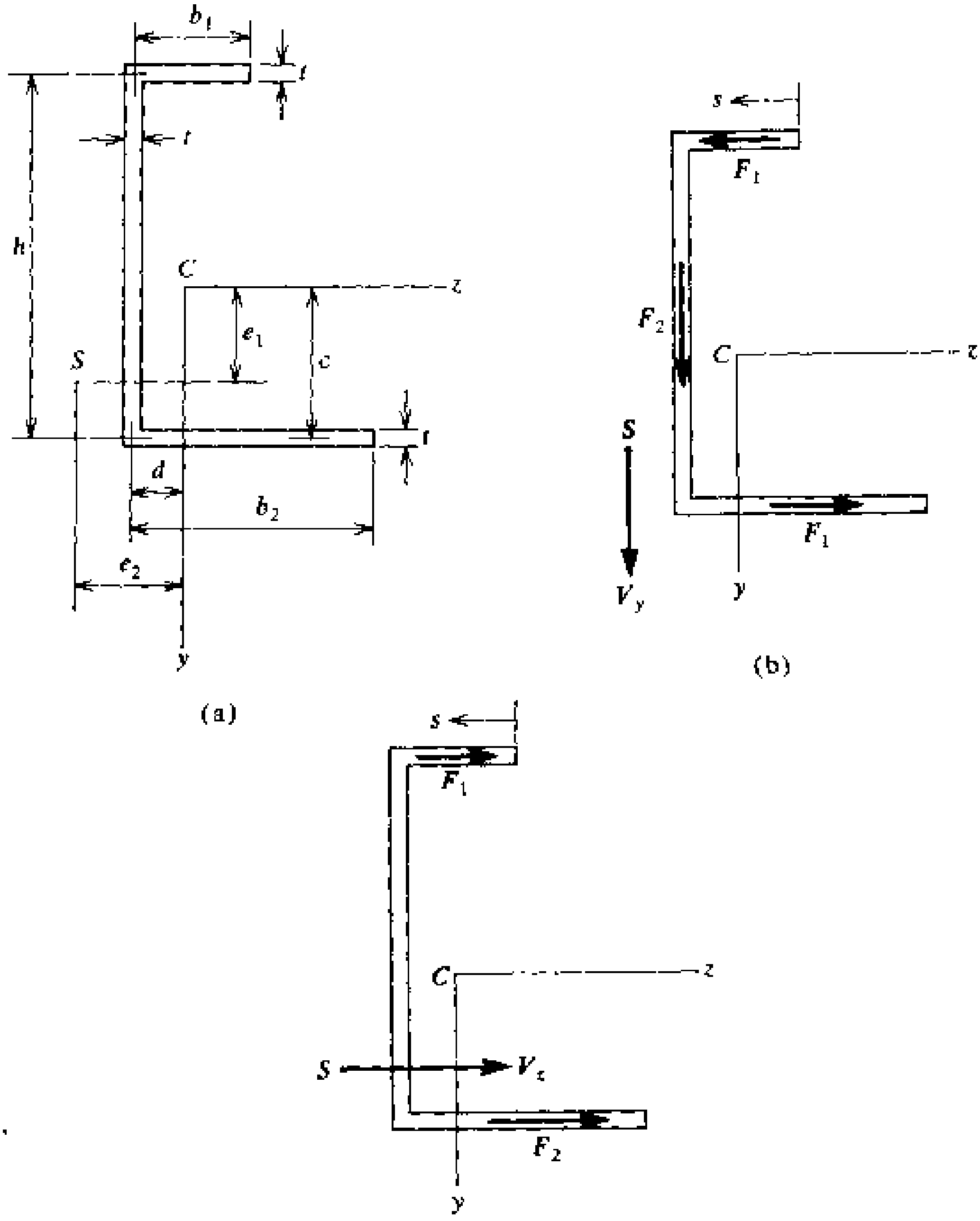


圖 8.19 例題 2 不對稱槽形截面之剪力中心

腹鈑內的 F_3 力必等於 V_y，因爲通過剪力中心對 C 作用之力 V_y 的力矩必等於在翼緣與腹鈑內三個力對 C 的力矩。故得

$$V_y e_2 = F_2 d + F_1 h$$

或

$$e_2 = d + \frac{F_1 h}{V_y}$$

將方程式(h)的 F_1 代入，可得下列的 e_2 方程式：

$$e_2 = d - \frac{b_1^2 ht}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)}[I_{yz}(2b_1 - 3d) + 3I_z(h - c)] \qquad (8\text{-}25)$$

在翼緣相等的特殊情況，y 與 z 變爲主軸，而得 $I_{yz} = 0$，$c = h/2$，及 $b_1 = b_2 = b$；於是，自方程式（8－25），得

$$e_2 = d + \frac{b^2h^2t}{4I_z}$$

該式符合先前所得的結果，見方程式（8－21a）。

現再假定一個剪力 V_z 作用在樑上（圖 8－19c）。此時能用方程式（8－24）計算在頂翼緣內的剪應力：

$$\tau = \frac{V_z}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s (c-h)tds - I_z\int_0^s (b_1 - d - s)tds\right]$$

$$= \frac{V_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}\left[I_{yz}(c-h)s + I_z(d-b_1)s + \frac{I_z s^2}{2}\right] \qquad \text{(i)}$$

在翼緣內的總力 F_1 爲

$$F_1 = -\int_0^{b_1} \tau tds = \frac{b_1^2 tV_z}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)}[3I_{yz}(h-c) + I_z(2b_1 - 3d)] \qquad \text{(j)}$$

此處在方程式前採用負號，因爲方程式(i)內 τ 之方向朝左爲正，還是將 F_1 向右爲正較佳，如在圖 8－19c所示。因爲在 y 方向並無外力，故腹鈑內的合力必等於零。在下翼緣內之力以 F_2 表明，如在圖內所示。茲對下翼緣取力矩得方程式

$$V_z(c - e_1) = F_1 h$$

由上式得

$$e_1 = c - \frac{F_1 h}{V_z}$$

將方程式(j)之 F_1 代入，得下列 e_1 的方程式：

$$e_1 = c - \frac{b_1^2 ht}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)}[3I_{yz}(h-c) + I_z(2b_1 - 3d)] \qquad (8\text{-}26)$$

若再考慮等翼緣的特殊情況，得 $I_{yz} = 0$，$c = h/2$，$b_1 = b_2 = b$，及 $d = b^2/(h + 2b)$；由此得

$$e_1 = \frac{h}{2} - \frac{b^3ht(b+2h)}{6I_z(h+2b)}$$

現在代入

$$I_y = \frac{b^3t(b+2h)}{3(h+2b)}$$

這是對稱槽鋼的慣性矩，如前所預料，得 $e_1 = 0$ 。

至此，在任何不對稱槽鋼的特殊情況，能將其橫截面尺寸與性質代入方程式（8－25）與（8－26）而得到剪力中心位置。茲將下列的寬與高用數字爲例：

$$b_1 = b \qquad b_2 = 2b \qquad h = 3b$$

由是得

$$c = \frac{5b}{4} \qquad d = \frac{5b}{12}$$

$$I_y = \frac{47}{24}b^3t \qquad I_z = \frac{69}{8}b^3t \qquad I_{yz} = \frac{13}{8}b^3t$$

代入方程式（8－25）與（8－26），得

$$e_1 = \frac{55b}{76} \qquad e_2 = \frac{187b}{228}$$

爲自形心軸至剪力中心的距離。

習　題

8.1－1　試證明圖8－1a內所示的載重P，若其作用線係順沿矩形橫截面的對角線，則其中性軸將在另一對角線上。

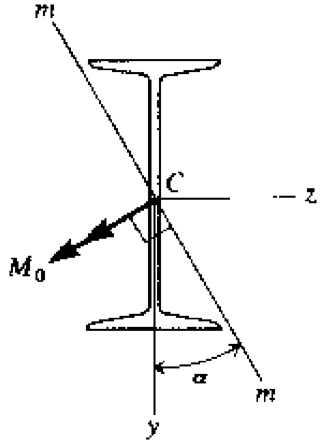
8.1－2　對圖8－1所示的矩形橫截面懸臂樑，假定$\theta = 45°$，$P=$ 1 kN，L＝1.5m，樑寬等於75mm，樑高等於150mm。試定出中性軸的β角，並決定因受彎曲所生的最大正交應力。

8.1－3　一矩形橫截面之懸臂樑，受一斜向作用載重P而彎曲（見圖8－1a）。當θ角自零變至2π時，樑之末端將繪出何種曲線？

8.1－4　一根長L的水平簡支樑，有一正方形橫截面（寬度＝高度＝a）。該樑所有各邊皆互相垂直。一個垂直載重P作用在距樑之一端L／3距離處，另一個水平載重P在距另一端L／3距離處作用。假定L＝4m，a = 300mm，及P = 27kN，試計算在樑內由于受彎曲所生的最大正交應力。

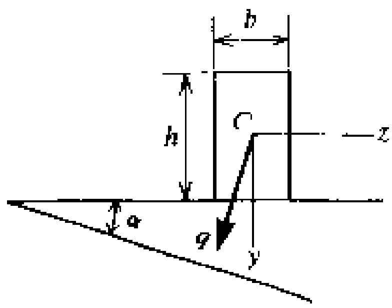
8.1－5　一根有水平軸及圓截面的固定端樑，沿其全長負強度 q 的垂直均佈載重及作用於樑中點之横向水平載重 P。假如 $PL=2.4$ kNm，$qL^2=4.8$ kNm，及樑直徑爲 100mm。試求因受彎曲而生之最大正交應力。

8.1－6　一根標準工字樑，編號爲 UB254 × 102 × 28 kg（見附錄 C 內之表 C－2），樑之兩端作簡支，並受兩相等而相反的偶力 M_o 作用於樑之兩端。此兩偶力作用於平面 mm 內如圖所示。假定 $M_o=6$ kNm，$\alpha=30°$，$E=200$ kN/mm²，及樑長爲 4 m。該求樑內之最大彎應力及最大撓度 δ。



習題圖 8.1-6

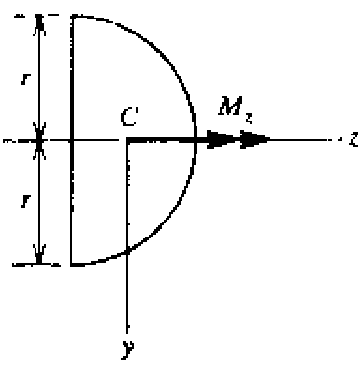
8.1－7　一根矩形横截面木樑，簡支於其兩端，樑之縱軸爲水平，但其横截面係傾斜如圖內所示。樑上載荷強度 q 的垂直佈載重。假如 $L=3$ m，$b=150$ mm，$h=200$ mm，$\tan\alpha=1/3$，$E=10$ kN/mm²，及 $q=3$ kN/m。試決定最大彎曲正交應力及樑中間的垂直撓度。



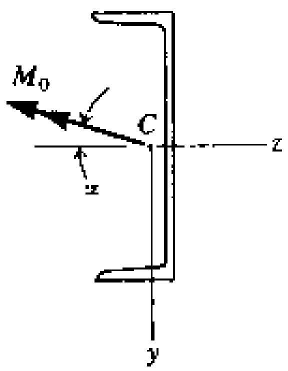
習題圖 8.1-7 及 8.1-8

8.1－8　再考慮前題所述之樑，並假定 $L=3$m，$b=250$mm，$h=75$mm，$\alpha=30°$，$E=11$ kN/mm²，及 $q=1.6$ kN/m。試求最大彎曲正交應力，樑中間之垂直撓度及水平撓度。

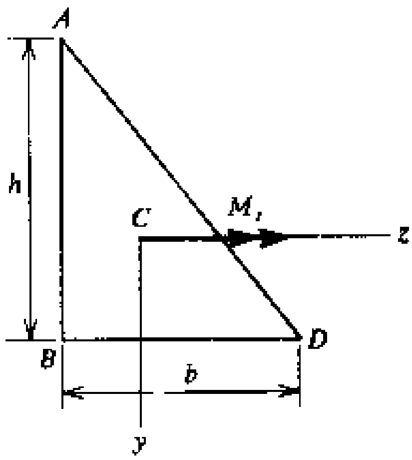
8.2－1　一根半圓形截面之樑（見習題圖8.2－1）承受一彎力矩M_z。假如容許應力為σ_w，求此力矩的最大安全值。



習題圖8.2-1



習題圖8.2-2



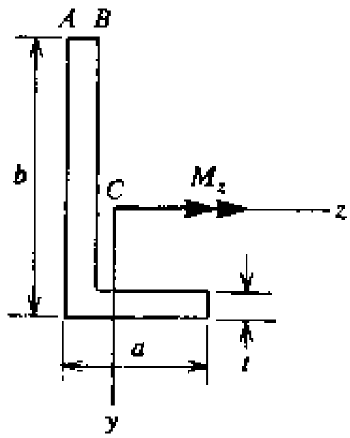
習題圖8.2-3

8.2－2　一根152×89×23.8kg的槽鋼樑（見附錄C內C-4表）承受一彎偶力M_0，其作用角成α（見習題圖8.2－2）。假定$M_0 = 3$ kNm與$\tan\alpha = 1/3$。試定出樑內之最大拉應力與壓應力。

8.2－3　一個偶力M_z加於一直角三角形橫截面之樑上（見習題圖8.2－3）。試誘導在頂點A、B與D的應力公式，並定出中性軸位置。

8.2－4　一根Z形截面之樑（圖8－4）承受一個在xy平面內作用並有4.5 kNm的彎力矩。假定$h = 150$mm，$b = 90$mm，$b_1 = 78$mm，$t = 12$mm，試求該樑的最大彎應力。

8.2－5　一根角鋼截面之樑（見習題圖8.2－5）承受一彎力矩M_z=



習題圖8.2-5、8.2-7及8.2-8

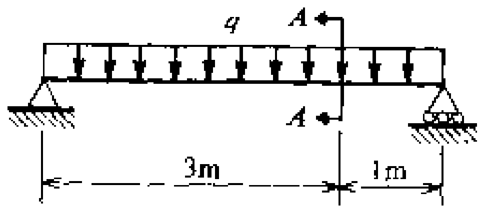
9 kNm。假定$a = 100$mm，$b = 150$mm，及$t = 12$mm。試求在A點的應力。

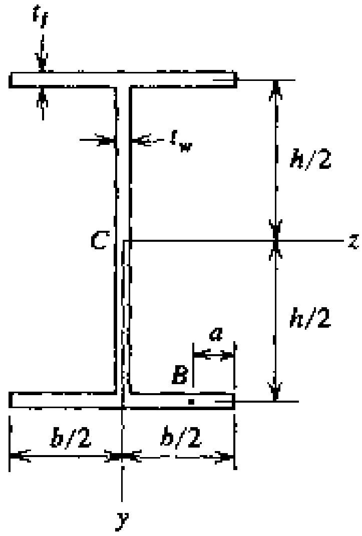
8.2－6　假如角鋼係對某長主軸彎曲，而其容許應力為$\sigma_w = 120$ kN/mm²。試求加於120×60×12mm，角鋼截面的最大彎力矩。

8.2－7　一根角鋼截面之樑，被一偶力$M_z = 1$ kN/m而彎曲（見習題圖8.2－7）。假定$a = 60$ mm，$b = 120$ mm及$t = 12$ mm。試求樑內最大彎力矩。用方程式（8－11）求解。

8.2－8　先定其主軸以解前一習題。依主軸方向分解彎曲偶力，並用方程式（8－5）求之。

8.4－1　一個寬翼緣截面之簡支樑支承均佈載重$q = 4$ kN/m。如習題圖8.4－1所示。橫截面的各部尺寸分別爲$h = 288$ mm，$b = 200$ mm，$t_f = t_w = 12$ mm。(a)在橫截面$A-A$上之最大剪應力爲何？(b)在截面$A-A$之B點的剪應力（大小與方向）爲何？B點係位於距下翼緣之邊有一距離$a = 24$ mm之處。注意：在計算慣性矩I_z及第一力矩Q_z時，要用該截面中心線上的尺寸。



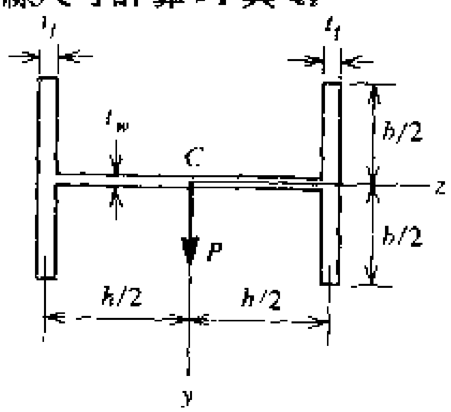


截面 A-A

習題圖 8-4-1

8.4－2　試用橫截面的實際尺寸以代替中心線尺寸，求解前一習題。

8.4－3　在一寬翼緣樑（見習題圖8.4－3）的腹鈑中央負一垂直作用力P。試研究其剪應力。求出所有剪應力的大小與方向，並表明剪應力之合力等於P。使用中心線尺寸計算I_z與Q_z



習題圖 8-4-3

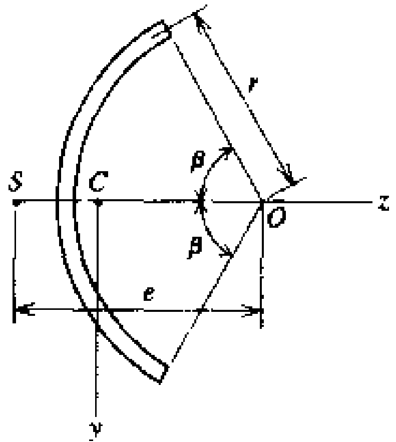
8.4－4　試解前一習題。樑爲不對稱的 I 字，所負之力 P 通過剪力中心並垂直於腹鈑作用（見圖 8－8）。

8.4－5　試解習題 8.4－3。樑爲　　　　的 T 形樑。假定翼緣厚度爲 t_1，寬度爲 b_1。

8.5－1　假如剪力爲 V_y = 60 kN 通過剪力中心作用（見習題圖 8－12），試求 254 × 89 × 35.7 kg 槽形樑內的剪應力（見附錄 C）。又，求橫截面剪力中心的距離 e。（注意：計算 Q_z 及 e 要用中心線尺寸，但 I_z 值可在附錄 C 表內查取）。

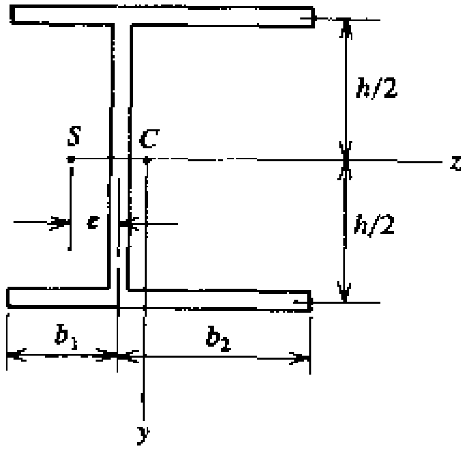
8.5－2　試說明作用於一薄壁半圓形橫截面樑上的剪應力（見圖 8－15 及方程式 f）有一等於 V_y 的合力。

8.5－3　試定出一薄壁、圓弧形截面剪力中心位置（見習題圖 8.5－3）。繪圖表明距離 e 如何隨 β 自 0 至 π 而變化。

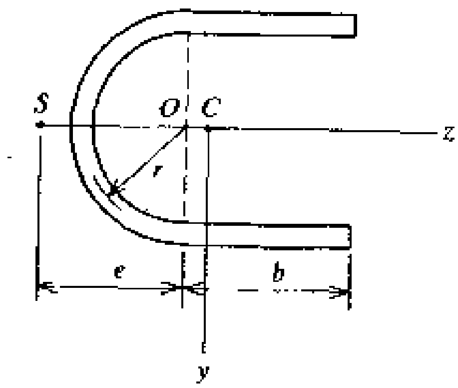


習題圖 8.5-3

8.5－4　試定出圖內所示的不平衡工字樑的剪力中心位置。試誘導一公式。假定該樑的厚度爲微小的常數。



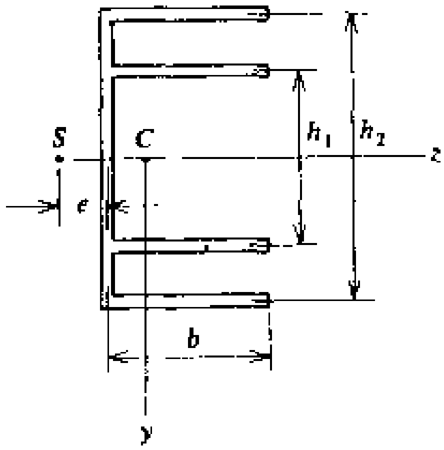
習題圖 8-5-4



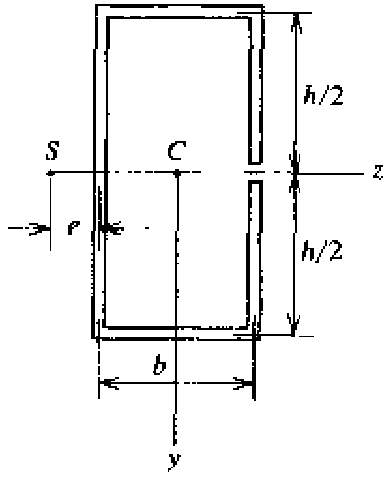
習題圖 8-5-5

8.5－5　試定出圖內薄壁截面剪力中心 S 位置。假定厚度爲一常數。

8.5－6　試誘導習題圖 8.5－6 內薄壁橫截面的剪力中心距離 e 的公式。假定全部截面的厚度爲一常數。



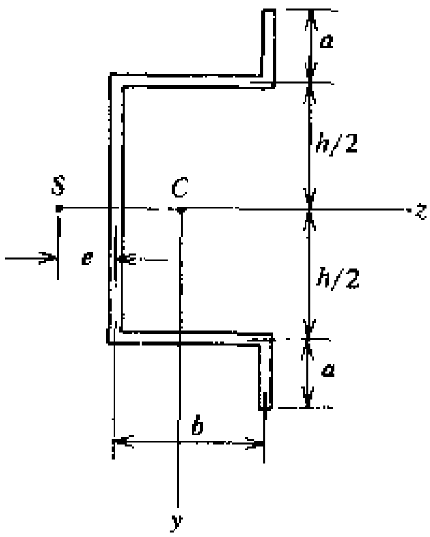
習題圖 8.5-6



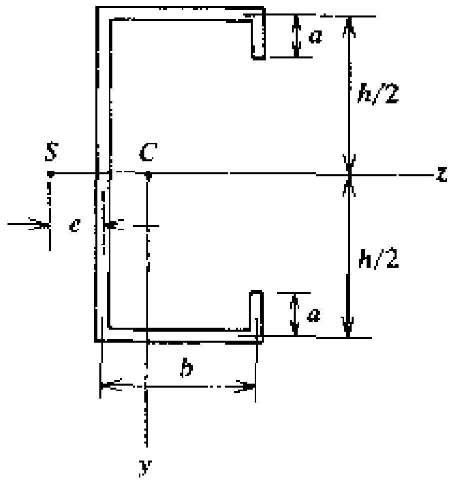
習題圖 8.5-7

8.5－7　試求習題圖 8.5－7內的長條箱形截面剪力中心距離 e 的公式。假定該厚度是微小的常數。

8.5－8　試解前一習題，用圖內帽形截面情況。假定 $a = h/2$。



習題圖 8.5-8 與 8.5-10

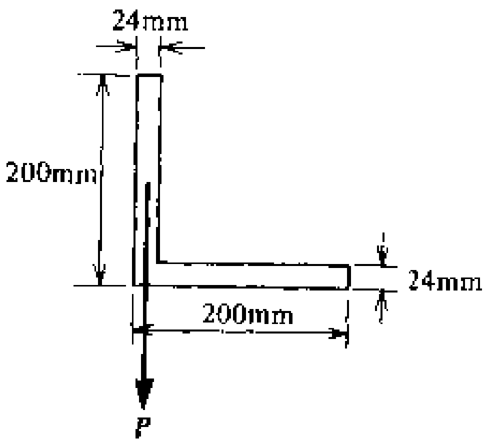


習題圖 8.5-9

8.5－9　試求在習題圖 8.5－9內薄壁 C 形截面剪力中心 S 的距離 e。假定其厚度爲常數。

8.5－10 就習題圖 8.5－10 內所示的帽形截面情況，試解前一習題。

8.5－11 一根長度 $L=3$ m之簡支樑在中點負荷一集中載重 $P=18$ kN 。該橫截面爲一角鋼，其尺寸示於習題圖 8.5－11內 。載重 P 作用於角鋼垂直肢之中間平面 。試求由于彎曲所生的最大拉力 σ_t 與最大壓應力 σ_c。



習題圖 8.5－11

第九章　非彈性彎曲

9·1 緒　　論

非彈性彎曲（ inelastic bending ），係指材料不依胡克氏定律之樑的彎曲而言。因此無論何時，若樑承受載重，以致樑內發生之應力超出該項材料的比例限界，即發生非彈性彎曲。當然，一根受到非彈性彎曲之樑，其行態將視其應力－應變圖的形狀而定。該圖可能在比例限界以外爲彎曲者，如圖1－4所示。所用之材料如爲鋼，將有很顯著的屈伏，並有圖1－2內所示之應力－應變圖。在任何一種情狀，若應力－應變圖爲已知，便能決定樑之各項應力、應變及撓度。在本章內將加說明。

一根非彈性樑分析的基礎，爲樑的平面截面，在受純彎曲時仍將保持一個平面,這一事實，對於非直線型的非彈性材料與直線型的彈性材料均爲同樣正確的條件（見5－1節）。這個概念，使我們能推斷在樑內的應變，將作直線型的變化，越過樑的高度。於是借助應力－應變圖及靜力學方程式，可得到應力及應變的數量。也可算出樑的曲度及撓度。

當完成一座結構的非彈性分析，即可決定其極限載重－負荷的能量。此項能量，通常要較比例界載重（ proportional limit load ）大得很多。（所謂比例限界載重，爲該樑所能負荷的最大載重，在任何一點上不致超過其比例限界者）。爲設計目的，有時需要最大載重以便確定對於失敗或坍塌的安全因素。自然這個因素，與對於超過比例限界的安全因數頗爲不同。許多工程師們在設計鋼結構時，毋寧採用極限載重設計這個概念（見1.3節）而不用彈性設計。

9·2 非彈性彎曲之方程式

爲獲得非彈性彎曲的基本方程式，設一處於純彎曲之樑，受到正彎力矩M（見圖9－1a）。彎曲力偶作用於xy平面內，該平面被假設爲該

截面的對稱平面(圖9-1b)。於是,樑將在這同一平面內起撓曲變形。因此這個平面是彎曲平面。可將 z 軸視作該截面的中性軸,但其位置仍待確定。

關於對稱的考慮,我們知道,在樑內的應變,不問材料的性質如何,均具有直線的分佈,如以前在5.1節內所討論者。因此,應變係從樑頂按照圖9-1c 所示樣式變化直至樑底,而在下面及上面邊緣上的應變,分

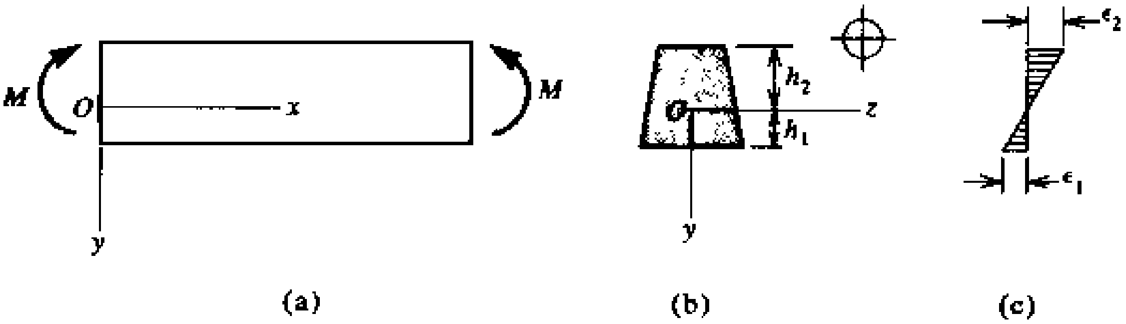


圖9.1 樑之非彈性彎曲

別用 ϵ_1、ϵ_2來表示。以 ρ 表示撓曲線的曲度半徑,我們可以看出,距中性距離 y 處的應變爲(見圖5-2):

$$\epsilon = \frac{y}{\rho} = \kappa y \tag{9-1}$$

式中 $\kappa = 1 / \rho$ 爲曲度。在最外邊緣上的應變爲:

$$\epsilon_1 = \kappa h_1 \qquad \epsilon_2 = -\kappa h_2 \tag{9-2a,b}$$

式中 h_1 及 h_2 分別爲中性軸至樑的下表面及上表面的距離。從這兩個方程式,若我們知道曲度及中性軸位置,則應變便能很容易確定。

中性軸的位置可利用應力-應變圖及一個靜力方程式求得。靜力方程式係表示在該樑任何一個截面上作用的正交應力因而產生的水平合力將消失不見;因此:

$$\int \sigma \, dA = 0 \tag{9-3}$$

式中 dA 爲在該截面內一個元體面積,而積分係就整個截面完成之。曲度,可利用第二個靜力公式獲得,該公式係說明,在該截面上作用的一切應

力之合力等於彎力矩M：

$$\int \sigma y \, dA = M \tag{9-4}$$

自然，方程式（9－3）及（9－4）均與以前用於分析直線型彈性材料樑的方程式相同（見第5.1節）。在本章內將應用這幾個方程式以解非彈性彎曲問題。

在算出樑的曲度後，可使曲度等於d^2v/dx^2（見方程式6－4）並求撓度v之解而得該樑的微小撓度。若干在以前發展成功的求彈性樑撓度的同樣技巧，可應用於非彈性彎曲；只需將曲度採用適當的式子以代替M/EI這個數量，此法將在9.6節內敍述之。

9.3 塑性彎曲

非彈性彎曲中最簡單的情形爲塑性彎曲（plastic bending），這種塑性彎曲出現於樑的材料係彈性－塑性（elastic-plastic）的。此種材料將遵照胡克氏定律一直到屈伏應力爲止。此後在固定不變的應力下，將按照塑性樣式屈伏。一種彈性－塑性材料的應力－應變圖，在拉力及壓力兩方面均具相同的屈伏應力σ_y及相同的彈性模數E，如圖9－2所示。我們可以看出，凡彈性－塑性材料，均具有一個直線型彈性（linear

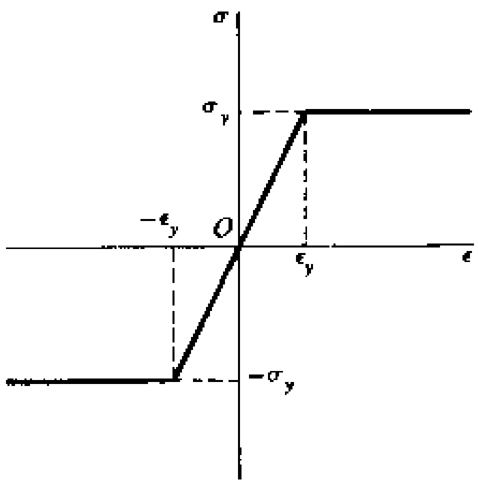


圖9·2　彈性－塑性材料之應力－應變圖

elasticity）區域，其後則跟着一個完全塑性（perfect plasticity）區域。因爲此一理由，"完全塑性的材料"（perfectly plastic material）一詞，常被採用於彈性－塑性材料。

各種結構鋼料，可被理想成爲彈性－塑性材料。因彼等均具有明確劃分清楚的屈伏點，並在屈伏時遭遇到巨大的應變。在到達屈伏應力之後，

假設爲完全塑性，意指應變硬化的影響已被略去不計。但因應變硬化將在鋼的強度提供一種增加，故將其略去不計，通常是在安全方面。

現在讓我們考慮一根彈性－塑性材料承受純彎曲之樑（圖9－1）。當加在樑上之彎曲力偶M很小，在樑內的最大應力將小於σ_y，該樑係處於普通的彈性彎曲條件下具有直線型的應力分佈，如圖9－3a所示之情形。在這些個條件下，從方程式（9－1）至（9－4）我們明瞭，中性軸將通過該截面的重心，正交應力爲$\sigma = My/I$，其曲度爲M/EI。一直到樑內距離中性軸最遠之點上的應力達到屈伏應力爲止（圖9－3b），這些個結果均正確無誤。作用於樑上與其相當的力矩，被稱爲屈服力矩（yield moment）M_y：

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \sigma_y S \tag{9-5}$$

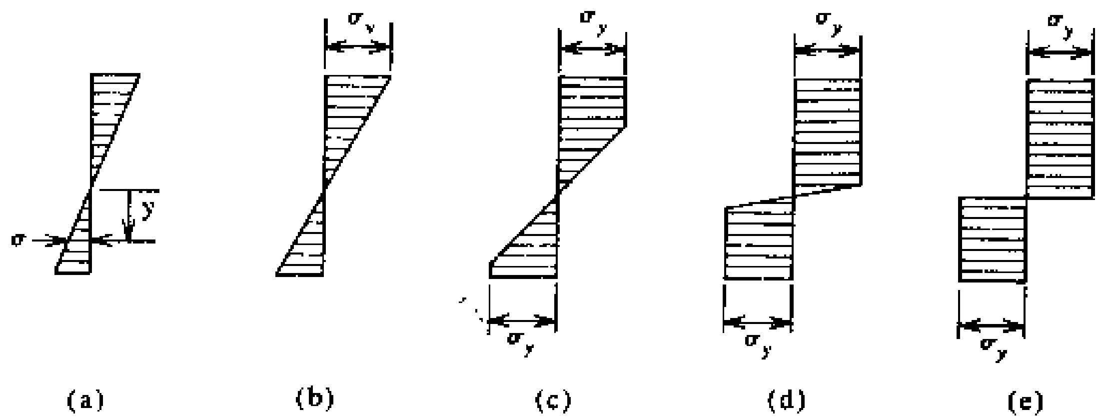


圖9-3　彈性－塑性材料樑內之應力分佈

例如，爲矩形截面之樑，則：

$$M_y = \frac{\sigma_y b h^2}{6} \tag{9-6}$$

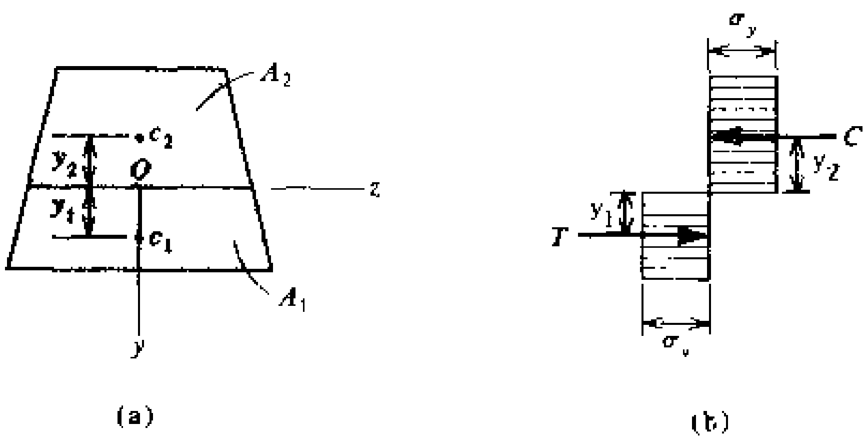
在上式中，b爲截面寬度，h爲高度。

若將彎力矩增加到屈伏力矩M_y以上，則在該截面最外各點上的應變將繼續增加，該最大應變將超過屈伏應變ϵ_y。但由於塑性應變之故，最大應力仍將保持固定不變且等於σ_y。因此應力狀況將如圖9－3c所示的情形。樑在外邊區域將變成塑性的，至於位於中間的“心子”，仍將保持彈性的。

如果彎力矩再增加，則塑性區域將更朝向中性軸方面延伸，一直達到圖9－3d所示的狀況爲止。在此階段，最外纖維處的應變，或已達到屈伏應變ϵ_y的10或15倍，而彈性心子則幾被消失。因此，對於所有一切實用目的，該樑已達到其極限力矩－抵抗能量。將這種極限應力分佈，理

想化爲兩個矩形部份所構成（圖 9－3 e）。相當於這種理想化應力分佈的彎力矩，被稱爲塑性力矩 M_p（plastic moment M_p），並代表一根彈性－塑性材料樑所能支承的最大力矩。

塑性力矩的決定，很明顯的頗爲重要，因其爲該樑的限界或最大力矩之故。爲求得 M_p 起見，開始先找出該截面中性軸的位置（圖 9－4 a）



(a)　　　　(b)

圖 9.4　塑性力矩 M_p 之決定

。在中性軸以上，在該截面內每個元體均具有等於 σ_y 的壓應力（圖 9－4 b）；在中性軸以下，應力爲拉力，亦等於 σ_y。總拉力 T 等於 $\sigma_y A_1$，式中 A_1 爲中性軸以下的截面積。與此相似，總壓力 C 爲 $\sigma_y A_2$，式中 A_2 爲中性軸以下的截面積。如方程式（9－3）所示，在該截面上的合力必須爲零，因此得

$$T - C = 0 \quad 或 \quad A_1 = A_2 \tag{a}$$

因截面的總面積 $A = A_1 + A_2$，很顯然從方程式(a)可以知道

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \tag{9-7}$$

至此，我們可下一結論，中性軸將該截面分爲兩個相等的面積。就一般情形而言，塑性力矩 M_p 的中性軸與直線型彈性彎曲的中性軸不同。例如一個梯形截面如圖 9－4 a 所示之情形，中性軸屬於塑性者，將稍微低於彈性的中性軸。自然，若該截面作雙向對稱，如矩形樑或寬翼緣樑情形，則塑性及彈性彎曲的中性軸將爲相同。

現在可從方程式（9－4）求積分而得到塑性力矩 M_p，或以相同的

程序，僅在中性軸上取 T 及 C 兩力的力矩如圖 9－4 b 所示求得；因此：

$$M_p = Ty_1 + Cy_2$$

式中的 y_1 及 y_2 ，分別爲中性軸至面積 A_1 及 A_2 之形心 c_1 及 c_2 間的距離。以 $\sigma_y A/2$ 代替 T 及 C ，可得：

$$M_p = \frac{\sigma_y A(y_1 + y_2)}{2} \tag{9-8}$$

在每種個別情形的程序，將截面分成兩個相等面積，求出每一半的形心，並用方程式（9－8）算出 M_p 。

與彈性彎曲方程式（9－5）相類似，可將方程式（9－8）寫成下列形式：

$$M_p = \sigma_y Z \tag{9-9}$$

式中

$$Z = \frac{A(y_1 + y_2)}{2} \tag{9-10}$$

Z 爲該截面的塑性模數（plastic modulus）。塑性模數可按幾何的解釋爲，在中性軸以上的截面積的第一力矩（對中性軸取力矩），另加在中性軸以下的截面積的第一力矩。

樑的塑性力矩對其屈伏力矩之比值，祇是截面形狀的一個函數。通常稱爲形狀因數 f（shape factor f）：

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{S} \tag{9-11}$$

以矩形截面（b ＝寬度及 h ＝高度）樑爲例，其塑性模數爲：

$$Z = \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{4} \tag{9-12}$$

由斷面模數爲 $S = bh^2/6$ ，可以看出，矩形截面樑的形狀因數爲：

$$f = \frac{3}{2} \tag{9-13}$$

因此，矩形截面樑的塑性力矩比其屈伏力矩大50％。

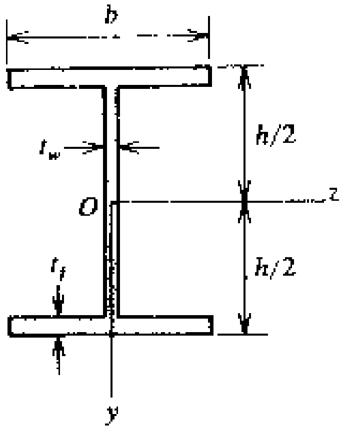


圖 9·5　寬翼緣樑

如爲寬翼緣樑（見圖 9 － 5），其塑性模數可取中性軸上面的一塊翼緣與在中性軸以上部份的腹鈑兩者的第一力矩，並乘以 2 計算之：即

$$Z = bt_f(h - t_f) + t_w\left(\frac{h}{2} - t_f\right)^2 \tag{9-14}$$

在該式中，右側第一項代表翼緣的貢獻，第二項則來自腹鈑。關於寬翼緣樑的標準形狀，其 Z 值已表列於 $AISC$ 的手册中（Manual of steel construction，7th Ed.1970）。寬翼緣樑的形狀因數 f，其典型值均在 1.1 至 1.2 範圍之內，視截面尺寸的比例而定。

力矩 - 曲度關係

早已觀察到一項事實，即彎力矩值小於屈伏力矩 M_y 時，則曲度 κ 爲 M/EI。若以 κ_y 表示屈伏曲度（yield curvature），亦即，在 M 等於 M_y 時的曲度，我們將得到下列的方程式：

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI} \tag{9-15}$$

因此，在直線型彈性範圍內，樑的力矩 - 曲度關係，可用無因次形式來表示如下：

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\kappa}{\kappa_y} \qquad (0 \le M \le M_y) \tag{9-16}$$

此一方程式在圖 9 － 6 中所示的力矩-曲度圖內係用直線部分代表。

當該力矩變成大於 M_y 時，則該樑的一部分將變成十足塑性，一如在圖 9 － 3 c 中已討論的情形。於是力矩 - 曲度的關係變成非直線型的，如圖 9 － 6 所示。在塑性區更朝向樑的中性軸作更進一步的深入時，則在圖

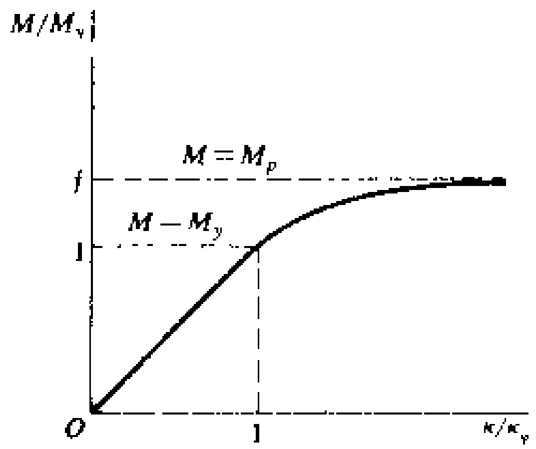


圖 9・6　彈性 - 塑性材料樑之力矩 - 曲度圖

9－6內所示的曲綫變成比較平緩，並逐漸接近一條水平的漸近線。這條漸近線即代表塑性力矩M_p　，此漸近線的縱標即爲其形狀因數f　。該彎曲線的方程式，自然依樑的橫截面形狀而定。

讓我們重行採用一根矩形截面樑如（圖9－7 a）所示，並以e代表由中性軸至彈性心子邊緣間的距離。十足的塑性區用陰影表示在該圖的部份(a)內，在樑的應力分佈則示於該圖的部分(b)內。由這種應力分佈所代表的彎力矩爲：

$$M = \sigma_y b\left(\frac{h}{2} - e\right)\left(\frac{h}{2} + e\right) + \sigma_y b\left(\frac{2e^2}{3}\right) \tag{b}$$

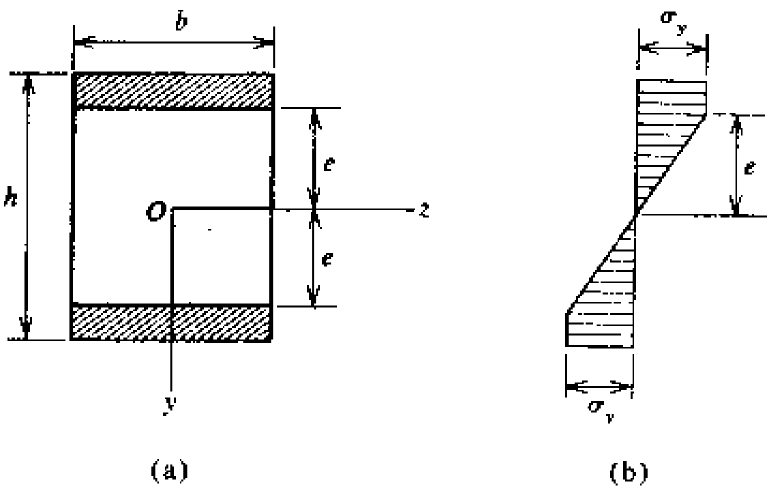


圖 9・7　矩形截面樑之應力分析

在該式中，右側的第一項是由於十足塑性區內的應力所產生之力矩，第二項是由於彈性心子內的應力所產生的力矩。將方程式(b)簡化之：

$$M = \frac{\sigma_y bh^2}{6}\left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2}\right) = M_y\left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2}\right) \tag{c}$$

注意。當 $e = h/2$ 時，從方程式(c)得到 $M = M_y$；在 $e = 0$ 時，得 $M = 3M_y/2$，等於一個矩形截面的塑性力矩 M_p。

圖 9－7 內所示矩形樑的曲度，可很容易的用方程式 $\kappa = \epsilon / y$（見方程式 9－1），應用在樑內位於彈性心子較外邊緣的一個點上求得。在該點上，$\epsilon = \sigma_y / E$ 及 $y = e$，因此得

$$\kappa = \frac{\sigma_y}{Ee} \tag{d}$$

若將下列的矩形樑屈伏曲度 κ_y 式引入，則(d)方程式可用無因次的形式來表示：

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI} = \frac{2\sigma_y}{Eh} \tag{e}$$

將(d)及(e)兩個方程式合併，可得：

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = \frac{h}{2e} \tag{f}$$

現在可將(e)及(f)兩個方程式內的 e/h 消法，因此可得無因次形式的力矩－曲度方程式

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} - \frac{\kappa_y^2}{2\kappa^2} \qquad (M_y \le M \le M_p) \tag{9-17}$$

解方程式（9－17），得以力矩 M 為項來表示曲度公式為

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2M/M_y}} \qquad (M_y \le M \le M_p) \tag{9-18}$$

矩形樑的力矩－曲度關係的圖示（依方程式 9－17 或 9－18 繪出者）如圖 9－8 所示。

對於其他各種形狀的截面，可依照相同的程序以獲取其力矩－曲度方程式。這些屬於菱形、圓形及典型寬翼緣截面方程式的圖解，均繪於圖 9－8 內。在每種情形中，圖示開始為一條直線，代表直線型的彈性區；繼之為一條曲線，代表該區域中有一部份為塑性一部分為彈性。在該圖示最後一個區間，屈伏將發生在該樑的塑性區間，但應力則無任何增加。反過

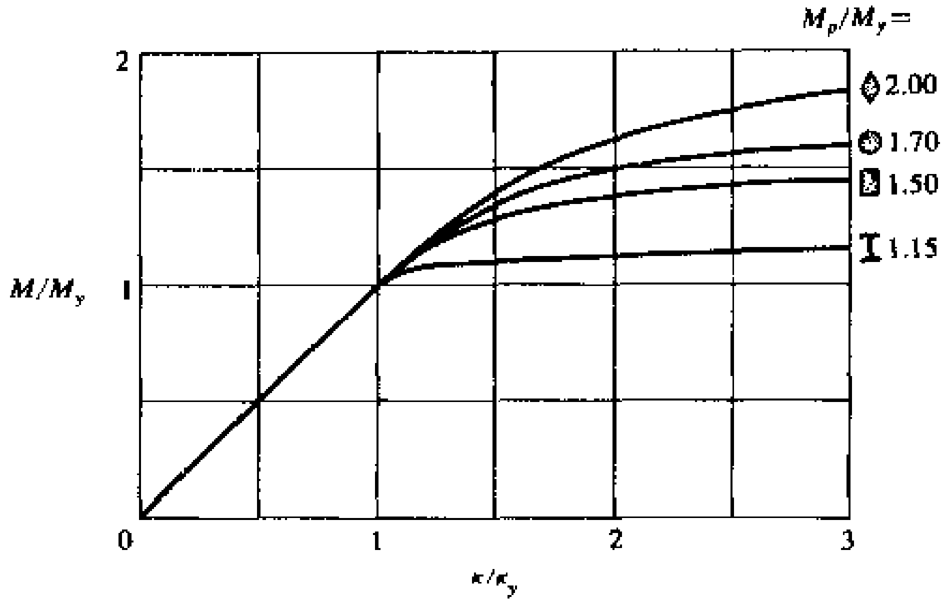


圖 9・8 彈性－塑性材料之樑的力矩－曲度圖

來說，在樑中央的彈性區，隨應力的增加，同時將發生另外的增加變形。因此樑的變形，將由彈性區加以控制，而這種型式的行態，有時被稱爲包含塑性流（ contained plastic flow）。當曲度變得很大時，在圖9－8內所示的曲線，逐漸接近一條水平線。在此一階段，樑可繼續變形，而在施加彎力矩方面，無任何增加。因此有不受限的塑性流（ unrestricted plastic flow ）的狀況，而與其相當的彎力矩卽爲塑性力矩M_p。由於不受限塑性流的存在，結果得到了塑性鉸（ plastic hinge ）的概念，將在下一節內敘述之。

9・4 塑 性 鉸

爲要說明塑性鉸這個觀念，讓我們考慮一根彈性－塑性材料簡支樑，在其中點承受一個集中載重P的行態（圖9－9 a ）。彎力矩圖的形狀爲三角形，所具的最大彎力矩等於$PL/4$（圖9－9 b ）。若該最大力矩大於M_y 但小於M_p，將有一個包含塑性流（ contained plastic flow ）區存在於該樑的中央部分（圖9－9 a ）。具充分塑性的各區，均用陰影表示在圖內。這些區域的侵入深度，在任何一個截面內均很容易求得，因其彎力矩爲已知 *。因此對於任何一個特殊的樑，其塑性區均可完全確定。

*在決定塑性區的尺寸時，將剪力的影響略去不計，並採用在前一節內所述的純彎曲理論。這種辦法乃因剪力影響微小之故，而認爲正當者。

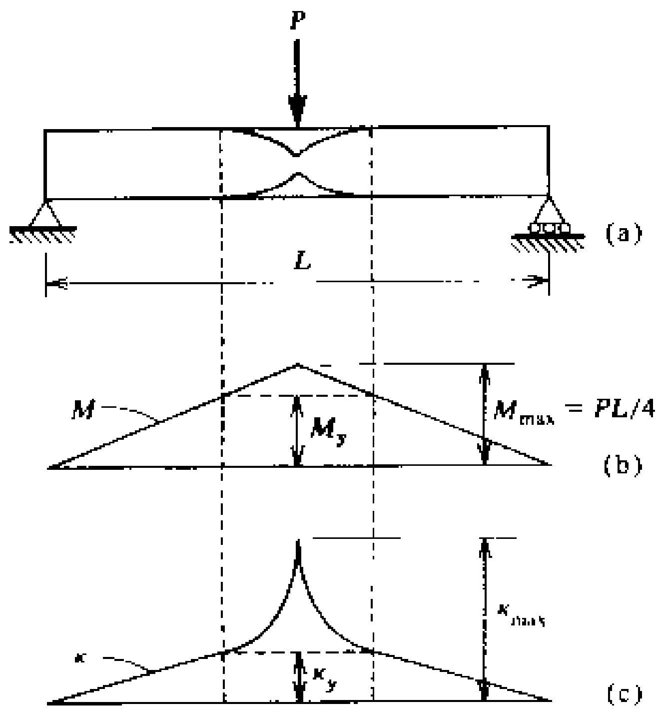


圖 9-9　部分塑性樑

該樑的曲度如圖9－9c所示。曲度自樑的兩端向樑的中央作直線增加，一直達到塑性區的邊緣為止。在該處的曲度等於其屈伏值κ_y。然後曲度將以較大的比率增加，並在該樑的中點達到一個最大值κ_{max}。只要有一個彈性心子繼續存於樑的中央，則最大曲度將保持有限程度。

當載重繼續增加，最大彎力矩逐漸接近塑性力矩M_p時，各塑性區域將更向內部延伸朝向樑的中間部分的中性軸。最後，當M_{max}變成等於M_p時，有樑中心的截面，將成完全塑性(圖9－10)。於是在樑中心點上的曲

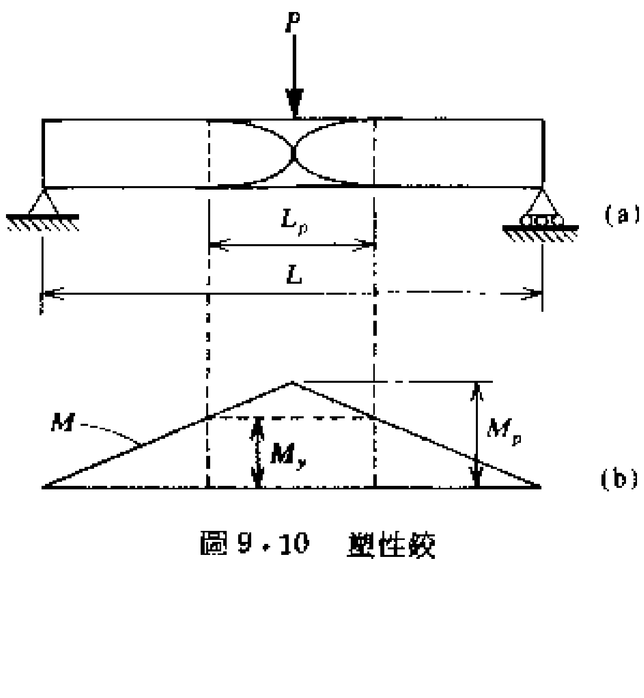


圖 9-10　塑性鉸

度成為非常的大，而不受限的塑性流可能發生。最大力矩不可能發生再進一步的增加，而在樑上的載重則處於最大值。樑將因過度的旋轉而遭失敗，過度的旋轉係發生於中間的截面上。在同時，樑的兩個半截則將保持比較剛勁。該樑的行態好像是兩根剛勁桿件由一個塑性鉸連接在一起,這樣便容許兩根桿件在一個固定不變的力矩 M_p 作用下，彼此作相對旋轉。

圖 9 － 10 所示，圍繞該樑塑性鉸的塑性區，其長度 L_p 很容易從該區邊緣的彎力矩等於 M_y 這個事實來計算。於是可得下列的方程式：

$$M_y = \frac{P}{2}\left(\frac{L - L_p}{2}\right) \tag{a}$$

此外，最大力矩 $PL/4$ 等於 M_p ，因此

$$P = \frac{4M_p}{L} \tag{b}$$

將(b)式代入方程式(a)內並解該方程式得

$$L_p = L\left(1 - \frac{M_y}{M_p}\right) = L\left(1 - \frac{1}{f}\right) \tag{9-19}$$

等於簡支樑負一個集中載重時的塑性區長度。如為一根矩形樑（ $f =1.5$ ），則得 $L_p = L/3$ 。一根寬翼緣樑（ $f = 1.1$ 至 1.2 ），則得 $L_p = 0.09L$ 至 $0.17L$ 。因此一根寬翼緣樑的塑性區，將比一根矩形樑的塑性區小很多。

至於塑性區延伸到該樑的相當長度時，曲度亦趨向於集中在塑性鉸的截面處。因此，對於大多數的目的，可將一個塑性鉸當作無尺寸大小的，亦即將該鉸當作位於該樑一個單獨的截面上。塑性鉸的存在，意指該樑將在鉸的截面處旋轉，同時彎力矩將依然保持固定不變且等於 M_p。自然，塑性鉸將永遠形成於發生最大彎力矩的各個截面上。

9.5 樑之塑性分析

塑性鉸這個概念，對於決定一根彈性－塑性樑所能支承的最大載重，提供一種頗為有用的方法。我們已經觀察到，與上節說明有關聯的，因為有一個塑性鉸的存在，故容許無限制的旋轉發生。因此，若樑為靜定樑，單獨一個鉸的形成已足發生失敗。用以發展成鉸的載重量（即為極限載重 ultimate load ），可從簡單的靜力學計算求得。如圖 9 － 10 a 所示

之樑的極限載重 P_u ：

$$P_u = \frac{4M_p}{L}$$

是從上節內方程式(b)所求得的。計算極限載重並爲彈性 - 塑性樑找出塑性鉸的位置，這個工作常被稱爲塑性分析（ plastic analysis ）。

現在讓我們考慮另外一個靜定樑的例子（見圖 9 － 11a ）。該樑負強度 q 的均佈載重作用在左側半孔之上。彎力矩圖示於該圖之(b)內。求得的最大彎力矩爲 $M_{max} = 9qL^2/128$ 。因爲在這個例內的彎力矩圖，係從靜力學求得，與該樑的材料究竟是彈性或非彈性全然沒有關係，故對所有一切靜定樑均正確無誤。

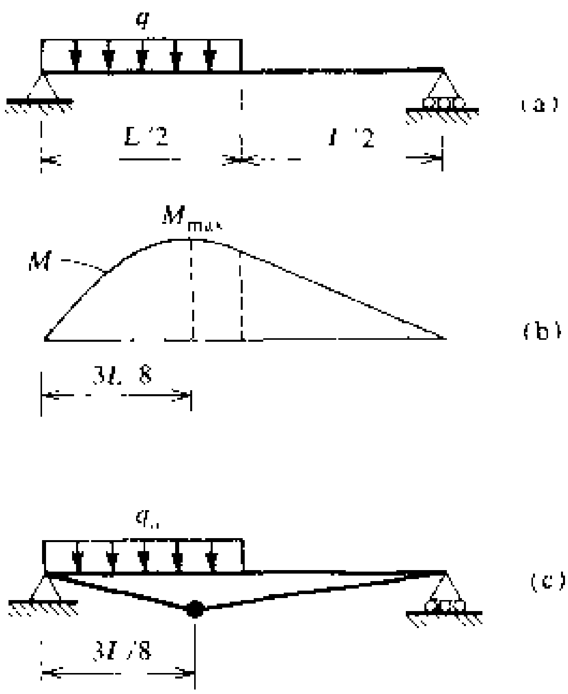


圖 9 - 11　靜定樑之塑性分析

當載重 q 逐漸加在這根樑上，在最大力矩變成該樑的屈伏力矩 M_y 時，即遭遇到最初屈伏；其相當的載重被稱爲屈伏載重（ yield load ）。於是這根樑的屈伏載重爲：

$$q_y = \frac{128M_y}{9L^2}$$

若再增加載重時，終於在最大彎力矩的截面上，會形成一個塑性鉸，如圖 9－11c所示的黑圓點。其相當的極限載重為：

$$q_u=\frac{128M_p}{9L^2}$$

式中的M_p 為該樑的塑性力矩。當塑性鉸形成之後，該樑便可被想像成由該鉸連在一起的兩根桿件所組成。一根在這種狀況的樑，形成一個機構（mechanism），可在極限載重下繼續撓曲變位。“破壞機構”（failure mechanism）及“坍塌機構”（collapse mechanism）兩名詞，常被用來形容這種狀況。

一根靜定樑的極限載重，對其屈伏載重的比值永遠等於M_p/M_y，此值即為該截面的形狀因數 f 從上例內即可看出。但如為靜不定樑，此一比值將依樑的類型及其載重的情況而變化。

為證明靜不定樑的行態，我們將以一端支着的懸臂樑為例，在樑中點

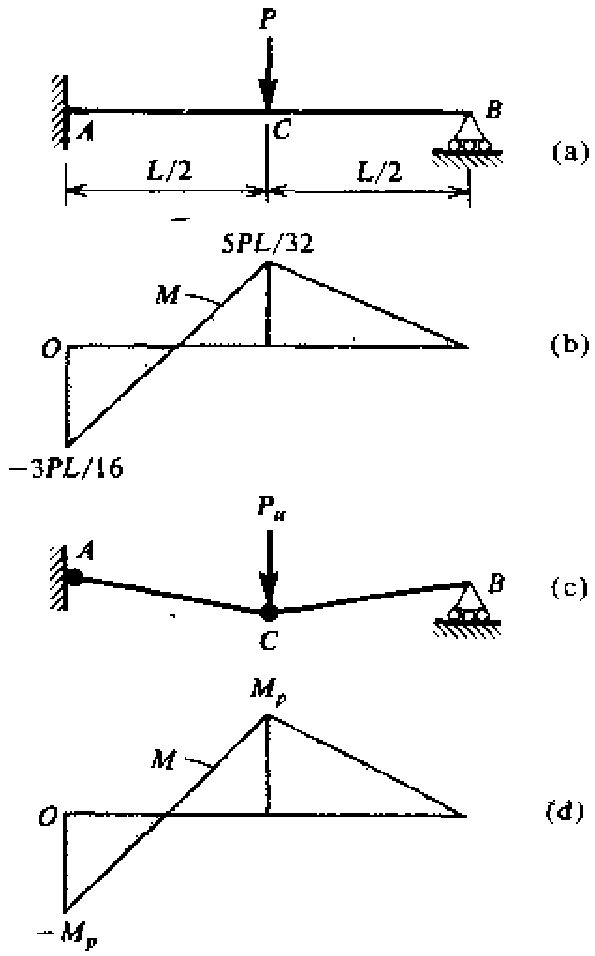


圖 9．12　靜不定樑之塑性分析

負一集中載重 P（圖 9 － 12 a）。該載重爲任何一個小於屈伏載重 P_y 值，其彎力矩圖均具有如圖 9 － 12b 所示的形狀。最大彎力矩在其固定端 A 發生，其數值等於 $3PL/16$；於是屈伏載重爲：

$$P_y = \frac{16M_y}{3L} \tag{a}$$

若 P 增加到超過 P_y 值，另外增加的屈伏將發生於截面 A 處。不久，在載重稍微大於 P_y 時，屈伏也將開始發生於截面 C 處。在彎力矩圖內，該處爲一個顛峯。若繼續將載重增加，便在該樑的 A 端形成一個塑性鉸。但這個單獨鉸，並不能引起該樑的完全失敗。代替的情形是：該樑的行態將像一根靜定簡支樑，有一個載重 P 作用在截面 C 處與一個力矩 M_p 作用在末端 A 處。於是該結構將經得起在載重 P 上有更多的增加量，一直到最後在 C 點的彎力矩也達到該塑性力矩 M_p 爲止。在此一階段中，A 及 C 兩點上均有塑性鉸，而該結構已形成一個機構（圖 9 － 12 c）。現在可以發生不受限制的撓度，而在載重上更多的增加已不可能；於是達到了極限載重 P_u

爲確定極限載重，並不需要研究從最初載重起一直到坍塌爲止樑之行態的一切細節，如在前節內所述者。代替的辦法，可直接從圖 9 － 12 c 所示的失敗狀況做起，並用靜力學算出 P_u。因在塑性鉸處的彎力矩等於 M_p，失敗狀況的完整彎力矩圖，可立刻明瞭（見圖 9 － 12 d）。因此載重 P_u 可很容易從有關平衡的考慮而求得。例如從以全樑作爲隔離體的圖求得支承 B 處的反力 R_b。在 A 點取力矩（圖 9 － 12 c），得：

$$M_p - \frac{P_u L}{2} + R_b L = 0 \quad 或 \quad R_b = \frac{P_u}{2} - \frac{M_p}{L}$$

下一步驟，利用 CB 部分的隔離體圖，並在 C 點取力矩，可得：

$$-M_p + \frac{R_b L}{2} = 0$$

將這個方程式與在前面的一個合併，則得：

$$P_u = \frac{6M_p}{L} \tag{b}$$

即爲該樑的極限載重。

從方程式(a)及(b)，可獲得極限載重與屈伏載重的比值如下：

$$\frac{P_u}{P_y}=\frac{9M_p}{8M_y}$$

此値大於由靜定樑所獲得的比値。其增加的理由，可很容易看出。雖然靜定樑的彎力矩圖永遠保持相同，但一種力矩的重分配（ redistribution of moments ）則將發生於靜不定樑上。例如圖 9 － 12 所示之樑，最初的力矩圖在截面 A 處有一個最大値（圖 9 － 12 b ）。在該截面形成一個鉸後，該處的力矩仍將保持不變，雖然在其他各處的力矩，將繼續增加一直到達到如圖 9 － 12d 所示的狀況爲止。這種力矩的重分配，永遠具有增加靜不定結構極限強度的傾向，因爲有一個截面失敗，該結構的其他部份將立刻開始支承另外增加的載重之故。

塑性分析所具備的許多合宜特色中之一，爲簡易。因其所具的簡易特色，使極限載重祇用靜力學即可算出。一個純粹的靜力分析，自然要比直線型彈性範圍內所要求的靜不定分析簡單得很多。另外，用塑性分析所獲得的結果，在限界條件內的缺欠比較不敏感。一個固定支承的微小旋轉或一個簡支承的稍微沉降，對於極限載重全無影響。至於同一類的缺欠，是對該結構的彈性行態有些微影響。

當用靜力學計算極限載重時，常可應用虛變位原則（ principle of virtual displacements ）頗爲方便。這個原則，是「若有一個剛體系統，在一組力系作用下處於平衡狀態，在該系統有微小的虛變位時，由這組力系所作的功必須爲零」。應用這個原則作如圖 9 － 12 所示之例。我們將破壞機構當作由 AC 及 CB 兩個桿件所組成，在 A 及 C 兩點上爲塑性

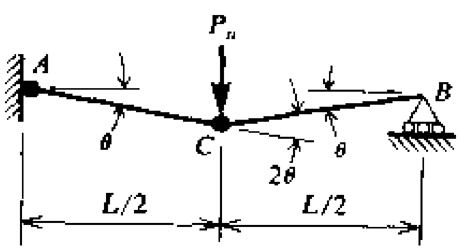


圖 9 · 13　虛變位原則之應用

鉸，如圖 9 － 13 所示。將 AC 桿件旋轉一個微小角度 θ 而能夠引入一個虛變位。在變位時，CB 桿件將旋轉一個相同的角度 θ ，而 C 點將向下移

動一段距離 $\theta L/2$。由塑性力矩M_p 完成之功爲負號，因其與桿件的旋轉相反之故。在截面 A 處的功，等於 $-M_p\theta$，而在截面 C 處的功爲 $-M_p(2\theta)$。於是樑的虛功方程式爲：

$$\frac{P_u\theta L}{2}-M_p\theta-2M_p\theta=0$$

將 θ 角（即確定虛變位用者）消去之後，即得：

$$P_u=\frac{6M_p}{L}$$

與以前的結果相同。應用虛變位原則的優點，在於該原則簡單。僅需引入一虛變位，其後即可寫出一個虛功方程式。而其顯著不同的是，爲更常用的靜力學辦法，需利用隔離體圖，不但要用整個結構的隔離體圖，並且要用其中的一部分。

在前例中，只有一個可能的方法，用以位置塑性鉸，並因此只有一個破壞機構必須加以考慮。但時常會有幾個不同的可能機構會發生，而且那一個眞正的，可能並不明顯。在這種情況下，我們必需依次考慮每一個機構，並算出與其相當的載重（或幾個載重）之值；自然，眞正的失敗機構就是發生在載重最小值的那一個。這個載重即爲該結構的眞正極限載重。

爲舉例說明破壞機構的適當選擇，用圖 9－14a所示的 AB 樑作爲一個例題。這個樑支承兩個集中載重，作用於 C 及 D 點。該樑的彎力矩的顛峯將發生在載重或反力起作用的截面上，亦即在 A，C 或 D 各截面上。若塑性鉸存在於這三個截面中的兩個上，即將形成一個破壞機構，而這三種可能性已分別示於圖 9－14 b，c 及 d 內。每一個假設的機構，其載重 P 的數量可很容易從虛變位算得。於是對圖 9－14b所示的機構，可得：

$$P\left(\frac{\theta L}{2}\right)+2P\left(\frac{\theta L}{4}\right)-M_p\theta-M_p(2\theta)=0$$

或 $P=3M_p/L$。與此相似，相當於圖 9－14c所示機構的載重 P，經求得爲 $5M_p/2L$，與相當於圖 9－14 d 所示的機構爲 $6M_p/L$。將此三個結果作一比較，得一結論。在圖 9－14 a 所示之樑，其極限載重爲：

$$P_u=\frac{5M_p}{2L}$$

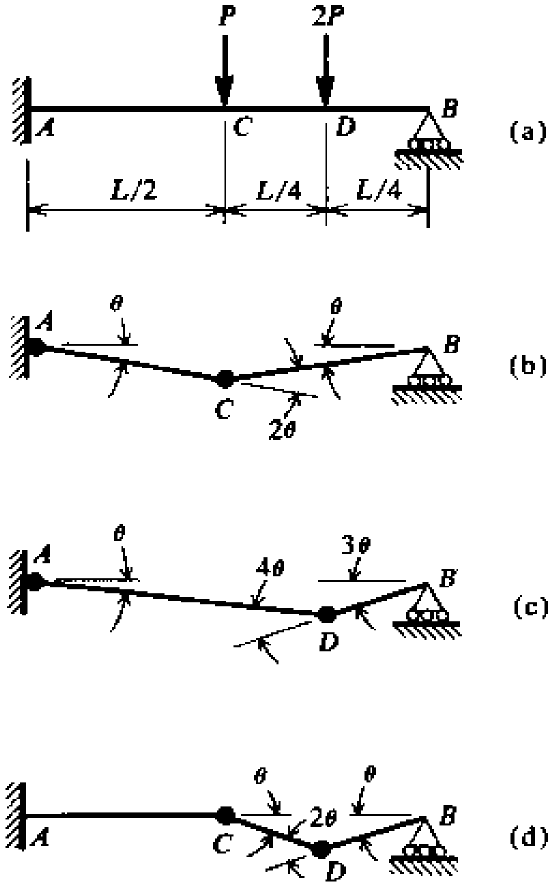


圖 9．14　說明可能發生失敗機構之例

而該破壞機構，則在A及D兩個截面上，具有塑性鉸。

作為塑性分析的另外一個例題。讓我們檢討一根一端支着的懸臂樑負均佈載重（圖9－15a）。在樑內的最大負彎力矩發生於固定支承A處，而最大正力矩發生於靠近樑中間的某處。於是破壞機構將在A及C兩點上具有塑性鉸，如9－15b所示之情形。若在這個機構中引進一個虛變位，並以θ表示AC部分的旋轉角，於是在C點之鉸，其垂直變位將為θb。式中的b為該鉸距A點的距離。同樣，CB部分的旋轉角則成為$\theta_1 = \theta b / (L - b)$。於是在各塑性鉸處，由塑性力矩$M_p$所完成的虛功為：

$$-M_p\theta - M_p(\theta + \theta_1) \tag{c}$$

由所加的載重q完成之功，可取該載重的一個元體$q dx$，乘其移動過的虛變位，並求沿樑長的積分而求得。因q為固定不變，結果等於q及圖9－15b所示變位圖面積的乘積。於是載重q的虛功為：

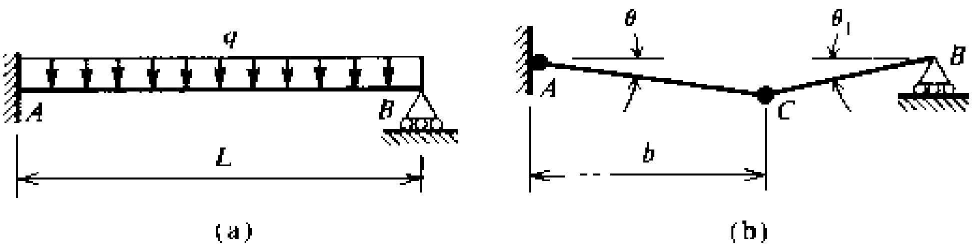


圖 9.15　負荷均佈載重之樑的塑性分析

$$q\left(\frac{L}{2}\right)\left(\theta b\right) \tag{d}$$

此虛功方程式，係由(c)及(d)兩式相加，並使其等於零而獲得。此方程式爲

$$q_u=\frac{2M_p}{bL}\left(\frac{2L-b}{L-b}\right) \tag{e}$$

這個式子係用距離 b 爲項而得的極限載重。極限載重在此時仍然是一個未知數。

但我們已看出，在考慮各種不同可能的破壞機構時，眞正的機構是那個，將得到極限載重爲最低値。將這個概念應用到現在這個問題，可以斷定距離 b 必須是一個能使 q_u是一個最低値。因此，可取對 b 的導數 q_u,並將此導數等於零，並求 b 之解，其結果爲：

$$b=L(2-\sqrt{2}) \tag{f}$$

另外一個可以採取的程序，爲在樑內的彎力矩建立一個式子，並求其最大力矩位置；該點將爲塑性鉸的位置。自然，剛才提到的計算方法（或爲求得 q_u 的最小値或爲求出最大力矩的位置），僅在最簡單的問題，其中數學最易處理的，始有此可能。在比較複雜的情勢中，先爲塑性鉸假設幾個位置，並算出每種情形的相當載重 q ，以完成一個數値解法，將比較容易。從這樣計算最小載重 q_u及鉸位置兩者均可求得，而具很良好的準確性。

現在再回到我們手中的問題。從方程式(f)得到的距離 b 代入 q_u 式（見方程式 e ）得：

$$q_u=\frac{2M_p}{L^2}(3+2\sqrt{2})\approx\frac{11.66M_p}{L^2} \tag{g}$$

爲樑上極限載重的式子。作爲間接的說明，極限載重 q_u 對屈伏載重 q_y 之

比在該樑內很容易算出。這個比值爲1.46 M_p/M_y，此值比靜定樑的比值要高出很多。

固定端樑及連續樑的塑性分析，可用類似的樣式完成之。一根固定端樑當有三個塑性鉸形成後，卽變成一個機構。通常係在每一支承上有一個鉸,並加上一個位居中間某一位置的鉸。當一個機構在連續樑之一孔內形成，則連續樑便將破壞。若形成機構的一孔係在連續樑的中間，將需要有三個塑性鉸，在該孔的每端各有一個，並在位居中間的某一位置上有一個。若爲連續樑端孔爲簡支承者，僅需兩個塑性鉸形成一個機構，其中之一在裏面的第一個支承上，另外一個則在端孔本身之內。

塑性分析最重要的應用，係在平面構架設計。當達到極限載重時，此類構架將形成機構，但其分析工作將比樑的塑性分析複雜很多。對此有興趣的讀者，可另讀參考書9－1至9－8以獲得更進一步的知識。

當分析在非彈性範圍內的樑或其他結構時，我們必須牢記於心的是，重疊原理並不適用，而該結構的行態，並非只依載重的最後値，並且有賴於各載重加施的次序。爲說明此點，試考慮 AB 樑，上負兩個載重 P 作用如圖9－16a所示之情形。若兩個載重同時加於樑上，則彎力矩圖將具有如該圖(b)的形狀，而屈伏載重爲 $P_y = 9M_p/L$。現在假設在 C 點作用的載重先加於樑上，在後再將在 D 點的載重加在樑上。當僅在 C 點上有載重作用時，則彎力矩圖將如圖9－16c所示之形狀。最大力矩値，將爲上例中的兩倍，並因此單獨在 C 點上作用的載重 P，卽可能產生塑性行態。雖然

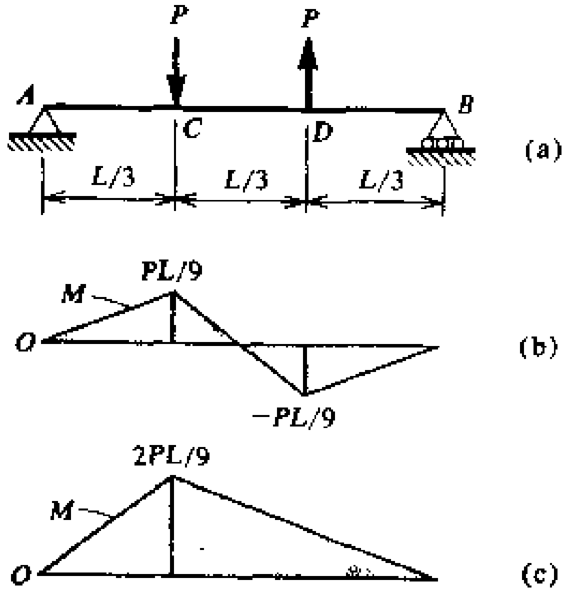


圖9.16　負有兩個載重之樑

該載重仍然小於剛在上面所算得的P_y值。這個塑性行態，當另一個載重P加在D點時，將不會消失，並因此很顯然該樑的最後狀況將與載重同時加上的情況不同。由於這個理由，我們將永遠假設各力系係同時加於該結構上，且各載重的比値在加重時將保持不變。

塑性設計

以極限載重能量爲根據的鋼結構設計，常被稱爲塑性設計（ plastic design ）或極限載重設計（ ultimate load design ）*。在塑性設計中，首先規定該結構的工作載重，其後將那些載重乘一載重因數（ load factor ）譬如說 1.7以獲得極限載重。該結構利用塑性分析概念，按極限載重條件而設計者。這種辦法與常用的彈性設計（ elastic design ）或容許應力設計（ allowable stress design ），即在屈伏應力另用一安全因數除而得工作應力顯然不同。其後從事該結構的設計（利用彈性分析概念）使不超出工作應力。

兩種設計方法中的根本差別，在於這個事實。即塑性設計將產生一座結構，在其所有各部份，對於失敗均具有多少一致的安全因數。至於一座按彈性理論設計的結構，對於屈伏具有一致的安全因數。在一座結構內的彎力矩，於非彈性作用期間如何重行分配的討論中，可很容易明瞭這兩種方法設計的結構，在結構的各部分上，其相對尺寸將具有不同的比例。

關於塑性設計與分析這個課題的著作頗多，讀者如要深入研求（可參閱參考資料9 − 1至9 − 18 ）等書。

9·6 撓　度

一根非彈性樑的撓度，可從其曲度及撓度間的基本關係計算得到（見方程式6 − 4 ）：

$$\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{9-20}$$

這個方程式係從純粹的幾何的考慮誘導而得。因此，對於用任何材料的樑，均爲正當無誤。自然該方程式只適用於微小的撓度。爲應用方程式（ 9 − 20 ）計算撓度，曲度κ必須爲已知者。如爲直線型的彈性材料，曲度

*限界設計（ limit design ）一詞亦常被採用。

爲M/EI。如爲一根非彈性樑(例如一根彈性-塑性樑),必須應用曲度的適當式子(如方程式9-15)。在應用方程式(9-20)時,剪力對於撓度的影響已被略去不計,對於普通目的,如此作法已足夠準確。

在第六章內,已敍過爲彈性樑解方程式(9-20)的若干方法,也可能用於非彈性彎曲。例如連續求積分方法頗爲正當。雖然這個方法只適用於簡單樑問題。力矩-面積方法也可以應用,但我們在此時必須稱爲曲度-面積法(curvature-area method)。因爲這個定理必須用曲度圖的面積來代替M/EI圖的面積。如用語詞加以說明。曲度面積定理(curvature-area theorems)爲:

1. 介於撓曲線A及B點上兩根正切線間的θ角,等於介在該兩點間在曲度圖內的面積。
2. 從A點的切線量得B點的撓度Δ,等於曲度圖內介於A、B兩點間的面積,對B點所取的第一力矩。

這兩項定理可按照力矩-面積定理應用到彈性樑的相同樣式,以求非彈性樑的傾斜度及撓度。

由於曲度圖,並非通常可以簡單的函數爲項來表示,常需用數字的技巧以求撓度。例如可在順沿樑的軸線一組分離點上算出其曲度,而曲度圖的縱標,可在這些點上求得,這些縱標,可用直線連成一幅近似精確的圖。由該近似圖的面積及第一力矩,即可用數字求出,其後即可根據曲度-面積定理來確定撓度及傾斜度。僅有很簡單的問題可用這種方法處理;關於複雜的結構已有各種近似方法。應參考各種參考書先獲得撓度的資料。

重疊原則,不能應用於任何一根已經超過比例限界的樑。因此在決定非彈性樑的撓度時,即不能採用重疊方法。

【例題】一根由彈性-塑性材料作成的懸臂樑AB在其自由端上負荷一個集中載重(見9-17a)。試決定從開始載重至失敗,在該樑自由端上的旋轉角θ及撓度δ,假設該樑的橫截面爲矩形。

開始畫出該樑的彎力矩圖(圖9-17b)。最大彎力矩等於PL,只要這個數值小於屈伏力矩M_y,則該樑是十足彈性的。在彈性範圍內,有下列兩式可用:

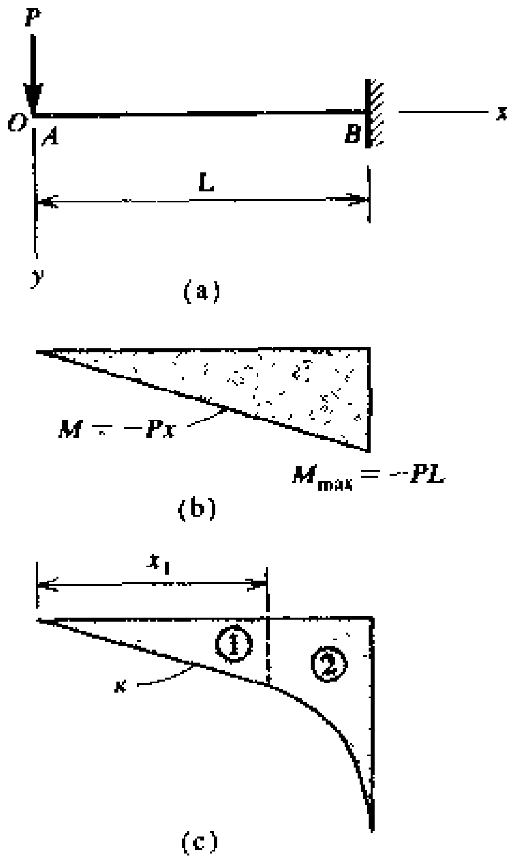


圖 9．17　例題　矩形截面之彈性－塑性樑

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI} \qquad \delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

首先使樑發生屈伏的屈伏載重P_y，可用下列方程式得出：

$$P_y = \frac{M_y}{L} \tag{a}$$

由屈伏載重所引起的旋轉角θ及撓度δ_y分別為：

$$\theta_y = \frac{P_y L^2}{2EI} \qquad \delta_y = \frac{P_y L^3}{3EI} \tag{b}$$

這兩個數值，為彈性範圍內旋轉角及撓度的最大值。用無因次形式，我們可用下列已簡化的方程式來表示整個彈性範圍內的旋轉角及撓度：

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \frac{P}{P_y} \qquad \frac{\delta}{\delta_y} = \frac{P}{P_y} \qquad \left(0 \le \frac{P}{P_y} \le 1\right) \tag{c}$$

當樑內的最大力矩超過M_y時，該樑將具有兩個區段：(1)一個是十足彈性行態區段，及(2)一個彈性－塑性行態區段，如圖 9 － 17c 內所示的曲

度圖。在第一區段內的曲度爲：

$$\kappa = \frac{Px}{EI} \tag{d}$$

在第二區段內則爲（見方程式9－18）：

$$\kappa = \frac{\kappa_y}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}} \tag{e}$$

式中的 $\kappa_y = M_y/EI$。彈性區段的長度 x_1，係從方程式 $Px_1 = M_y$ 求得。因

$$x_1 = \frac{M_y}{P} \tag{f}$$

此Δ在樑端的旋轉角，按照第一曲度－面積定理，將等於曲度圖的面積：

$$\theta = \int_0^{x_1} \frac{Px\,dx}{EI} + \int_{x_1}^{L} \frac{\kappa_y\,dx}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}}$$

$$= \frac{Px_1^2}{2EI} + \frac{\kappa_y M_y}{P}\left[\sqrt{3 - 2Px_1/M_y} - \sqrt{3 - 2PL/M_y}\right]$$

若以 M/EI 代 κ_y，M_y/P 代 x_1 及 $P_y L$ 代 M_y，則上面的方程式化爲：

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \frac{P_y}{P}\left[3 - 2\sqrt{3 - 2P/P_y}\right] \qquad \left(1 \le \frac{P}{P_y} \le \frac{3}{2}\right) \tag{g}$$

式中 θ_y，係由方程式(b)得出。一直到樑內的最大力矩等於塑性力矩 M_p，即相當於 $P/P_y = 3/2$ 時，這個方程式均爲正確無誤。在這一瞬間，當 P/P_y 達到這個數值時，則旋轉角爲 $\theta/\theta_y = 2$。自此以後，此角將無限量的增加。載重 P/P_y 對旋轉角 θ/θ_y 所成的一條曲線，如圖9－18所示。

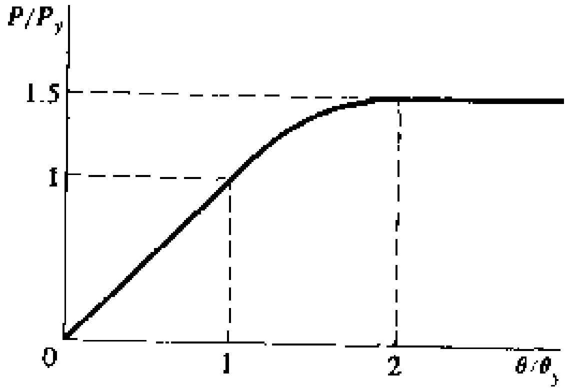


圖9．18 圖9．17懸臂樑載重對旋轉角圖

在樑端的撓度，係從第二曲度－面積定理計算如下式：

$$\delta = \int_0^{x_1} \frac{Px^2\,dx}{EI} + \int_{x_1}^{L} \frac{\kappa_y x\,dx}{\sqrt{3-2Px/M_y}}$$

將這兩個積分值，並完成如在方程式(g)內的代入工作，再得：

$$\frac{\delta}{\delta_y} = \left(\frac{P_y}{P}\right)^2 \left[5 - \left(3 + \frac{P}{P_y}\right)\sqrt{3 - \frac{2P}{P_y}}\right] \qquad \left(1 \le \frac{P}{P_y} \le \frac{3}{2}\right) \tag{h}$$

式中 δ_y 係從方程式(b)得出。當 $P/P_y = 3/2$ 時，撓度 $\delta/\delta_y = 20/9$。載重撓度圖如圖 9－19 所示。

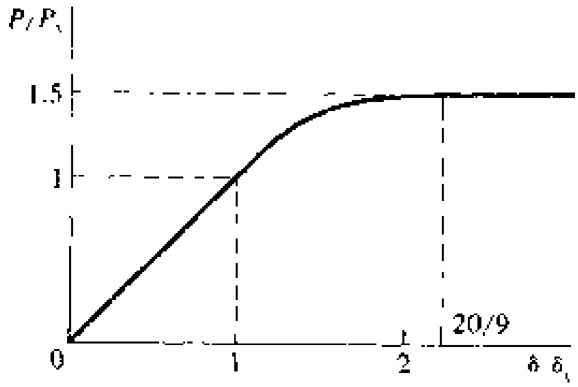


圖 9．19　圖 9．17 懸臂樑載重對撓度圖

9．7　非彈性彎曲

在以上四節中，曾詳細處理過彈性－塑性材料這個特殊情況。因為這類材料很準確的代表結構鋼的行態，故對於工程師們非常重要。現在再將其考慮到更為普遍的情況即非彈性彎曲（ inelastic bending ）。在此種情況的材料，具有如圖 9－20 所示 *AOB* 曲線的應力－應變圖。讓我們考慮一根矩形截面樑（圖 9－21 ），其中 h_1 及 h_2 分別為從中性軸至該樑底及樑頂間的距離。

為找出矩形樑的中性軸，可利用方程式（ 9－1 ）及（ 9－3 ）。從方程式（ 9－1 ）得：

$$y = \rho\epsilon \qquad dy = \rho d\epsilon \tag{a}$$

代入方程式（ 9－3 ），得：

$$\int \sigma\,dA = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma b\,dy = \rho b \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma\,d\epsilon = 0$$

該式中 ϵ_1 及 ϵ_2 分別為樑底及樑頂的應變（見圖 9－1 ）。注意，這些應

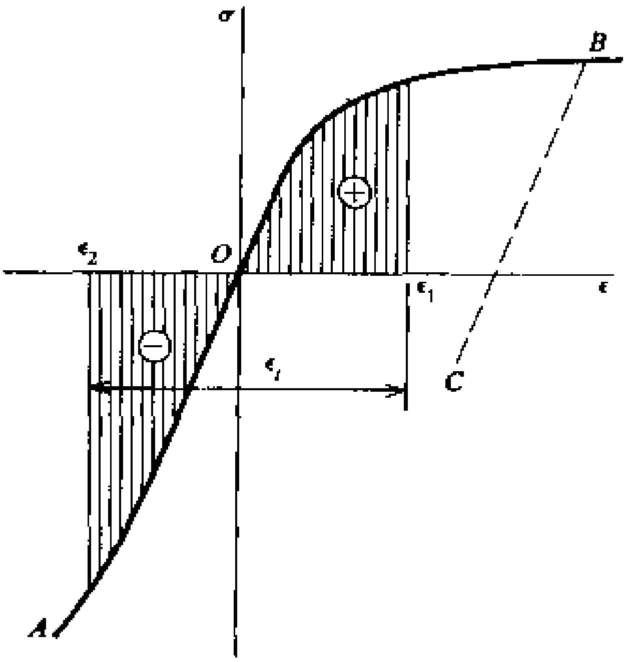


圖 9．20 應力－應變圖

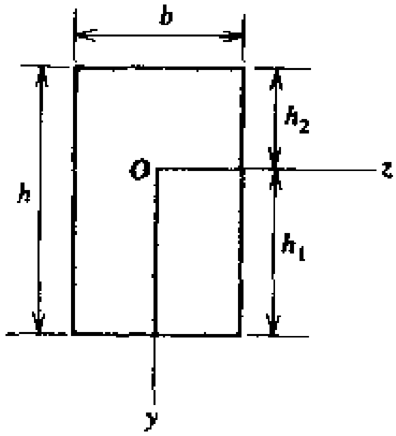


圖 9．21 矩形截面之非彈性樑

變已在圖 9 － 20 所示的應力－應變曲線內指出。在上列的方程式，表示中性軸的位置是使：

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \, d\epsilon = 0 \tag{9-21}$$

現在用 ϵ_t 表示樑內最大正負應變的絕對值和，即

$$\epsilon_t = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \kappa h_1 + \kappa h_2 = \kappa h \tag{9-22}$$

爲解方程式（ 9 － 21 ）應用圖 9 － 20 的 *AOB* 曲線，並在水平軸線上標記出長度 ϵ_t 的位置，使該圖的拉力面積等於該圖的壓力面積。照這樣做，將獲得最外纖維上的應變 ϵ_1 及 ϵ_2；這兩種應變，將相當於總應變 ϵ_t 的某一假設值。於是與其相當的中性軸位置，很容易從方程式（ 9 － 2 ）求得：

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\epsilon_1}{-\epsilon_2} = \left|\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right| \tag{9-23}$$

因爲應變 ε 係與量自中性軸距離成一次比者（見圖 9 － 1 c ）。由此可以斷言，若將距離 *h* 代替 ϵ_t，則在圖 9 － 20 內的應力－應變圖 *AOB*，可代表橫越樑高的彎應力的分佈。因此，對於 ϵ_t 的一個假設值，現在已能明瞭，其中性軸的位置及越過樑高的應力及應變。從方程式（ 9 － 22 ），又

可明瞭樑的曲度。

下一步驟，利用方程式（9－4）求出所加的彎力矩M。將方程式(a)代入、可使方程式（9－4）化成下列的形式：

$$\int \sigma y \, dA = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma y b \, dy = \rho^2 b \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon \, d\epsilon = M \tag{b}$$

從方程式（9－22），可看出$\rho = 1 / \kappa = h / \epsilon_t$將方程式(b)改寫成下式：

$$M = \frac{bh^2}{\epsilon_t^2} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon \, d\epsilon \tag{9-24}$$

在上式中的積分，代表在圖9－20 應力－應變曲線下側的面積（即斜線部分）對垂直軸所取的第一力矩。因此，由於求得在每一個別情形中的積分值，並將其代入方程式（9－24），可求出彎力矩M。就一個假設的ϵ_t值，可完成一根受純彎曲樑的分析工作。

對於其他的ϵ_t值，可重複此整個過程；每個如此的計算，將提供一個曲度值及一個相當的彎力矩。從這些數據，即可點繪力矩－曲度圖（圖9－22）。如此圖示，係爲個別應力－應變曲線，並爲個別的矩形截面樑而繪出的。

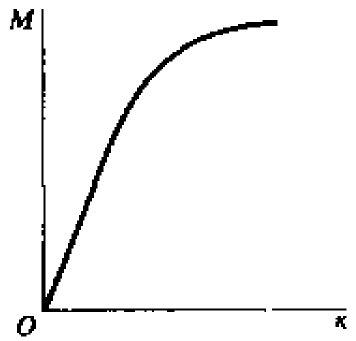


圖9．22　非彈性彎曲之力矩－曲度圖

若應力－應變圖的拉力部分及壓力部分相同，則計算工作可以簡化。因爲在那時中性軸將通過該矩形截面的形心。下列的方程式可以適用於此種情形：

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2} \tag{9-25}$$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{\epsilon_t}{2} \tag{9-26}$$

$$M = \frac{2bh^2}{\epsilon_t^2} \int_0^{\epsilon_1} \sigma \epsilon \, d\epsilon \tag{9-27}$$

從這幾個方程式中的最後一個，可爲任何一個假設的 ϵ_t 值，算出 M 値，在此項步驟之後，即可由方程式（ 9 － 22 ）求得曲度。

在一根直線型彈性材料矩形樑的特殊情形中，將有 $\sigma = E\epsilon$ 值可以利用，從方程式（ 9 － 27 ）可得：

$$M = \frac{2bh^2}{\epsilon_t^2}\int_0^{\epsilon_1} E\epsilon^2\, d\epsilon = \frac{2bh^2 E\epsilon_1^3}{3\epsilon_t^2} \tag{c}$$

現在再將 $\epsilon_t = 2\epsilon_1$ 及 $\sigma_{max} = E\epsilon_1$ 代入方程式(c)內，得

$$M = \frac{\sigma_{max}\, bh^2}{6} = \sigma_{max} S \tag{d}$$

式中的 σ_{max} 爲樑底的應力。將 $\epsilon_t = 2\epsilon_1$ 及 $\epsilon_1 = \kappa h/2$ 代入方程式(c)即得

$$\kappa = \frac{M}{Ebh^3/12} = \frac{M}{EI} \tag{e}$$

方程式(d)及(e)爲常見的直線型彈性彎曲方程式。

代替矩形截面，另用其他形狀的截面，設在該截面上的寬度 b 沒有變化（見圖9 － 1 b ）。於是代替方程式（ 9 － 21 ）及（ 9 － 24 ），將得到下列的方程式：

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma b\, d\epsilon = 0 \tag{9-28}$$

$$M = \frac{h^2}{\epsilon_t^2}\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma b\epsilon\, d\epsilon \tag{9-29}$$

在兩個方程式內，將寬度 b 一律放在積分符號之後，作爲一個特殊的例。

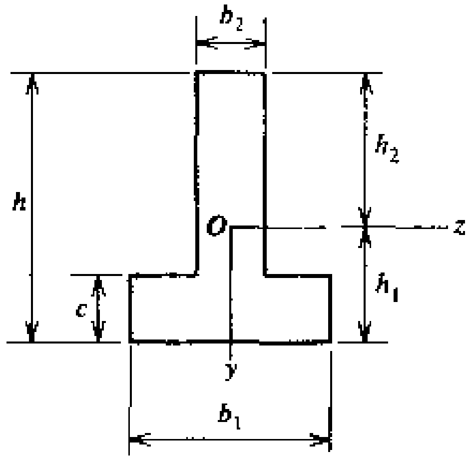


圖 9 . 23　T 型截面之非彈性樑

讓我們考慮一個 T 型截面（圖 9 － 23 ）。用 ϵ_s 表示在腹鈑及翼緣接合點上的應變，將上面的方程式寫成如下的形式：

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3}\sigma\,d\epsilon+\int_{\epsilon_3}^{\epsilon_1}\sigma\frac{b_1}{b_2}\,d\epsilon=0 \tag{f}$$

$$M=\frac{b_2h^2}{\epsilon_t^2}\left[\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3}\sigma\epsilon\,d\epsilon+\int_{\epsilon_3}^{\epsilon_1}\sigma\frac{b_1}{b_2}\,\epsilon\,d\epsilon\right] \tag{g}$$

從以上兩個方程式，可以看出，在相當於截面的翼緣區間內繪出應力－應變圖的縱標，必須以 b_1/b_2 的比值將其放大（見圖9－24）。在決定中性軸位置時，應照以前的情形，並在圖9－24 的水平軸線上，標出假設的 ϵ_t 距離，使兩塊已劃線的面積在數值上相等。自然其位置必須用試誤法求出。對於每個試算位置，在腹鈑及翼緣接合點上的應變 ϵ_3，由下列的方程式獲得：

$$\frac{\epsilon_1-\epsilon_3}{\epsilon_t}=\frac{c}{h} \tag{h}$$

照樣可進行可獲得在最外纖維的應變 ϵ_1 及 ϵ_2。

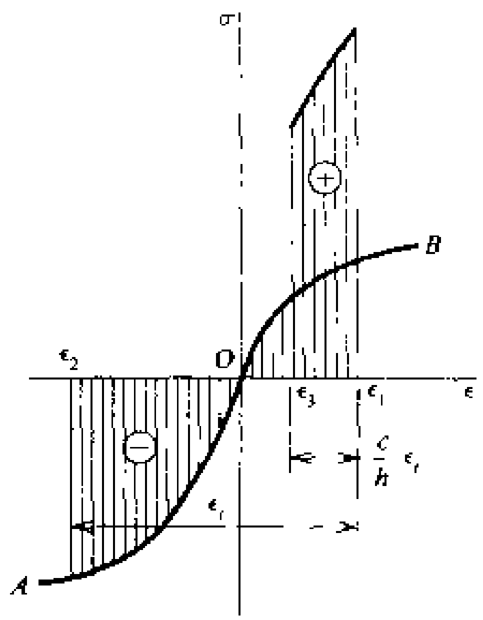


圖 9－24　修正之應力－應變圖

在方程式(f)找出中性軸的位置之後，現在即能從方程式(g)求出彎力矩。我們注意到，在括號內的兩個積分，係代表圖9－24 內的畫線面積，在經過原點 0 之垂直軸線上所取的第一力矩。由於算出這個第一力矩，並將其代入方程式(g)內，可得到相當於 ϵ_t 假設值的彎力矩。從方程式（9－22）也可求出與其相當的曲度 κ，並可為這個 T 型截面標作力矩－曲度

圖。一種類似的過程可應用於寬翼緣樑。

以上所述，關於一根受非彈性彎曲樑的分析程序，頗具一般性；且可應用於任何一種應力 - 應變圖及任何形狀的截面。但有時應力 - 應變曲線可用一個分析式子予以約估；在這種情形，可能直接計算來決定應力、應變及曲度。這種辦法，僅能在比較簡單的情形中始有可能。如在下面所舉的矩形截面樑例題內所說明者。

【例題】一根矩形截面樑（見圖9 － 21 ）其製作材料具有由兩條線所組成的應力 - 應變圖如圖 9 － 25 所示。其拉力的彈性模數爲 E_1 及壓力的彈性模數爲 E_2 。於是得成立

$$\sigma = E_1\epsilon \qquad \epsilon \geq 0 \tag{i}$$

$$\sigma = E_2\epsilon \qquad \epsilon \leq 0 \tag{j}$$

該樑假設爲承受正彎力矩M 。分析目的，爲找出中性軸的位置，獲取力矩 - 曲度式求出樑內的最大應力及最大應變。

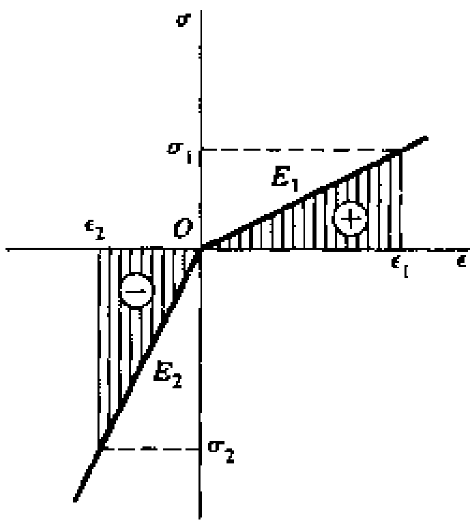


圖 9 - 25　例題，由兩條直線所組成之應力 - 應變圖

讓我們分別用 ϵ_1 及 ϵ_2 代表樑底及樑頂的應變，與其相當的最大應力爲 σ_1 及 σ_2 。這幾個應力及應變已在圖 9 － 25 內指出。爲要找出中性軸的位置，我們知道，在應力 - 應變曲線下的兩塊畫線面積必須相等，於是得：

$$\frac{\sigma_1\epsilon_1}{2} = \frac{\sigma_2\epsilon_2}{2} \tag{k}$$

從(l)及(j)兩個方程式，可知

$$\sigma_1 = E_1\epsilon_1 \qquad \sigma_2 = E_2\epsilon_2 \tag{l}$$

同時也有下列的關係：

$$\epsilon_1 = \kappa h_1 \qquad \epsilon_2 = -\kappa h_2 \tag{m}$$

將以上的四個方程式代入方程式(k)內，可得：

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2 \tag{n}$$

成爲第一個聯繫 h_1 及 h_2 的方程式。此外，尙有下列的方程式可用：

$$h = h_1 + h_2 \tag{o}$$

現在已可由聯立方程式(n)及(o)求得 h_1 及 h_2 兩個距離，結果得：

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}} \qquad h_2 = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}} \tag{9-30}$$

由此中性軸的位置可得確定。

下一步驟，轉至方程式（9－24），用以計算彎力矩。將方程式(i)及(j)代入該方程式內而得：

$$M = \frac{bh^2}{\epsilon_t^2}\left[\int_{\epsilon_2}^{0} E_2\epsilon^2\, d\epsilon + \int_{0}^{\epsilon_1} E_1\epsilon^2\, d\epsilon\right]$$

此式將化爲

$$M = \frac{bh^2}{3\epsilon_t^2}\left[-E_2\epsilon_2^3 + E_1\epsilon_1^3\right] \tag{p}$$

應變 ϵ_1 及 ϵ_2 將由方程式(m)與曲度發生聯繫；將方程式（9－30）代入方程式（m）內，得：

$$\epsilon_1 = \kappa h\frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}} \qquad \epsilon_2 = -\kappa h\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}$$

又應變 $\epsilon_t = \kappa h$（見方程式9－22）。現在可將這些 ϵ_1、ϵ_2 及 ϵ_t 等式代入方程式(p)內，獲得

$$M = \frac{4E_1E_2I\kappa}{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2} \tag{q}$$

在式中 $I = bh^3/12$。最後引入下列的符號：

$$E_r = \frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2} \tag{9-31}$$

因此，方程式(q)化為$M = E_r I k$，而曲度式成為：

$$\kappa = \frac{M}{E_r I} \tag{9-32}$$

E_r 這個數量，稱為降低彈性模數（reduced modulus of elasticity），且永遠具有一個合於E_1及E_2間的值。當兩個模數相同，且均等於E的特殊情形時，E_r也將等於E。

在樑的最外纖維的應力及應變，現在可很容易以彎力矩為項求出。利用求ϵ_1及ϵ_2的(m)方程式，並將曲度方程式（9－32）代入得：

$$\epsilon_1 = \frac{Mh_1}{E_r I} \qquad \epsilon_2 = -\frac{Mh_2}{E_r I} \tag{9-33}$$

下一步驟，從應力－應變方程式（方程式 l ）得

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{I}\frac{E_1}{E_r} \qquad \sigma_2 = -\frac{Mh_2}{I}\frac{E_2}{E_r} \tag{9-34}$$

至此該樑的分析，已完全解決。

撓度

一根靜定非彈性樑的撓度，可在力矩－曲度圖求得。作這種計算工作的技巧，已在9.6節內討論過。但在一根靜不定樑的情況中，分析時將比較複雜。原因我們不能應用重疊原理以求贅餘反力之故。就一個簡單的例題，以說明如何着手之法。

假設有一根非彈性樑，其一端為固定端另一端為簡支。在固定支承處的反力矩，可用試誤法按照下面所述方式求得。先為這個力矩假設一個試算值，並作與其相當的彎力矩圖。下一步驟，利用力矩－曲度的關係畫出該樑的曲度圖。從曲度圖可算出固定支承上的旋轉角。若贅餘力矩的試算值選擇適當，則此角將等於零。由於重複試算，在最後可達到該贅餘力矩的真值。同樣的技巧可應用於分析任何一種靜不定樑。

9.8 殘餘應力

當一根樑受非彈性的彎曲之後，其所承受的載重未被移去，則在樑上將發生永久變形，而該樑將不會再恢復到原來形狀。那些在樑上被加的應力超出其彈性限的纖維，均具有永久變形，並將阻止受應力的彈性纖維，在卸除載重之後恢復到原來的長度。因此有若干殘餘應力（residual stresses）將存在於樑內。

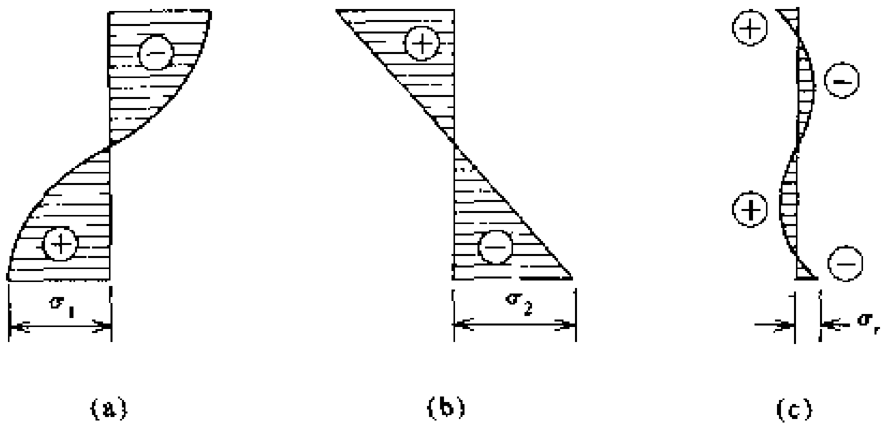


圖 9・26 在非彈性彎曲內之殘餘應力

若已知由最初的非彈性彎曲所引起的應力，則決定在樑內的殘餘應力並不困難。假設由一個正彎力矩在樑內所引起的應力分佈，將如圖 9 －26 a 所示的形狀。爲簡單起見，假設樑的截面爲具有兩個對稱軸，材料在拉力及壓力兩方面均一律具有相等的性質；並自然的其中性軸位於樑高的中間，而最大拉應力與最大壓應力在數值上亦屬相同（均等於σ_1）。當這根樑卸除載重之後，即與受到一個等於M的負彎力矩後，該樑的彎曲相等。在卸除載重時，樑的材料行態係假設爲彈性的，並遵守胡克氏定律，如圖 9 － 20 內所示應力 - 應變圖上的BC 線。因此，在卸除載重時，疊加在上面的載重分佈作直線型（圖 9 － 26 b）。因此這些應力可從公式$\sigma = M_y / I$ 獲得。最大的卸重應力爲$\sigma_2 = M / S$。

最初的非彈性彎應力及直線型的卸重應力重疊加在一起，即爲在載重被移去後，樑內所留的殘餘應力。這些殘餘應力已在圖 9 － 26c內繪出，並且很容易的視爲畫於圖 9 － 26 a 及 b 內各應力的代數和將其算出。例如在樑底邊緣上殘餘應力爲$\sigma_r = \sigma_1 + \sigma_2$。關於所畫的情況，因$\sigma_2$爲負號且其數值大於$\sigma_1$；因此$\sigma_r$ 也將爲一負值。

現在，假如將原來的正彎力矩M重行加在圖 9 － 26c的具有殘餘應力的樑上。該樑的每一根纖維仍然將保持爲彈性的，且遵照胡克氏定律一直到其應力達到在卸重發生之前原來的數值爲止。因此，現在被加的力矩M，將產生具有一種直線型關係的應力，而該樑的行態將爲一種直線型的彈性樣式，只要所加的力矩並未超出M。由於M所引起的應力將與圖 9 －26 b 內所示者相同，但方向相反，而最後的應力將如圖 9 － 26a的形狀。因此，最初非彈性彎曲的影響，加上由於卸去載重而隨伴發生的殘餘應力，

倘若彎曲的方向不變，而力矩又未超出原來的力矩時，該樑所產生的型態將爲一種直線型的彈性樣式。

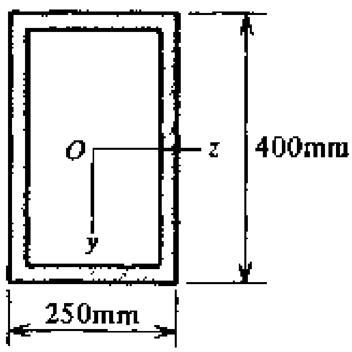
如在本節內所暗示者，殘餘應力係在該結構加載之後又復在卸去載重之後所剩下的應力。另外一種殘餘應力，係存在於當輥壓製成的結構型鋼，因製造程序而產生者。由於輥壓操作及截面加熱及冷却之不能均勻一致，應力將殘存在結構型鋼之內，當由生產者手中被接收過來時。此種應力常被稱爲殘餘應力或最初應力（ initial stresses ），其值可能大至 70 或 $100 N/mm^2$。關於在結構型鋼內殘餘應力的資料，可參見參考書 9－19至9－21。關於在彎曲時的殘餘應力的參考資料，包括用試驗方法求殘餘應力之法等，則詳載於參考書 9－22及9－23 內。

習　題

第 9.3 節內的習題應根據彈性－塑性材料的假設作解答。

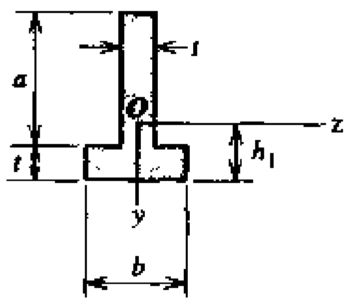
輥壓型鋼截面的塡角面積在計算塑性模數時一律免計。

9.3－1　試決定圖內的空心箱型截面的塑性力矩 M_p，若 $\sigma_y = 250 N/mm^2$ 及其壁厚爲 25 mm。



習題圖 9-3-1

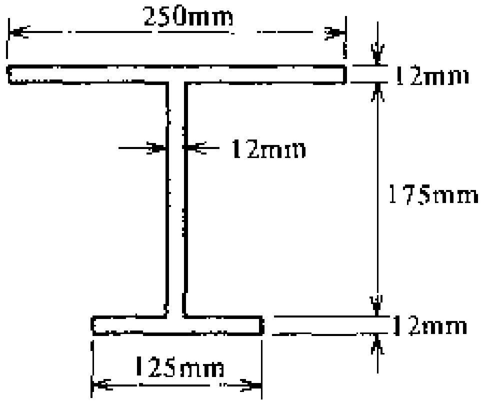
9.3－2　試找出圖內 T－型截面在十足塑性狀況時的中性軸位置，並求出塑性力矩 M_p 值。若 $a = 200 mm$，$b = 150 mm$，$t = 50 mm$，及 $\sigma_y = 250 N/mm^2$。



習題圖 9-3-2

9.3－3　計算 305 × 102 × 25kg UB 截面的塑性模數 Z（見附錄C）。

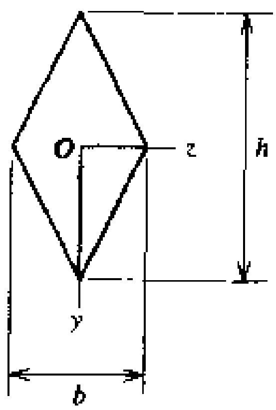
9.3－4　一個不對稱的寬翼緣鋼樑（屈伏應力等於 240N/mm²）其截面如習題圖 9.3－4 所示。問其塑性力矩 M_p 爲若干？



習題圖 9.3-4

9.3－5　試決定一根圓形截面樑的形狀因數 f。

9.3－6　試決定一根菱形截面樑的形狀因數 f。（見習題圖 9.3－6）



習題圖 9.3-6 及 9.3-11

9.3－7　(a)試決定一根圓形管截面的形狀因數 f，該截面具有的外半徑爲 r_1 及內半徑爲 r_2，(b)在管壁很薄的特殊情形時，其形狀因數 f 爲若干？

9.3－8　試決定 406 × 140 × 46kgUB截面的形狀因數 f（見附錄C）。

9.3－9　一根矩形截面樑（b ＝寬度，h ＝高度）係由彈性－塑性材料作成，承受一彎力矩 M，大於屈伏力矩 M_Y 但小於塑性力矩 M_p。試爲自中性軸至塑性區的距離 e 獲得一個公式（見圖 9－7）。

9.3－10　一根 356 × 127 × 39kgUB 截面（$\sigma_Y = 250 \mathrm{N/mm^2}$，$E = 200 \mathrm{kN/mm^2}$）承受一個在整個翼緣內產生塑性屈伏，但腹鈑內仍

保持彈性的彎力矩M。(a)求出力矩M，(b)求出曲度κ。

9.3－11　試爲一根具有菱形截面的彈性－塑性樑導出一個方程式以表示M/M_y及κ/k_y間的聯繫（見習題圖9.3－6）。

第9.4節內的習題應依照彈性－塑性材料的假設作解答。

9.4－1　一根長度爲L的簡支樑支承一項均佈載重。試決定在樑中心塑性區的長度L_p，若最大彎力矩等於塑性力矩M_p。

9.4－2　試爲一根矩形截面樑及$M_{max}=1.46\,M_y$這種情況，按比例尺點繪如圖9－9。（計算數目如足夠，即能準確畫出塑性區彎力矩圖及曲度圖的邊界）。

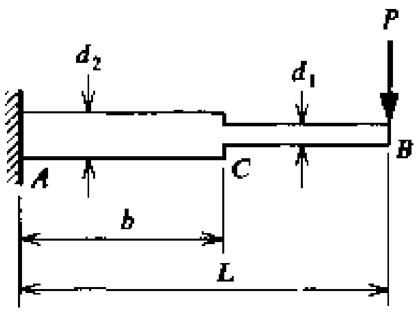
第9.5節內的習題應依照其彈性－塑性材料的假設作解答。

9.5－1　試爲下列各項決定其極限載重P_u：(a)一根長度爲L的懸臂樑在其自由端有一集中載重P；及(b)一根長度爲L的簡支樑負荷兩個集中載重P距兩端各爲$L/3$。

9.5－2　一根簡支樑負均佈載重作用於整個跨徑上，若$L=1.2$m，$\sigma_y=220$ N／mm²，及截面爲80mm×80mm，其極限載重爲何？

9.5－3　一根截面爲圓形之懸臂樑AB，具兩種直徑d_1及d_2如習題圖9.5－3所示。有一載重P作用於其自由端。(a)試決定直徑的比值（d_1/d_2），以便在載重達到極限值P_u時，將有塑性鉸同時形成在截面A及C處，(b)求b距離的長度，使具有可支承極限載重P_u的最輕樑。

9.5－4　一根類似圖9－12a所示一端支着的懸臂樑，在距其固定端



習題圖9.5－3

距離b處支承一集中載重P，(a)試計算該樑的極限載重P_u，(b)假設該載重可被安置在順沿該樑跨徑任何的位置上。爲使該樑具有最嚴重的載重情況。試問b的距離應爲若干？

9.5－5　一根固定端樑支承一個集中載重在中點。(a)求出極限載重P_u

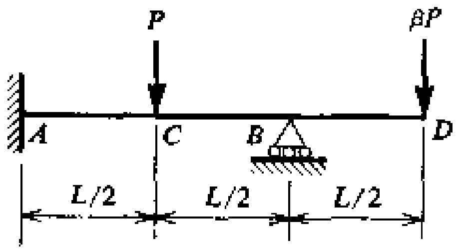
，(b)樑的極限載重對其屈伏載重的比值 P_u/P_y 為若干？

9.5－6　一根固定端樑負荷均佈載重 q。(a)其極限載重 q_u 為何？(b)這根樑的極限載重對其屈伏載重的比值 q_u/q_y 為若干？

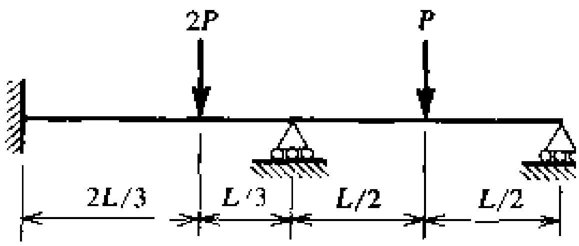
9.5－7　試為圖 9－14a 內所示之樑決定其極限載重 P_u。若該樑的兩端均為固定。

9.5－8　習題圖 9.5－8 內的樑在 A 點具有一個固定支承，在 B 點具有一個簡支承。一個載重 P 作用於截面 C 處，另一載重 βP 則作用於 D 端，式中的 β 為一個正的數值因數。(a)試求出該樑的極限載重 P_u，(b)當 β 值為若干，在樑上的全部極限載重為最大？

9.5－9　試為雙孔樑如習題圖 9.5－9，確定其極限載重 P_u。

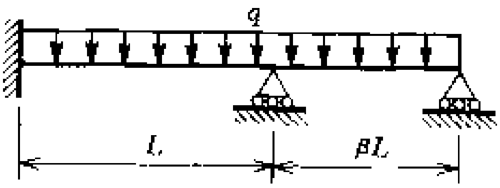


習題圖 9.5-8



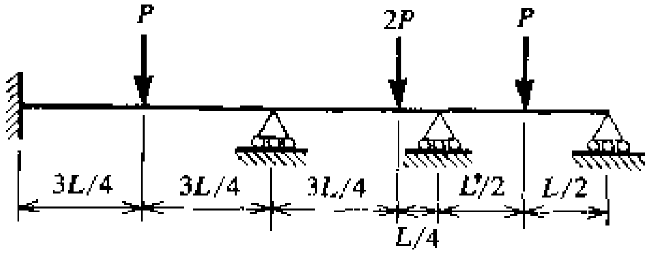
習題圖 9.5-9

9.5－10　試為附圖內的雙孔樑求其極限載重 q_u，若(a)因數 $\beta = 2/3$，及(b)因數 $\beta = 1$。



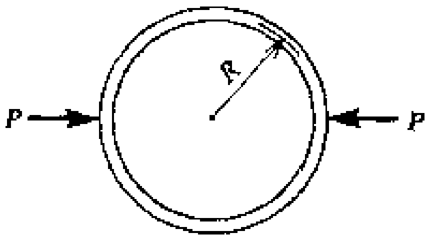
習題圖 9.5-10

9.5－11　試為附圖內的三孔連續樑確定其極限載重 P_u。

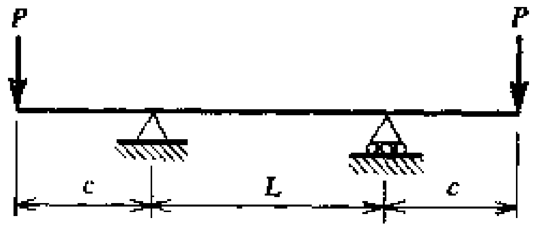


習題圖 9.5-11

9.5－12　試為半徑R之薄環承受兩個力如習題圖9.5－12 內的情況，求出其極限載重P_u。



習題圖 9.5-12



習題圖 9-6-1

9.6－1　一根在兩端具懸出部份之樑，承受兩個P力如習題圖9.6－1所示。該樑係由彈性－塑性材料作成，並具有一個矩形截面。試為該樑中點的撓度導出下列的公式：

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\frac{P}{P_y} \qquad \left(0\leq\frac{P}{P_y}\leq 1\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\left(3-\frac{2P}{P_y}\right)^{-1/2} \qquad \left(1\leq\frac{P}{P_y}\leq\frac{3}{2}\right)$$

在式中$\delta_y=P_y cL^2/8EI$ 及$P_y=M_y/c$ 試根據P/P_y對δ/δ_y按比例尺繪出一條曲線。

9.6－2　一根長度為L截面為矩形的簡支樑，負荷一個集中載重於其中點。該樑係用彈性　塑性材料所做成。試為其支承處的旋轉角θ及在中點的撓度δ導出下列的公式：

$$\frac{\theta}{\theta_y}=\frac{P_y}{P}\left[3-2\sqrt{3-\frac{2P}{P_y}}\right] \qquad \left(1\leq\frac{P}{P_y}\leq\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\left(\frac{P_y}{P}\right)^2\left[5-\left(3+\frac{P}{P_y}\right)\sqrt{3-\frac{2P}{P_y}}\right] \qquad \left(1\leq\frac{P}{P_y}\leq\frac{3}{2}\right)$$

式中$\theta_y=P_yL^2/16EI$，$\delta_y=P_yL^3/48EI$，及$P_y=4M_y/L$（關於這兩個公式的曲線，見圖9－18及9－19）。

9.6－3　一根懸臂樑的截面為矩形長度為L，若該樑支承一項每單位長度強度q的均佈載重，並為彈性－塑性材料造成。試為在其自由端的旋轉角θ及撓度δ導出下列的式子：

$$\frac{\theta}{\theta_y}=\sqrt{\frac{9q_y}{2q}}\left[\arcsin\sqrt{\frac{2q}{3q_y}}-0.4839\right] \qquad \left(1\leq\frac{q}{q_y}\leq\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\frac{q_y}{q}\left[3-2\sqrt{3-\frac{2q}{q_y}}\right] \qquad \left(1\leq\frac{q}{q_y}\leq\frac{3}{2}\right)$$

在式中 $\theta_y = q_y L^3/6EI$，$\delta_y = q_y L^4/8EI$，及 $q_y = 2M_y/L^2$。且根據 q/q_y 對 θ/θ_y 及 q/q_y 對 δ/δ_y 各按比例尺繪出其曲線。

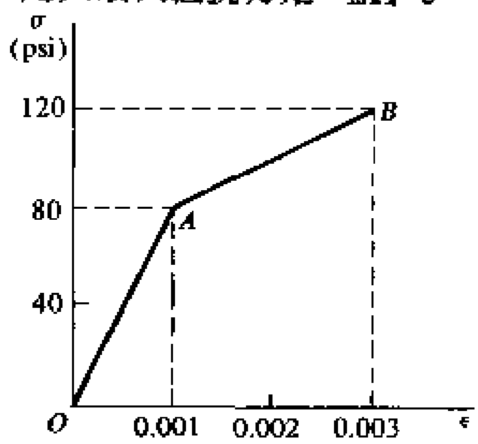
9.7－1　一根矩形截面樑（$b = 75$mm，$h = 150$mm）係由某種材料做成，該項材料具有的應力－應變曲線，將由表 9－1 內的數據規定之。拉力及壓力之應力－應變曲線相同。該樑受到一個彎力矩 M 而彎曲，此彎力矩將產生最大應力為 7.3 N/mm² 試計算力矩 M 之值。

表 9－1　習題 9.7－1 用資料

應力 σ N/mm²	應變 ϵ 10^{-6}
0	0
5.0	16
5.5	25
6.2	42
7.0	70
7.5	113
8.0	183

9.7－2　一根矩形樑寬 150mm 及高 300mm 承受一個彎力矩 $M = 18$ kNm 樑用材料，在拉力方面具有一個彈性模數 $E_1 = 9$ kN/mm²，在壓力方面具有一個彈性模為 $E_2 = 25$ kN/mm²（見圖 9－25）。(a) 試找出該樑中性軸的位置（見圖 9－21）(b) 試決定樑內的最大拉應力及最大壓應力，(c)計算該樑的曲度半徑。

9.7－3　一根樑係由一種易碎的脆性材料所做成，其所具的拉力應力應變圖可用兩條直線 OAB 表示，如圖所示。在 B 點發生斷口，壓力的應力－應變圖與拉力的應力－應變圖同。樑的截面為矩形，100mm 寬及 300mm 高。試為該樑定其最大抵抗力矩 M_{max}。



習題圖 9-7-3

9.7－4　一根矩形截面樑（寬度為 b ，高度為 h ），係由某種材料做成，其拉力應力－應變圖可由下列方程式表示之

$$\sigma = B_1\epsilon - B_2\epsilon^2$$

在式中 B_1 及 B_2 為常數。其壓力的應力－應變圖與拉力圖相同。若最大的應變為 ϵ_1 ，試為該樑之抵抗力矩 M 導出一個公式。

9.7－5　一根樑的材料，其拉力的應力－應變定律，係假設呈 $\sigma = B\epsilon^n$ 形式，在式中 B 及 n 為常數（ $0 \leq n \leq 1$ ）。應力－應變圖屬於壓力者與拉力者相同。樑的截面為矩形，其寬度為 b 高度為 h ，(a)試為這根樑的力矩－曲度關係導出下列公式：

$$M = \frac{bh^{n+2}B\kappa^n}{2^{n+1}(n+2)}$$

(b)試為該樑內的最大應力導出下列的公式：

$$\sigma_1 = \frac{Mc}{I}\frac{n+2}{3}$$

在式中 $c = h/2$ 及 $I = bh^3/12$ ，(c)試為該樑內之應力 σ 距中性軸距離 y 導出下列的公式：

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left(\frac{2y}{h}\right)^n$$

點繪一條曲線以表示各種不同 n 值時，在樑內的應力分佈。（為方便起見，點繪 σ/σ_1 對 $2y/h$ 的關係，並選用 $n = 1$ 、 $1/2$ 、 $1/4$ 及 0 ）。(d)對於在上面所得的一切結果，檢討並解釋在 $n = 1$ 及 $n = 0$ 時的特殊情況。

9.7－6　自一根矩形（寬度 b 及高度 h ）樑的中性軸至其底面的應力，係按下列方程式分佈　$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^m$

在上式中， σ_1 為底面上的最大應力， y 為自中性軸向下測量的距離， m 為一個常數（ $m \geq 1$ ）。中性軸係在樑高的中點，上半部樑的應力分佈與下半部同。(a)試為該樑求出其力矩 M ，(b)點繪一條曲線表示在樑內各種不同 m 時的應力分佈。（為方便起見，點繪 σ/σ_1 對 $2y/h$ 的關係，並選用 $m = 1$ 、 2 、 4 及 10 ）。

9.7－7　一根長度為 L 之懸臂樑，在其自由端支承一個載重 P 。樑的截面為矩形，其寬度為 b ，高度為 h 。該樑所用材料的應力－應變曲線，可由方程式 $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$ 提供，在該式中 B 為一常數。拉力與壓力的應力－

應變曲線相同。試求該樑自由端的旋轉角 θ 及撓度 δ 。

9.8－1　一根矩形截面樑，係用一種彈性－塑性材料做成，具有屈伏應力 σ_y 。該樑受到一個等於塑性力矩 M_p 的正號彎力矩。其後這個力矩被移去。(a)試畫一圖用以表示樑的殘餘應力，(b)在該樑頂面上的殘餘應力爲何？(c)在該樑截面中點的殘餘應力爲何？(d)若帶有殘餘應力之樑，重行承受一個正彎力矩，這個能加在該樑上的力矩並使該樑仍能保持其直線型彈性行態的最大值爲何？在最初載重時，該力矩對屈伏力矩之比值爲何？

9.8－2　在一根截面成雙向對稱（ doubly symmetric ），由屈伏應力爲 σ_y 的一種彈性－塑性材料所成之樑，加上一個正彎力矩。該力矩 M ，係介於該樑的屈伏力矩 M_y 及塑性力矩 M_p 之間。當力矩 M 被移去時，一個等於 $\beta\sigma_y$ 的拉力殘餘應力經查出存在於該樑最高的頂面上。問(a)力矩 M 值爲若干？(b)數值因數 β 的限界爲若干？

第十章 立　　柱

立柱的選擇，常爲結構設計中極困難的部份。因爲立柱的失敗經常會有極不幸的結局，而且，因爲立柱之行態複雜，故比彎曲狀態或扭力狀態中的桿件更難設計。假如立柱的長與其寬度相比較大時，將失敗於屈挫（buckling）。亦即可能失敗於彎曲與橫向撓曲，而非失敗於直接壓力。屈挫狀態可能是彈性的或非彈性的，視立柱的細長度（slenderness）而定。在下列各節中，主要討論其行態爲彈性的、長而且細的立柱。

10．1 負偏心載重之立柱

爲了要研究立柱的行態，先開始考慮一根細長的立柱，承受偏心的軸向力 P（圖 10－1）。立柱係簡支在其兩端，偏心距係自橫截面的重心量至軸向力的作用線。假定 xy 平面係該柱的對稱平面，依觀察得知，該

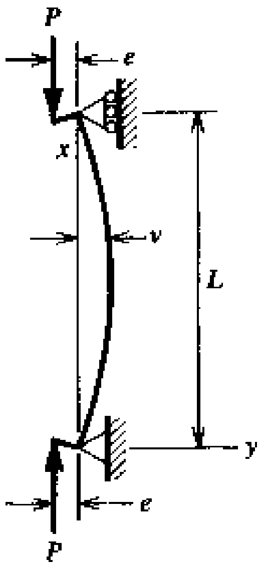


圖 10．1　具有偏心軸向力之立柱

柱將在同一平面內發生撓曲。

在距立柱下端 x 距離處，立柱內的彎力矩爲

$$M = P(e + v) \tag{a}$$

此處 v 爲立柱在 y 方向的橫向撓度。在方程式(a)內，彎力矩的符號照以前爲定樑撓度（見 6.1 節）時採用的慣例。圖 10 － 1 所示立柱的撓曲線方程式，於是可寫成（見方程式 6 － 9 a ）：

$$EIv'' = -M = -P(e + v) \tag{b}$$

茲引入記號

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{10-1}$$

將方程式(b)改寫成下列之形式

$$v'' + k^2 v = -k^2 e \tag{c}$$

此方程式，爲具一個常數係數的線形微分方程式，其解包含兩個部份：(a)將等號右邊置爲零，而得相當的齊次方程式（ homogeneous equation ）解，及(b)相當於方程式(c)實際的右邊之特解（ particular solution ）。齊次方程式之解，有時稱爲補充解（complementary solution ），爲

$$v_H = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

此處 C_1 與 C_2 ，係由限界條件估計所得的任意常數，其特解爲

$$v_P = -e$$

所以，方程式(c)的一般解，等於 $v_H + v_P$ 而爲

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e \tag{d}$$

將(d)式代入方程式(c)即可證明其無誤。

從桿件兩端的條件，可求得積分的兩個常數。這些條件是

$$v = 0 \quad 在 \quad x = 0 \quad 及 \quad x = L \quad 時$$

將這些限界條件應用到方程式(d)，得

$$C_2 = e \qquad C_1 = \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL} = e \tan \frac{kL}{2}$$

因此，撓度曲線的方程式爲

$$v = e\left(\tan\frac{kL}{2}\sin kx + \cos kx - 1\right) \qquad \text{(e)}$$

若已知偏心距 e 與載重 P ，由方程式(e)算得立柱的撓度。

將 $x = L/2$ 代入方程式(e)，即可求得立柱中點的撓度爲

$$\delta = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right) \qquad \text{(10-2)}$$

有一特殊情況,可由該方程式注意到。假如 $P = 0$（意即 $k = 0$ 及 $\sec kL/2 = 1$ ），撓度 δ 將爲零。假如現在選擇一個偏心距 e 的特別值 e_1，即能由方程式（10－2）繪出一個載重 - 撓度曲線（ P 對 δ ）。該曲線如圖 10－2 所示。由此得知，當載重 P 增加時，撓度 δ 亦在增加，其間的關係呈非直線形的。假如選用一個新值 e_2（ e_2 大於 e_1 時），則其撓度將相當地增大。

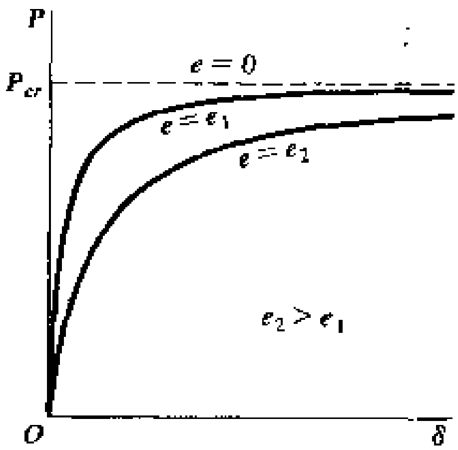


圖 10．2　示於圖 10．1 內立柱的載重 - 撓度圖

由圖 10－2 可知，當載重 P 達到某一臨界值時，撓度的增加即爲無限制。此一臨界載重（ critical load ）值，以 P_{cr} 表示，當 $kL/2 = \pi/2$ 時，式中的正割（ secant ）一項將變爲無限大。因此可從觀察得知，當 $kL = \pi$ 時，撓度 δ 變爲無限大。由此可得下列的 P 值（見方程式 10－1）：

$$P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{(10-3)}$$

當考慮偏心距爲零的情況，可得同樣結果的臨界載重。假如 $e = 0$ ，凡 $kL/2$ 值小於 $\pi/2$ 者，由方程式（10－2）所得的撓度 δ 皆爲零。因爲在

所有此類的例子內，第二項皆爲有限值。因此，當P小於P_{cr}時，其撓度仍爲零。但當$P=P_{cr}$而$kL/2=\pi/2$時，撓度δ將不受方程式(10－2)之限制而得任何變動值。此種狀況，被標示在載重－撓度圖(圖10－2)上$e=0$的水平虛線。

當討論圖10－2所示的曲線時，必須牢記在心的是，方程式(10-2)的誘導，係基於若干小量撓度與線形彈性行態的假設。所以撓度δ祇有在臆測的觀念內加以變大。假如撓度皆屬不小，必須用以前在6.1與6.2節內所討論的準確曲度公式。而且在實際的立柱內，當撓度變成很大以前，其比例極限或許會超過限度。

由圖10－2，能獲一重要的觀察結果。在載重P及其產生的撓度間，並無一定的比例關係。因此，雖然撓度仍小，材料能維持線形的彈性狀態，但重疊原理不能使用。這個結論的理由，可易於瞭解。若考慮圖10－1之載重，等於在中心施加載重P，另加作用於兩端的偶力Pe。此兩端偶力Pe假如單獨作用，將會產生按普通樑的彎曲情形求其撓度(見第六章)。在那時，樑上微小撓度的出現，並不會改變載重作用，而計算樑內的彎力矩亦不必考慮樑的撓度。不過，當立柱上有一個軸向載重時，由偶力Pe所生的撓度則引起除具有一個彎曲作用的軸向力外，又具一個壓力作用。此項軸向力的彎曲作用產生了另外的撓度，此種撓度復在彎力矩上具有一種影響。因此，彎力矩不能由撓度獨自求得，並在那裏，又存在着一個介於軸向載重與撓度間的非線形的關係。*

假如在圖10－1內的立柱上作用的軸向力與臨界載重相比極爲微小時(比方說，小於臨界載重的2%)，則$kL/2$量足以正割函數級數展開式的前二項來表示：

$$\sec\frac{kL}{2}\approx 1+\frac{k^2L^2}{8}$$

將此式代入方程式(10－2)，得

$$\delta=\frac{k^2L^2e}{8}=\frac{PeL^2}{8EI} \tag{f}$$

其結果，與一簡支樑其兩端皆負偶力Pe，在其中點所生的撓度相符(見6.5節例題1)。所以，我們可作一結論。無論何時，當軸向力P與P_{cr}

*在“高等材料力學”內，對於承受橫向兼軸向載重之樑，將提出更廣泛的討論。

比較很微小時，作用在短支撐（ short strut ）（見 5.10 節），對彎力矩的大小有關的撓度影響可以不計。並可用通常樑的撓度公式（見第六章與附錄 D ）。

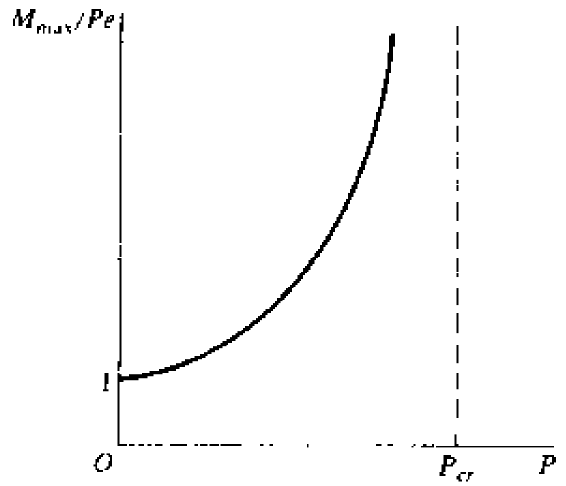


圖 10．3　圖 10．1 內立柱的最大彎力矩曲線

圖 10 － 1 所示受偏心載重的立柱內，其最大彎力矩發生在立柱的中間，並由下列方程式求得

$$M_{\max} = P(e + \delta) = Pe \sec \frac{kL}{2} \tag{10-4}$$

該方程式的曲線如圖 10 － 3 所示。當 P 值很微小時，最大彎力矩爲 Pe，亦即當不計撓度影響時，在立柱內的彎力矩。當 P 增加，彎力矩只作非直線形地增加，並且當 P 接近臨界值 $\pi^2 EI / L^2$ 時，彎曲變得非常大。立柱內，發生在凹的一側，其最大壓應力爲

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S} \sec \frac{kL}{2} \tag{10-5}$$

此處 S 表示截面模數。該方程式將在 10.4 節內詳加討論。

在整個的前面的討論中，曾假定立柱的彎曲，係發生在一個對稱平面內（在圖 10 － 1 的 xy 平面）。假如立柱有兩個對稱平面，而偏心距 e 不在截面的二個主軸中的一個主軸方向，則需將彎曲偶力 Pe 分解成兩個分偶力，各別作用在該立柱的一個對稱平面內。在兩個對稱平面的每個對稱平面內的撓度，可用上面討論的同一情況加以研究。

10 · 2 立柱之臨界載重

在前一節內曾指出，當軸向力接近臨界值時，受偏心壓力的立柱的撓度增加得很快。當P等於P_{cr}時，撓曲與彎力矩公式〔方程式（10－2）及（10－4）〕得到無限大值。對於簡支之柱，曾得公式$P_{cr}=\pi^2EI/L^2$，該值僅依立柱的尺寸與材料的彈性模數而定。祇要該柱保持着彈性，即可將其臨界載重視爲極限載重。因此，當載重達到臨界載重時，該柱的撓度就會變得很大。在實際設計中，需要一個適當的安全因數，所用的容許載重要比臨界載重小得多。

許多普通尺寸的立柱，在臨界載重到達以前，其所獲的應力已在比例限界以上，此種立柱在低於彈性臨界載重時，即作非彈性的屈挫。惟在本章內，僅就立柱彈性屈挫作討論*。

一根立柱的臨界載重，能以直接方法就一根理想立柱（ideal column）的行態計算。理想立柱，被假定爲完全筆直之柱以承受中心施加載重的壓力（一個透過截面重心作用的載重）。首先考慮一個長度爲L的理想細長立柱，其下端被固定，上端作自由（圖10－4a）。立柱所用材料，假

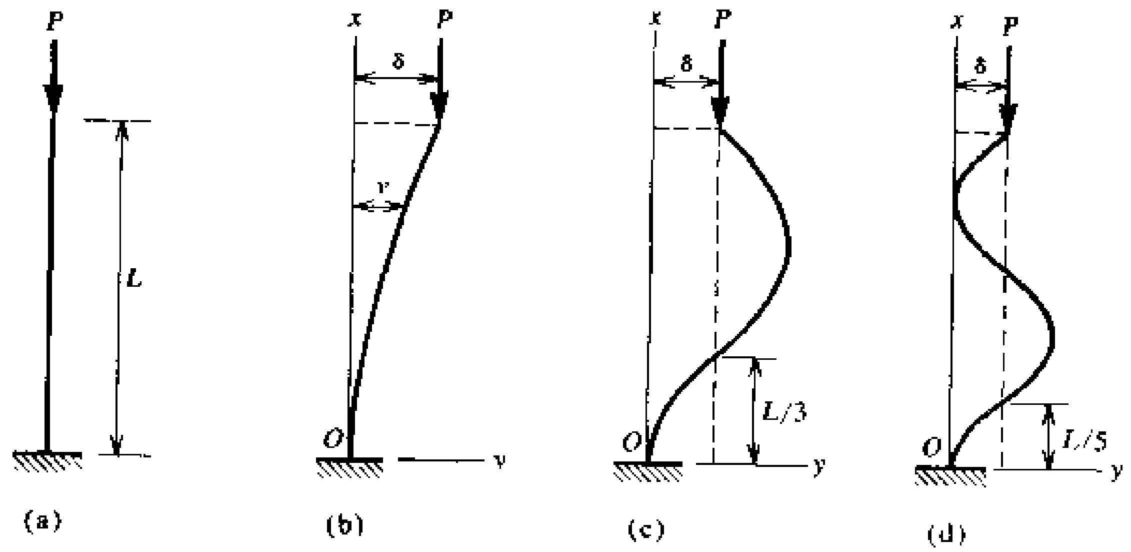


圖10·4　底端固定，上端自由的理想細長立柱：(a)屈挫之前；(b)n＝1時的形狀；(c)n＝3時的形式；及(d)n＝5時的形狀

定爲線形彈性材料。設軸向載重P小於臨界值，該桿件保持直線形並祇受

*非彈性的屈挫作用，將在“高等材料力學”中討論。以及參考書10－1及10－2。

軸向壓力。此直線形式的平衡是穩定的（ stable ）。意指，假如加一橫向力而產生一小撓度，當橫向力移開，撓度即行消失，而該桿件仍返回原直線形狀。不過，當 P 漸漸地增加到變成等於 P_{cr} 時，便達到一個"中性平衡"（ neutral equilibrium ）條件。在此載重下，該立柱在理論上可具任意小值的撓度，而一個小橫向力即會產生一個當移開時不會消失的撓度。在一較高的載重下，該柱成爲不穩定（ unstable ）而起崩塌。此種不穩定性的現象，謂之屈挫（ buckilng ）。可認爲該柱係在臨界載重下發生屈挫，或變成不穩定。該臨界載重，只可被解釋成能充分維持立柱在微彎狀況下的軸向力（圖 10－4 b ）。

一根立柱的臨界載重，可用其撓曲線的微分方程式算得之。對圖 10－4b 所示的立柱而言，在距底面 x 距離處的彎力距爲

$$M = -P(\delta - v)$$

此處 δ 爲自由端的撓度。因此該微分方程式變爲

$$EIv'' = -M = P(\delta - v) \tag{a}$$

因爲立柱上端可在任何方向作自由撓曲變位，故桿件的屈挫將會在最小彎曲剛度 EI 平面內發生，亦即彎曲將對具有較小慣性矩的主軸發生，自屬明顯。假定發生屈挫的 xy 平面，此平面即爲立柱的對稱平面。利用前節所用的符號 $k^2 = P/EI$ ，能將方程式(a)改寫成

$$v'' + k^2 v = k^2 \delta$$

該方程式的一般解爲

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \tag{b}$$

利用在立柱固定端的限界條件以求常數 C_1 及 C_2。

$$v = v' = 0 \quad 在 \quad x = 0 \ 時$$

將方程式(b)微分之得

$$v' = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx \tag{c}$$

現將限界條件代入方程式(b)及(c)，得

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = -\delta$$

其撓曲線爲

$$v = \delta(1 - \cos kx) \tag{d}$$

此方程式內的撓度 δ ，尙留待決定。

爲求對撓度得更多的知識，在立柱的上端，只採用下列之條件：

$$v = \delta \quad 在 \quad x = L 時$$

由這一條件得到〔見方程式(d)〕

$$\delta \cos kL = 0 \tag{e}$$

由上式可斷定，不是 $\delta = 0$ ，就是 $\cos kL = 0$ 。假如 $\delta = 0$ ，桿件就沒有撓度，亦就沒有屈挫（圖 10－4 a ）。此時， kL 量可爲任何值，而方程式(e)仍能滿足。所以，載重 P 亦可爲任何值。圖 10－5 內所示的載重－撓曲圖的垂直軸，即代表此一結果。

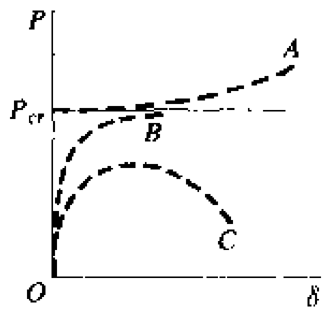


圖 10－5　立柱之載重－撓度曲線

另外一種可能性，即爲 $\cos kL = 0$。在此種情形，由方程式(e)可知 δ 可具任何微小值。 $\cos kL = 0$ 的條件，需要使

$$kL = \frac{n\pi}{2} \tag{f}$$

此處 $n = 1$ 、 3 、 5 ，……。爲滿足方程式(f)而求 P 的最小值。今取 $n = 1$ 得 $kL = \pi/2$ ，由此得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{10-6}$$

用此公式可得圖 10－4a的立柱的最小臨界載重。亦即，該公式可得能保持立柱在一微小變形狀之最小軸向力值。爲決定撓曲線的形狀，我們注意到， $k = \pi/2L$ ，因方程式(d)內的 kx 量自零至 $\pi/2$ 。所以撓曲線的形狀，如圖 10－4b 所示。由此解法，撓度 δ 的大小尙待決定，而此種條件

由載重-撓度圖（圖 10－5′）上的水平線代表之。當然，我們必須再牢記，在此種理想的分析中，諸撓度皆被假定為很小的。

一個理想的彈性立柱的臨界載重，常被稱為尤勒載重（ Euler load ）。因為著名的數學家 Leonhard Euler（ 1707 － 1783 ）曾研究細長立柱的屈挫現象並定出其臨界載重的第一人。

由方程式（ 10 － 6 ），可知立柱的臨界載重與撓曲剛度 EI 成正比，而與其長度的平方成反比。另一可注意的，臨界載重與材料的壓縮強度無關。因此，細長鋼質立柱的臨界載重並不因其具有較高的屈伏應力而增加。不過，該臨界載重可因增加其橫截面的慣性矩 I 值而增加。此種結果，可儘量將材料支配遠離截面的形心而達成之。所以，橫截面積相等的立柱，用管狀柱較實心柱更為經濟。減少這種管狀截面的壁厚以增加其橫向尺寸；因為 I 值較大，立柱的穩定性隨之增加。惟該壁的厚度，亦有其下限值。在此下限值以下，管壁本身變為不穩定。此外，亦可不把立柱的屈挫當作一整體，而把管壁做成浪紋或縐紋，使管壁的屈挫成局部化。此種屈挫形式被稱為局部屈挫（ local buckling ），更需作詳盡的研究（見參考書 10 － 1 ）。

現在回到方程式(f)，可知所取的指數 n 值較高時，可得無限多的臨界載重。

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2EI}{4L^2} \tag{g}$$

因此，大體上就圖 10 － 4a 的立柱而言，與撓曲線相當的方程式（見方程式 d ）為

$$v = \delta\left(1 - \cos\frac{n\pi x}{2L}\right) \tag{h}$$

該方程式表示，當 n 值增加時，撓曲線中就有更多的波形出現。當 $n=1$ 時，該曲線有半個波形，如圖 10 － 4b 所示。在次一情況（ $n = 3$ ），則得

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2EI}{4L^2} \qquad v = \delta\left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)$$

在 $n = 5$ 時，得

$$P_{cr} = \frac{25\pi^2EI}{4L^2} \qquad v = \delta\left(1 - \cos\frac{5\pi x}{2L}\right)$$

這兩種情況的撓度曲線，如圖 10 － 4 c 及 d 所示。雖然這些曲線，在理論上表現立柱屈挫的可能樣式，惟無實際上的重要性，因爲當載重 P 達到方程式（ 10 － 6 ）所得的臨界值時，立柱在第一種樣式（圖 10 － 4 b ）即已發生屈挫。

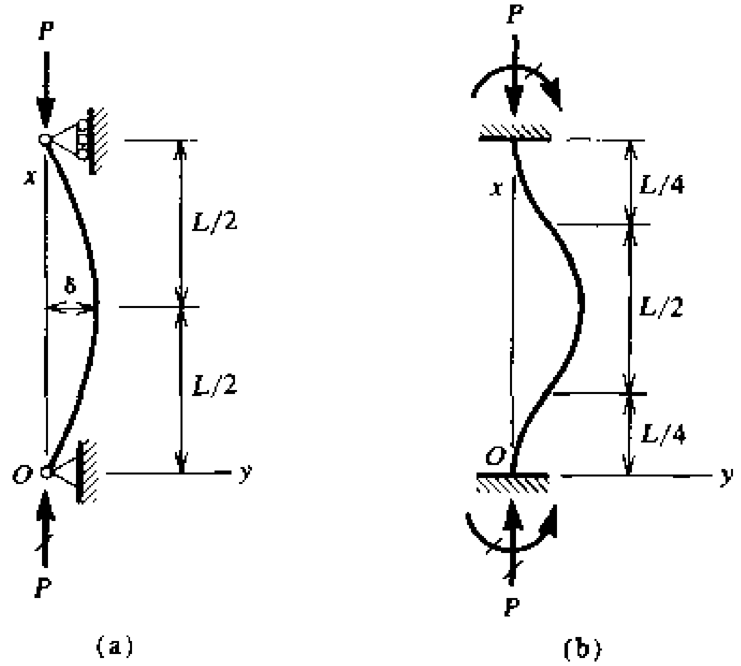


圖 10 · 6　(a)有鉸端之立柱，(b)有固定端之立柱

具有二端簡支及二端固定的立柱之臨界屈挫載重，可用以前的解法求得，例如，由於對稱性，很明顯的，具有鉸端（圖 10 － 6 a ）立柱的撓曲線，在第一種屈挫形式中，其中點將有一垂直切線。因此，立柱的每一半都與圖 10 － 4b的桿件有同樣條件，而其臨界載重可自方程式（ 10 － 6 ）將 L 代以 $L/2$ 求得：

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (10\text{-}7)$$

與以前在 10 · 1 節內誘導的結果一樣。具有簡支端的立柱的假定，實際上或許要比他種形式採用更多；常被稱爲等截面桿件屈挫的基本情況）。

假如立柱被固定在兩端（圖 10 － 6 b ），當屈挫時，在二支點發生反力力矩。在第一種屈挫形式的撓曲線爲一餘弦曲線，在距二端 $L/4$ 距離處具有迴折點。每一段四分之一長度立柱的行態，一如一根懸臂型立柱（圖 10 － 4b ）。所以將 L 以 $L/4$ 代入方程式（ 10 － 6 ） 得到該樣式的臨界載重：

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2EI}{L^2} \tag{10-8}$$

具有各種其他支承及載重的立柱，其臨界屈挫載重將於本節終了的例題中，及在高等材料力學中誘導之。

大撓度立柱

在撓曲線方程式的誘導中〔方程式(d)〕，其最大撓度 δ 的意義尙待確定。所以，我們的結論是在 $P=P_{cr}$ 時，立柱可能具有任何微小的撓度，即在圖 10－5 內由水平線所代表的條件。因爲我們原本用的是近似式 v，而不是用精確式（方程式 6－10 ）來表示立柱的曲度。精確的微分方程式之解法，業已分爲幾種情形求得（見參考書 10－1 ），並已表示在立柱的撓度內並無不確定的性質。在理想立柱的情況，代之而發現的是，載重－曲度圖遵循着在圖 10－5 內標記 A 的虛線。假若，在遭受到大撓度後，立柱內的應力超過了比例限界，則載重－撓度曲線將從曲線 A 向下降。

用彈性立柱作實驗時，載重－撓度圖常與圖 10－5（見開圖 10－2 ）內的曲線 B 相似。因爲載重與立柱構造之不精確，在載重低於 P_{cr} 時發生橫向撓度，並且當接近臨界載重時變得更大。桿件的構造與所加的載荷愈精確，曲線 B 將愈接近其理論結果（兩條直線，一條垂線與一條水平線）。假如立柱內的應力在載重低於 P_{cr} ，但超過比例限界時，載重－撓度圖將與曲線 C 相似。在該曲線上最大值之點，代表立柱非彈性屈挫之理論屈挫載重，而小於同一立柱的尤勒載重。

【例題】一根長 L 的細長立柱，被固定於下端，簡支於上端（圖 10－7 ）。試誘導一式子以表示該立柱之最低臨界載重，並定其相當的屈挫型式。

當立柱屈挫時，一個水平反力 R 在立柱上端發生（圖 10－7）。在固定端引起一水平力與一偶力。從靜力平衡，可知此二力大小相等但方向相反，而偶力 M 等於 RL 。距基線 x 距離的彎力矩爲

$$M=Pv-R(L-x)$$

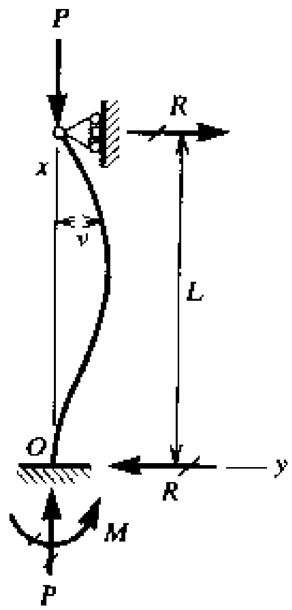


圖 10.7 例題，底端固定上端樞接之立柱

撓曲線的微分方程式爲

$$EIv'' = -Pv + R(L - x)$$

此方程式的一般解爲

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + R(L - x)/P \qquad \text{(i)}$$

此處 $k^2 = P/EI$ 。

爲決定常數 C_1 與 C_2 以及未知反力 R 。我們知道，在立柱兩端計有下列三個條件：

$$v = v' = 0 \text{ 在 } x = 0 \text{ 處}$$
$$v = 0 \text{ 在 } x = L \text{ 處}$$

將這些條件用於方程式(i)得成立三式

$$C_2 + RL/P = 0 \qquad C_1k - R/P = 0 \qquad C_1 \tan kL + C_2 = 0 \qquad \text{(j)}$$

若取 $C_1 = C_2 = R = 0$，將滿足所有這些方程式。此時撓度爲零，故所得者爲筆直而不屈挫的平衡形狀。欲求一個屈挫的平衡形式的可能性，需要一個方程式(j)之解而非零星解。我們可看出方程式(j)，是含 C_1、C_2 與 R 爲未知數的聯立方程式。這一組方程式只有在(j)三式諸係數的行列式爲零時，才有一個整體解。因此，得到下面的屈挫方程式（ buckling equation ）：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & L/P \\ k & 0 & -1/P \\ \tan kL & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

將行列式展開之，得

$$kL = \tan kL \tag{k}$$

由這個超越函數方程式，將定出此臨界載重。能滿足方程式的 kL 之最小而非零的值，用試誤法求得 $kL = 4.493$ 。而相當的臨界載重爲

$$P_{cr} = (kL)^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{20.19EI}{L^2} \tag{10-9}$$

此值是介於樞接端立柱與固定端立柱兩者間之臨界載重的中間値（見方程式 10 － 7 與 10 － 8 ）。

現在可回到方程式(j)，並求以 R 爲項來表示的 C_1 與 C_2 值：

$$C_1 = \frac{R}{kP} \qquad C_2 = -\frac{RL}{P}$$

代入方程式(i)，得撓度曲線方程式：

$$v = \frac{R}{Pk}\left[\sin kx - kL\cos kx + kL\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] \tag{l}$$

在此方程式內，P 値與 k 值可從前節得知。在方括弧內諸項，代表屈挫的立柱之撓度形式。但撓度的振幅，仍待確定，因爲 R 是一個任定數。

10．3 立柱內之應力

在同心載重立柱內的平均壓應力，係用其橫截面積除軸向力求得。當軸向力等於臨界載重時，用此法求得的應力稱爲臨界應力（ critical stress ）σ_{cr}。因此，對於基本的屈挫情況（圖 10 － 6a ），該臨界載重用方程式（ 10 － 7 ）求得，而臨界應力爲

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10-10}$$

上式內曾使用下列的符號

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{a}$$

作爲截面的最小廻轉半徑。比值 L/r，曾在方程式（ 10 － 10 ）內之分母中出現，稱爲立柱之細長比（ slenderness ratio ）。我們可以注意，臨界應力係與此比値的平方成反比。當然，應力 σ_{cr} 爲了使方程式（ 10 － 10 ）有效，必須保持在材料的比例限界以下。

立柱內壓應力對細長比圖，現在可被畫出來（見圖 10－8）。曲線 ABC 由方程式（10－10）繪出，稱爲尤勒曲線（Euler's curve）。此曲線祇有在 BC 區間內爲有效，在此區間內 σ_{cr} 小於比例限界 σ_{pl}。在尤勒立柱公式應用 L/r 限界以上，可在方程式（10－10）內使 $\sigma_{cr}=\sigma_{pl}$ 然後求解 L/r。取結構鋼材爲例，並假定 $\sigma_{pl}=240\text{N}/\text{mm}^2$ 及 $E=$

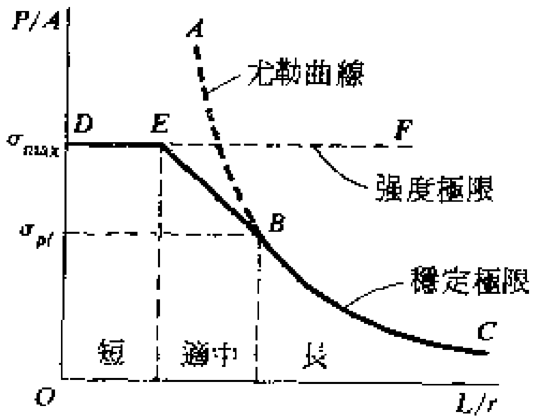


圖 10・8　軸向應力 P/A 對細長比 L/r 之圖示

$200\text{ kN}/\text{mm}^2$ 得 L/r 相當於圖 10－8 內 B 點之值約爲 91。因此，$L/r<91$，在一個理想的簡支鋼立柱內的平均壓應力，在發生屈挫以前達到比例限界。所以，臨界載重的尤勒公式，在此例中不能適用，所得之值皆屬過高。假如 $L/r>91$，立柱將因彈性屈挫而失敗，故可採用尤勒公式。

在圖 10－8 之曲線 BC 顯示，當細長比大時，臨界應力變得很小；所以，在低壓應力時很細長的立柱便會屈挫。此種情況縱使採用高強度材料亦不能改善；除非借着增加廻轉半徑以提高其臨界應力，或採用彈性模數較高的材料。

當一根立柱的細長比很低時，可把立柱的破壞歸咎於材料本身的失敗。此種失敗也許出於材料破碎的一途，如材料爲混凝土時所發生者。或出於材料屈伏的一途，如材料爲結構鋼時所發生者。在這些情況下，某一個最大壓應力 P/A，可建立爲材料的強度極限，而極限載重因此亦可求得。此種極限，在圖 10－8 內以通過最大應力 σ_{max} 繪出之水平線 DEF 代表之。該水平線卽代表立柱的強度極限（strength limit）。

介於短柱與長柱之區間內，有一個居間的細長比。就彈性穩定言，是太小而不敷調節之用。單就強度言，則又太大而無當不能使用。此類適中長度的立柱，具有非彈性的屈挫。爲了實用目的，有時繪一直線 EB（圖 10

－ 8 ）已足敷用，並可把它當作適中長度立柱的臨界應力。在此種情況，我們得一折線 $DEBC$，用作設計任何長度立柱的基礎。另一辦法，就是用一條連接 D 點與 B 點成一圓滑曲線（見 10.6 節）。

從一種示於圖 10 － 8 的曲線圖所得的應力 P/A ，必須當作立柱的最大應力 σ_{max}。在此種應力下，立柱的破壞係直接毀於材料的損毀，抑被毀於材料的屈挫，則繫於立柱的細長比。壓縮的容許工作應力必須爲 σ_{max}/n ，以處 n 爲安全因數。對於 n 值的選擇，要依不可預知或偶然增加載重的機遇率，加荷中心載重時的可能誤差，以及立柱內原有彎曲等情形而定。當立柱變長時，立柱內的缺點易於增加；所以當立柱的細長比增加時，照理應有一隨機可變的安全因數。通常結構工程的安全因數值係在 1.5 至 3 之間。一些特定的工作應力公式，稍後將於 10．6 節內說明。

立柱之有效長度

當繪製如圖 10 － 8 所示之尤勒曲線時，我們僅考慮屈挫的基本情況。不過，此曲線能採用有效長度（ effective length ）或等效長度（ equivalent length ）觀念,適用於其他末端條件。將懸臂立柱的臨界載重（見方程式 10 － 6 ）與樞接端立柱的臨界載重加以比較，便可明瞭後者的公式只可用於懸臂立柱。若以等於 $2L$ 的有效長度代替 L ，亦即將懸臂立柱的長度加倍。因此，能藉臨界應力方程式（ 10 － 10 ）寫成下列形式，而使該方程式成爲一般化

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \tag{10-11}$$

此處 KL 爲有效長度。K 稱爲有效長度因數（ effective length factor ），用在懸臂立柱是等於 2 ，用在兩端固定立柱爲 0.5（見方程式 10 － 8 ）。用在一端固定他端樞接立柱則爲 0.70° 在兩端皆爲樞接的立柱則爲 1 。一般言之，若有效長度因數爲已知，方程式（ 10 － 11 ）可用於具有任何形式的柱端條件的立柱。

10．4 立柱之正割公式

一根具有簡支的立柱，被一偏心軸向力所壓縮（圖 10 － 1 ），在立柱內的最大抗壓應力（見方程式 10 － 5 ）爲

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}+\frac{Pe}{S}\sec\frac{kL}{2} \tag{a}$$

此方程式右邊第一項代表直接抗壓應力，第二項代表立柱的彎曲影響。我們回想截面模數 $S = I / c$，此處 c 爲自中性軸至立柱凹側邊最外纖維的距離，並引入廻轉半徑的符號 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ 可用下列形式表示方程式(a)

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{kL}{2}\right)$$

其次，$\sqrt{P/EI}$ 代替 k，得

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \qquad (10\text{-}12)$$

此方程式稱爲一個偏心載重立柱之正割公式（secant formula）。此式用平均抗壓應力 P/A，偏心比（eccentricity ratio）ec/r^2，與細長比 L/r 爲函數，求得立柱的最大應力。

假如我們定出一個最大應力的限界，然後自方程式（10－12）計算

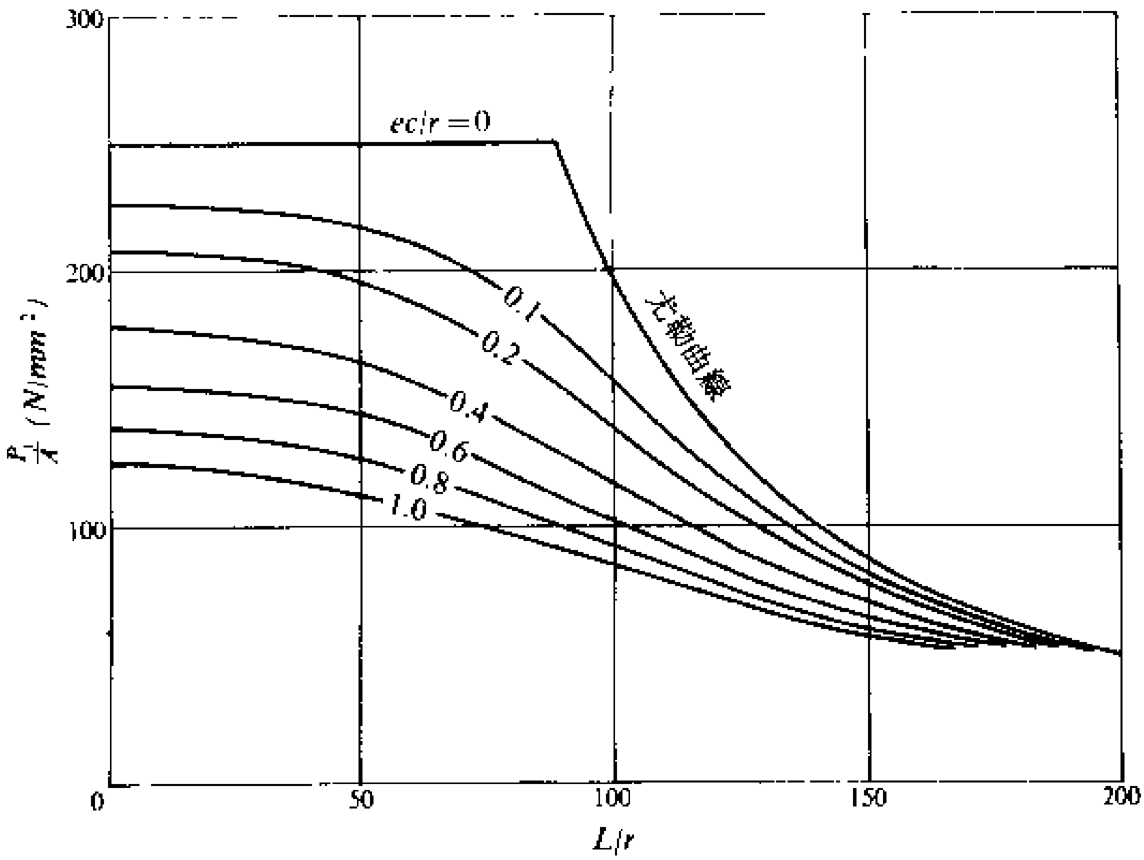


圖 10-9　$\sigma_y = 250$ N／mm² 及 $E = 200$ kN／mm² 時，方程式（10-13）之曲線

相當的平均抗壓應力P/A。茲以結構鋼爲例，可取屈伏應力σ_y爲其限界應力，則方程式（10－12）可重新排列成如下形式：

$$\frac{P_y}{A}=\frac{\sigma_y}{1+\frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P_y}{EA}}\right)} \tag{10-13}$$

式內的P_y爲立柱內使受應力最劇之纖維產生屈伏所需之力。對任意選擇的偏心比，可用試誤法解方程式（10－13），並繪出一條表示細長比函數P_y/A的曲線。在圖10－9內，表示$\sigma_y=250\,N/mm^2$，及$E=200\,kN/mm^2$的若干條此種形式的曲線。求得P_y後，即可用安全因數除P_y得立柱上的容許載重P_w。

【例題】一根用254×254×107kgUC截面之鋼立柱（圖10－10a），具兩個樞接端，長8 m，負中央載重$P_1=980$ kN及一偏心載重$P_2=140$ kN距軸1－1爲400 mm的2－2軸上。(a)使用正割公式，計算立柱內的最大抗壓應力，(b)假如鋼之屈伏應力爲$\sigma_y=280\,N/mm^2$，則立柱初期屈伏的安全因數爲若干？

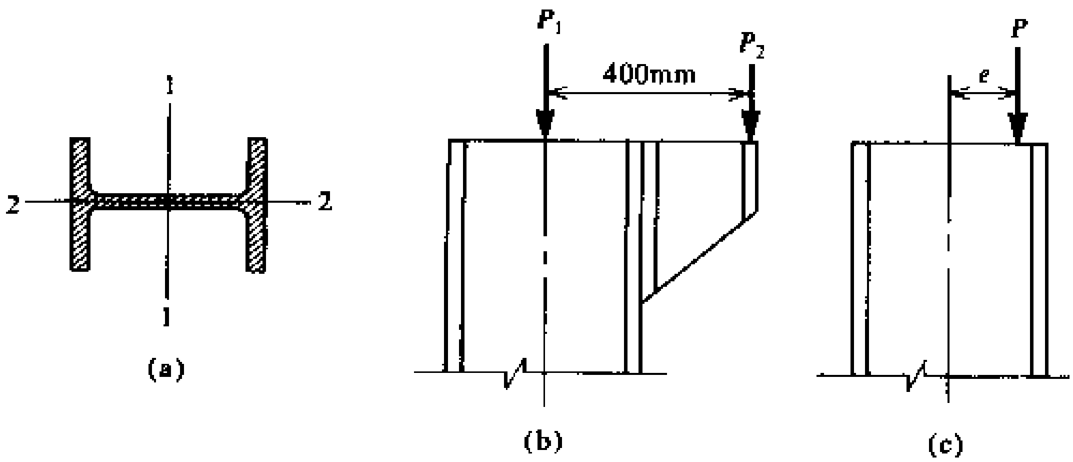


圖10·10　例題

(a)作用於圖10－10b所示的兩個載重P_1及P_2，在靜力學上相當於一個具有偏心距$e=50$mm作用之單一載重$P=1120$ kN（見圖10－10c）。利用附錄C內的截面性質表，得

$$\frac{P}{A}=\frac{1120\times10^3}{13660}=82\ N/mm^2 \qquad \frac{L}{r}=\frac{8000}{113}=70.8$$

$$\frac{ec}{r^2}=\frac{eA}{S}=\frac{(50)(13660)}{1313\times10^3}=0.520$$

代入方程式（10－12），並使用$E=200\ kN/mm^2$得

$$\sigma_{max}=138.6\ N/mm^2$$

(b)以偏心距e作用，並首先在柱內產生屈伏的載重P_y可將σ_y的280 N/mm^2代入方程式（10－13），然後用試誤法求得，其值爲$P_y=2010\ kN$。由此得

$$n=\frac{P_y}{P}=\frac{2010}{1120}=1.80$$

作爲立柱對初期屈伏的安全因數。

10.5　立柱之缺點

在一個中心施加壓力載重下的立柱行態，深受立柱的初期曲度、施加載重時不可避免的偏心、不完善的柱端情況以及材質的不均勻性等缺點的影響。此類缺點變動程度頗廣，各柱間全不相同，並在立柱試驗結果中，產生許多分散結果。一般地，這些缺點的出現，終於使立柱受到與直接壓縮一樣的彎曲。所以，似乎合於邏輯的結論爲一個中心載重不完善的立柱行態，將會像一個理想立柱負荷一個有偏心距e的壓力行態。因此建議，對於設計，大體上是直的中心荷重立柱，可選擇一個適當的偏心比值ec/r，採用正割公式來計算此類缺點的影響。當然，該ec/r^2值，必須基於試驗的結果。斟酌情形以增加其安全因數的辦法，不如採用正割公式，提供合理方法計入這些缺點的影響爲宜。

應用在結構鋼樞接端的立柱，通常採用的偏心比值爲$ec/r^2=0.25$。在方程式（10－13）內採用此值，並由已知屈伏應力σ_y及立柱尺寸，取安全因數（例如，我們有理由採用$n=2$）去除P_y以求該立柱的容許載重。

當在上述情況下採用正割公式時，我們假定那些不可避免的缺點，能用載重的偏心距來代表。另一解決問題的途徑，假定這些缺點的不精確性與立柱的初期彎曲（initial crookedness）量爲相等，對於一個兩端樞接的立柱，我們假定立柱初期撓度v_0，爲具有最大撓度a的正弦曲線波的一半：

$$v_0=a\sin\frac{\pi x}{L} \tag{a}$$

當軸向載重P施於柱中心時，立柱內的彎力矩於是成爲

$$M = P(v_0 + v)$$

此處v爲由于彎曲而生的立柱外加撓度。此M式可代入撓曲線的微分方程式，然後照10.1 節內所述的方法求解。在立柱中間的總撓度式爲

$$\delta_{max} = \frac{a}{1-\alpha} \tag{10-14}$$

此處α爲立柱軸向載重與臨界載重的比值：

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} \tag{10-15}$$

方程式（10－14）表示軸向載重的影響，將引起立柱的初期撓度。依一因數1/（1－α）而增加。因爲α小於一，故該因數永遠大於一。

$$M_{max} = P\delta_{max} = \frac{Pa}{1-\alpha}$$

立柱內的最大彎力矩爲

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pac}{(1-\alpha)I} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ac}{r^2(1-\alpha)}\right] \tag{10-16}$$

假如，我們繼續討論正割公式（見10.4 節），並定出最大應力σ_{max}的限界，然後可自方程式（10－16）計算P/A的相當值。

如用圖表來說明方程式（10－16），可再假定具有屈伏應力σ_y 的結構鋼作立柱，其橫截面爲一個對較強主軸彎曲的寬翼緣或I字形截面。爲了實用目的，可將橫截面化爲包括兩翼緣內有相等的面積。如此理想化的寬翼緣截面其慣性矩與廻轉半徑將易於求得爲：

$$I = Ac^2 \qquad r = c \tag{b}$$

其中c爲從中性軸到翼緣的距離，而A爲總截面積。將方程式(b)內之I及r代入方程式（10－16），並定$\sigma_{max} = \sigma_y$，將得到下列方程式：

$$\frac{P_y}{A}=\frac{\sigma_y\left[\pi^2E-\frac{P_y}{A}\frac{L^2}{r^2}\right]}{\pi^2E\left(1+\frac{L}{r}\frac{a}{L}\right)-\frac{P_y}{A}\frac{L^2}{r^2}} \tag{10-17}$$

其中，P_y 爲在立柱最外纖維產生屈伏時的軸向載重。在圖 10－11 內所示爲具有 $E=200\ \mathrm{kN/mm^2}$，$\sigma_y=250\ \mathrm{N/mm^2}$，及 a/L 之值等於 1/1000，1/700，及 1/400 之結構鋼，按本方程式繪出的諸曲線圖

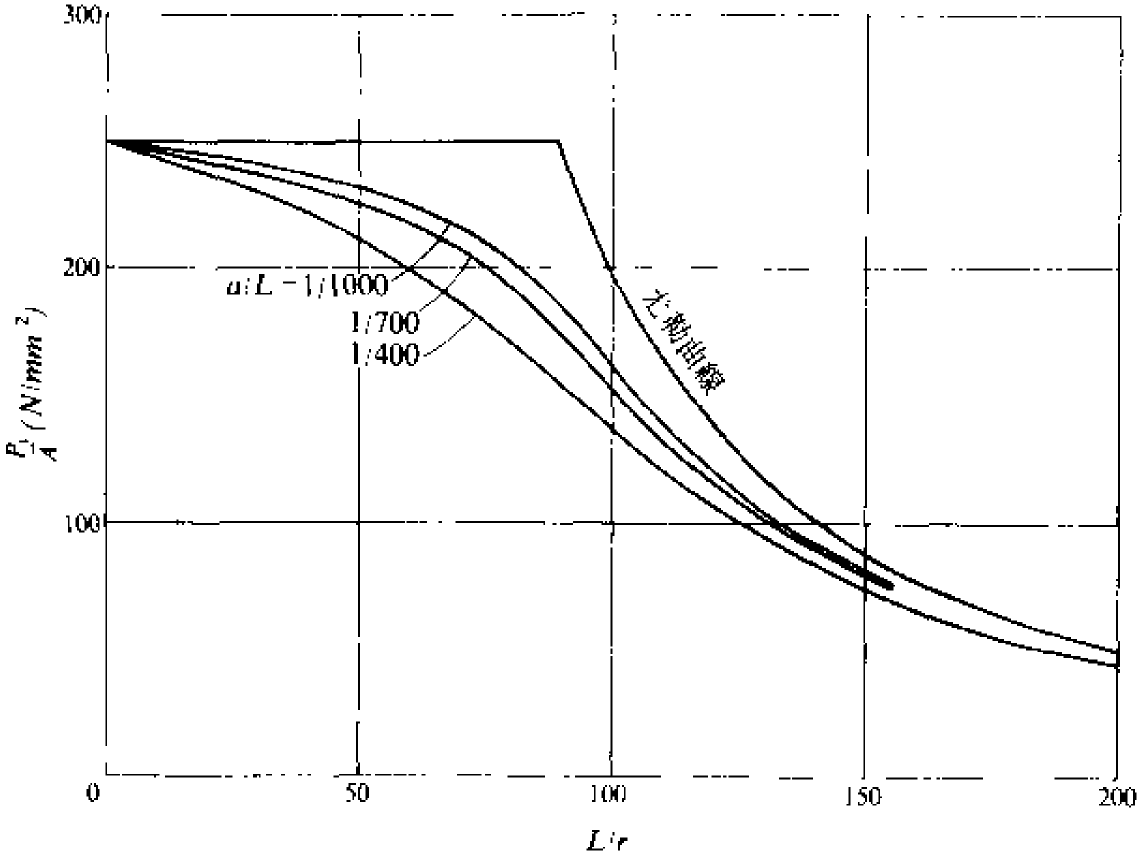


圖 10．11　理想化寬翼緣截面在 $\sigma_y=240\ \mathrm{N/mm^2}$ 及 $E=200\ \mathrm{kN/mm^2}$ 時，方程式（10-17）之曲線

。對於特短的立柱，三條曲線皆爲 $P_y/A=240\ \mathrm{N/mm^2}$。對於很細長的立柱，曲線所示之値將接近得自歐拉的曲線。取用其中一曲線並以一個適當的安全因數，譬如說 $n=2$，去除得自該曲線之 P_y/A 値，即得平均抗壓應力之容許値。本方法的利點，可使用一個不變的安全因數。因爲假定初期撓度與立柱長度成正比時，已將因立柱長度 L 所增加的各種不精確性，已全部考慮在內。不過，初期撓度的大小，仍繼續存在於某一不確定的範圍內，並依實驗的數據而定。照圖內所選曲線表示，經常使用的介於

400 到 1000 之 L/a 值。關於進一步討論立柱缺陷問題見參考書 10－1 至 10－7。

10·6 立柱設計公式

在前節中所述各種估計柱載重負荷能量的方法，皆基於理論的考慮。在使用上尚存有一些未確定部份，如安全因數的選擇（或隨 L/r 變化）及對假定之不精確部份與偏心距等適當數值的選擇。這些數量，惟有在實際立柱的試驗結果可資利用時，始能被選適當。基於此類試驗，才能選擇安全因數，並因此而得到立柱內平均抗壓應力的容許值。這些容許應力方能以實驗公式來表示。此實驗公式通常把 σ_w（等於 P_w/A）當作細長比 L/r 的函數。使用各種實驗設計公式時，若在制定這些公式限界之內，並備有這些公式的充足實驗資料，始爲完全正當。

對於中心負荷的結構鋼柱之設計，立柱研究會（Column Research Council）（CRC）曾提出基於下列諸項考慮之立柱公式（見參考書 10－8）。最大應力 σ_{max}（等於假定的極限或破壞載重除截面積）係在 L/r 甚大時，基於臨界載重的尤勒公式定出。所以得

$$\sigma_{max} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \tag{a}$$

此處所採用有效長度 KL，是爲了使本公式能在具有各種柱端情況皆屬有效而設。祇要立柱內的實際應力在比例極限以下，方程式(a)始可應用，而對於結構鋼可取其屈伏應力 σ_y。因爲在結構鋼截面內有殘餘應力存在，故立柱內在屈挫時的實際抗壓應力爲

$$\sigma_c = \sigma_{max} + \sigma_r \tag{b}$$

此處 σ_r 爲立柱內可能高達 $\sigma_y/2$ 的抗壓殘餘應力，而 σ_{max} 則等於 P/A。爲決定方程式(a)的使用限界，σ_c 等於其限界值 σ_y，並將 σ 等於其假定的最大值 $\sigma_y/2$。於是從方程式(b)求得 $\sigma_{max} = \sigma_y/2$。因此，我們的結論，祇要 σ_{max} 仍小於 $\sigma_y/2$，方程式(a) 即可使用。如以 λ 表示相當的限界值

KL/r，在方程式(a)內將 σ_{max} 等於 $\sigma_y/2$ 可求解 λ，其值為：

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \tag{10-18}$$

無論何時，有效細長比值 KL/r 等於或大於 λ，求臨界應力的歐拉公式（方方程式 a ）即可援用。

以鋼料之屈伏應力除方程式(a)，便成無因次形式，用以表示，甚為便利。因此，最大應力方程式可改寫為

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_y (KL/r)^2} = \frac{\lambda^2}{2(KL/r)^2} \quad 因 \quad \frac{KL}{r} \geq \lambda \tag{10-19}$$

用此方程式點繪成圖 10 － 12 所示的曲線。

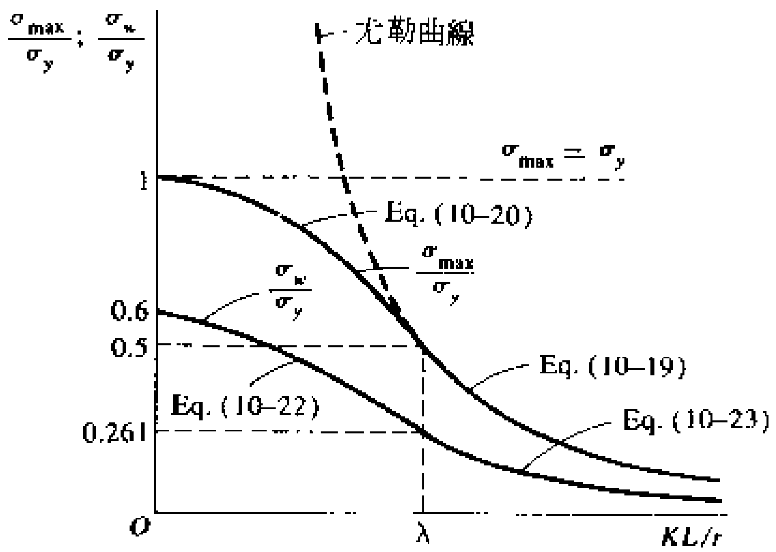


圖 10 - 12　用作設計結構的鋼立柱之最大應力 σ_{max} 及容許應力 σ_w 曲線

對於非彈性屈挫的區域（ $KL/r \leq \lambda$ ），立柱研究會建議下列的方程式，作拋物線形曲線：

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y} = 1 - \frac{(KL/r)^2}{2\lambda^2} \quad 因 \quad \frac{KL}{r} \leq \lambda \tag{10-20}$$

此方程式分別點繪在圖 10 － 12 。圖中可看到，在 $KL/r = 0$ 處，σ_{max} 值均為 σ_y 。此一曲線在 $KL/r = 0$ 時，具有一切線，並在 $KL/r = \lambda$ 點與方程式（ 10 － 19 ）的曲線和順地合併。

爲了設計目的，必須引入一個適當的安全因數，俾從最大應力（$\sigma_w=\sigma_{max}/n$）求得容許工作應力 σ_w。美國鋼鐵構造協會（American Institute of Steel Construction）（AISC）曾建議下列安全因數作爲立柱研究會公式之用。

$$n_1=\frac{5}{3}+\frac{3(KL/r)}{8\lambda}-\frac{(KL/r)^3}{8\lambda^3} \quad 當 \quad \frac{KL}{r}\le\lambda \tag{10-21a}$$

$$n_2=\frac{23}{12}\approx 1.92 \quad 當 \quad \frac{KL}{r}\ge\lambda \tag{10-21b}$$

因此，容許應力的方程式變爲

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y}=\frac{1-(KL/r)^2/(2\lambda^2)}{n_1} \quad 當 \quad \frac{KL}{r}\le\lambda \tag{10-22}$$

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y}=\frac{\lambda^2}{2n_2(KL/r)^2} \quad 當 \quad \frac{KL}{r}\ge\lambda \tag{10-23}$$

這些工作應力方程式，均點繪於圖 10 － 12 內。且與 AISC 對施中心載重的鋼質立柱設計規範中所列的方程式，含同樣的意義。

結構鋁質立柱係按包括兩條直線及尤勒曲線（在圖 10 － 8 之 $DEBC$ 線）的最大應力圖爲準。此曲線的縱座標值依照所採用的特定鋁合金而變，可從設計手冊中得到（見參考書 10 － 10）。從圖中得到的最大應力 σ_{max} 採用安全因數如 2 或 2.5，以求容許應力 σ_w。

許多由已知機關業經備妥的建築法規與規範，均供給立柱設計公式。此類公式祇爲某種材料及在所陳述的條件下所發展，以資應用。那種法規與規範爲工程設計人員所普遍採用。

選擇立柱截面以負荷規定的載重，經常需要一些試誤計算。當我們已知軸向載重，開始估計容許應力 σ_w 並概略計算所需橫截面的面積。然後自截面表內選擇可用的尺寸。此截面必須藉適當的立柱公式檢核其是否適於支持此種載重。假如不能支持，便另選一個較重截面並重複其程序試算之。假如選用的斷面過分巨大，則應改選較輕的截面並予核算，以期經濟與安全。

英國習用的立柱設計公式，是依據潘來（Perry）公式，該式係直接

---

*參閱參考書 10-9。AISC 所採用的符號與本書不同：例如，λ 用爲 C_c，σ_w 用爲 F_a，及 σ_y 用爲 F_y。又模數 E 由 AISC 指定爲 200kN/mm²

導自（ 10 － 16 ）式。在該式中將所有立柱的缺失合在一起，用等效的原曲度（ equivalent initial curvature ）與破壞時的最大應力準則納入。洛伴生（ Robertson ）建議此等效原曲度納入該公式，常被稱爲潘－洛（ Perry-Robertson ）公式。

由（ 10 － 16 ）式　　$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ac}{r^2(1-\alpha)}\right]$$

若平均應力爲　　$$\sigma_{mean} = \frac{P}{A}$$

與　　$$\eta = \frac{ac}{r^2}$$

此 η 值爲包含原缺點的無因次參數

則　　$$\alpha = \frac{P}{\pi^2 EI/l^2} = \frac{P}{A}\cdot\frac{1}{\pi^2 E/\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{\sigma_{mean}}{\sigma_{cr}}$$

式中 σ_{cr} 爲歐拉平均屈挫應力（或樞拉臨界應力）

當破壞發生時，$\sigma_{max} = \sigma_y$

$$\sigma_y = \sigma_{mean}\left[1 + \frac{\eta}{1 - \sigma_{mean}/\sigma_{cr}}\right] \tag{10.24}$$

故得　　$$\sigma_y\sigma_{cr} - \sigma_y\sigma_{mean} = \sigma_{mean}(\sigma_{cr}\eta + \sigma_{cr}) - \sigma_{mean}{}^2$$

$$\sigma_{mean}{}^2 - (\eta\sigma_{cr} + \sigma_{cr} + \sigma_y)\sigma_{mean} + \sigma_y\sigma_{cr} = 0$$

∴　　$$\sigma_{mean} = \eta\sigma_{cr} + \sigma_{cr} + \sigma_y \pm \sqrt{(\eta\sigma_{cr} + \sigma_{cr} + \sigma_y)^2 - 4\sigma_y\sigma_{cr}} \tag{10.25}$$

在破壞時的平均應力爲

$$= \frac{\sigma_y + (\eta+1)\sigma_{cr}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y + (\eta+1)\sigma_{cr}}{2}\right)^2 - \sigma_y\sigma_{cr}} \tag{10.26}$$

安全應力爲

$$= \frac{1}{n_2}\left[\frac{\sigma_y + (\eta+1)\sigma_{cr}}{2}\sigma_{cr} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y + (\eta+1)\sigma_{cr}}{2}\right)^2 - \sigma_y\sigma_{cr}}\right] \tag{10.27}$$

式中 η_2 爲載重因數（ load factor ）

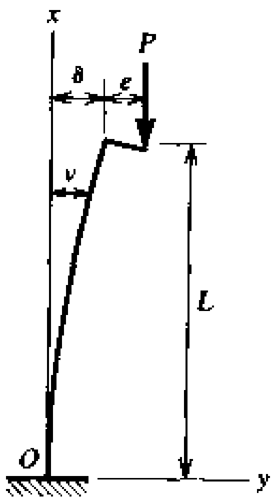
10－27式即爲潘－洛公式。

英國的鋼橋梁標準規範書BS 153中，立柱公式是用洛伴生原建議的公式，採用$\eta = 0.003\,l/r$。在鋼房屋標準規範書BS 449中，則採用$\eta = 0.00003(l/r)^2$。

習　題

10.1－1　圖10－1內立柱的最大撓度爲$\delta_1 = e(\sec kL/2 - 1)$，是由方程式（10－2）所得。假如不計$P$力所產生彎力矩的撓度作用，其最大撓度爲$\delta_2 = PeL^2/8EI$（參見10.1節方程式(f)，此比值$\delta_1/\delta_2$，可被認爲是一個代表在彎力矩上撓度作用的"增幅因數（amplification factor）"。試求一以kL爲項表示δ_1/δ_2式，並由此式繪一δ_1/δ_2對kL之圖。（要注意此δ_1/δ_2當$kL=0$時必等於1，並且當$kL=\pi$時必變爲無限大，可在圖上作一查對）。

10.1－2　圖內所示立柱，座底固定，上端活動。一個壓力載重P以偏心矩e作用於立柱之頂。(a)求該立柱的最大撓度公式，(b)求該立柱的最大彎力矩M_{max}公式。



習題圖10.1-2

10.1－3　一根具有正方形橫截面（50 mm × 50 mm）長2m 桿件，受偏心壓力$P = 40$ kN。該偏心距e之方向係沿正方形的一個對角線上，並等於25 mm。假定桿件的兩端爲簡支端，而$E = 200$ kN / mm²。求桿件內最大壓縮應力。

10.1－4　一桿件長1.2m 其橫截面爲25 mm × 50 mm矩形，受到$P = 15$ kN的偏心壓力。該壓力的作用線通過橫截面的一個偶角。假定桿件兩端爲簡支端，而$E = 200$ kN/mm²。求其最大壓應力。

10.1－5 由203 × 76 × 23.8 kg槽鋼構成的立柱，其兩端作鉸端(見附錄C)。一個壓力載重作用於槽鋼對稱面內的一點。在該點軸1－1與槽鋼腹鈑背平面相交，亦即在距形心21.3mm處。假定P = 18 kN，L = 3m，及E = 200 kN / mm^2。試求該立柱中點的撓度及立柱內最大拉應力與壓應力。

10.1－6 由152 × 152 × 37kg槽鋼截面構成之兩端鉸立柱。壓力載重P作用在2－2軸上(見附錄C)，偏心距e = 80mm。立柱長爲L = 5m及E = 200 kN / mm^2。假如σ_y = 250N / mm^{2}使立柱產生的屈伏載重值P爲何？

10.1－7 一根兩端鉸的立柱，由一鋼管構成，該管之外直徑d= 52mm管厚t = 2 mm。壓力載重P被加於管緣之中間，即其偏心距爲e=25mm。立柱長L = 2m及E = 200 kN / mm^2。假如σ_y = 280N / mm^2，求管內產生之屈伏載重P_r？

10.2－1 試以撓曲線微分方程式開始，誘導一兩端簡支立柱的臨界屈挫載重及相當於屈挫式的式子(見圖10－6a)。

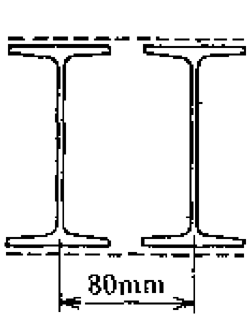
10.2－2 試以撓曲線的微分方程式開始，誘導一兩端固定立柱的臨界屈挫載重及相當於屈挫式的式子(見圖10－6b)。

10.2－3 兩根簡支立柱具有相同長度，截面積及彈性模數。一根實心圓形截面，另一根實心正方形截面。試比較圓形桿件與正方形桿件各別的臨界載重P_c與P_r。

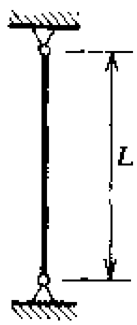
10.2－4 一根寬翼緣立柱(E = 200 kN / mm^2.)由203 × 203 ×86 kg UC 截面長15m。其下端被固定，上端作樞接。試計算該立柱的臨界載重。

試計算一根由102 × 64 × 9.7 kg RSJ截面構成的立柱的臨界載重。假定該立柱係簡支於兩端，並假定L = 2 m及E = 200 kN/mm^2。

10.2－6 試計算一根由兩個I字形截面依圖所示位置而組成的兩端簡支立柱的臨界載重。每一構材係用102 × 64 × 9.7 kgRSJ截面，而其連接細部的佈置將使兩個構材同在一起作用，形同一個整體立柱。假定L = 4 m及E = 200 kN / mm^2。



習題圖10.2-6



習題圖10.2-7

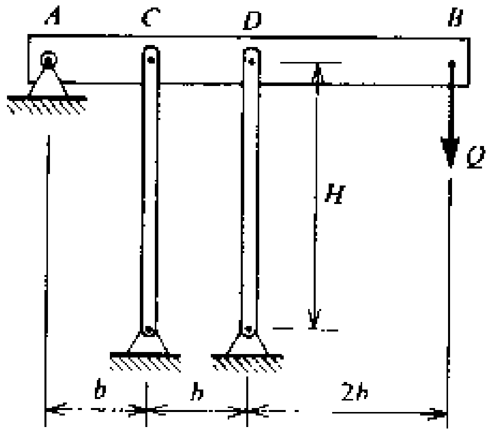
10.2－7 一根細長而具有鉸端的桿件，由兩端不能移動的支座所握持（見習題圖 10.2－7）。假定其情況理想，且爲彈性行態。該桿件的溫度增加量 ΔT 到若干時方產生屈挫？（假定 α ＝熱膨脹係數）。

10.2－8 試從附錄C表內選擇最輕的寬翼緣截面（$E = 200\,\text{kN/mm}$）用作具有簡支端的立柱（長度等於 6 m）。假如壓力載重 P 爲 2 MN，而防止彈性屈挫失敗的安全因數 n 需爲 2.5。

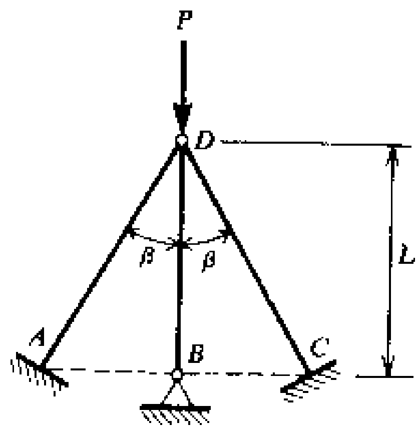
10.2－9 試從附錄C表內選擇最輕的等肢角鋼截面用作具有簡支端的立柱（長度等於 3m）。假如所加之壓力載重 P 爲 90 kN，而防止彈性屈挫失敗的安全因數 n 爲 2.5（用 $E = 200\,\text{kN/mm}^2$）。

10.2－10 一根長 2 m 之細長鋁質立柱（$E = 70\,\text{kN/mm}^2$），係由外徑 50mm 的圓管製成。假如壓力載重 $P = 14\,\text{kN}$，而防止彈性屈挫的安全因數 n 希望爲 2。試決定其厚度 t。（假定立柱兩端皆爲簡支端。）

10.2－11 一根相當剛勁的桿件 AB 被樞接在 A 端，並如習題圖 10.2－11 所示在 C 與 D 處由兩根完全相同的細長樞端立柱所支承。每個立柱具有撓曲剛度 EI。在何種載重 Q 下會使該支柱體系崩潰？



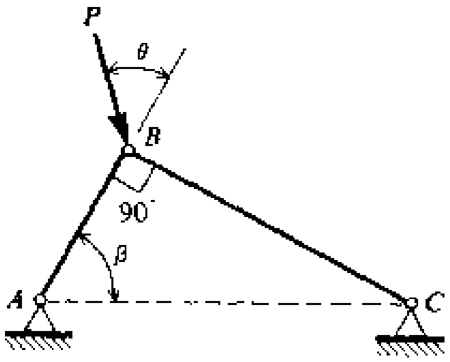
習題圖 10.2－11



習題圖 10.2－12

10.2－12 結構 $ABCD$ 由三根具同樣撓曲剛度 EI 的細長桿件所組成（如習題圖 10.2－12）。接點 B 與 D 爲樞接，而支點 A 與 C 均係固定，夾角 $\beta = 30°$。假定由於構材之屈挫而發生崩塌。試決定作用於接點 D 上垂直載重 P 的臨界值。

10.2－13 一個樞接桁架 ABC，係由兩根具有完全相同的截面及材料的細長桿件所組成（見習題圖 10.2－13）。假定由於構材的屈挫而發生崩塌。試決定在載重 P 成爲最大值時的 θ 角。（假如 $0 < \theta < \pi/2$）。



習題圖 10．2－13

10.3－1 25mm × 50mm 的矩形鋼桿被簡支於兩端，並受一軸向壓力載重。當達尤勒公式中的臨界載重時，立柱的最短長度爲若干？假定 $E = 200\ kN/mm^2$，與 $\sigma_{pl} = 200N/mm^2$。

10.3－2 試計算前題所述立柱的臨界應力 σ_{cr}，假定其長度 L=1.5m。

10.3－3 一根實心圓截面鋼桿件（直徑等於 25mm）兩端固定，並受一軸向壓力。當達尤勒氏公式中的臨界載重時，該柱的最短長度爲若干？假定 $E = 200\ kN/mm^2$ 及 $\sigma_{pl} = 200N/mm^2$。

10.3－4 試計算上題內所述立柱的臨界應力 σ_{cr}，假定長度 L=1.5 m。

10.3－5 一鋼質桿件（$E = 200\ kN/mm^2$）的截面爲矩形 5mm × 100mm 並受一軸向壓力 P。該桿件可認爲具有簡支端情況。對其破壞，希望可維持一個安全因數 $n = 2$。假如其長度(a)爲 2 m，(b)爲 2.5 m，及(c)爲 3 m，則立柱內的容許應力 σ_w 分別爲若干？？

10.3－6 一根具有兩個鉸端長度 $L = 10$ m的 254 × 254 ×107kgUC 截面立柱，（假定 $E = 200\ kN/mm^2$）。試定出其臨界壓力應力 σ_{cr}。假定其安全因數 $n = 2.5$。立柱上的容許壓力載重 P 爲若干？

10.3－7 當臨界載重由尤勒公式定出時，若 $\sigma_{pl} = 280\ N/mm^2$，則前題所述立柱的最短長度 L 爲若干？

10.4－1 試求 10.1－2 題內懸臂立柱內與最大應力正割公式（方程式 10－12）相類似的公式。

10.4－2 一個具有樞端用 305 × 305 × 158 kg UC 的鋼柱（$E = 200\ kN/mm^2$）其長度爲 8m。該柱負荷一中心載重 $P_1 = 900$ kN 及一個偏心載重 $P_2 = 450$ kN（見圖 10－10）。載重 P_2 作用於距形心 180 mm 的 2－2 軸上。(a)試用正割公式計算立柱內的最大應力。(b)例如 $\sigma_y = 280N/mm^2$，則該立柱抵抗初期屈伏的安全因數爲若干？

10.4－3 一個具有二簡支端及長度 2 m的鋼質立柱（$E = 200\ kN/$

mm^2）。假如截面為 $102 \times 102 \times 11mm$ 角鋼（參閱附錄C）載重 P 作用於角鋼兩肢相交的外偶角處，其容許抗壓載重 P 為若干？設其抵抗屈伏的安全因數為 $n = 2$ 及 $\sigma_y = 280N/mm^2$。

10.4－4 一具有簡支端用 $406 \times 140 \times 46kg$ UB 截面之立柱（$L = 5m, E = 200kN/mm^2$）。該立柱支持一個壓力載重 P，引起對小主軸（2－2軸）的彎曲。偏心距比率為 $ec/r^2 = 0.2$。假如抵抗屈伏之安全因數為 $n = 2$ 及 $\sigma_y = 250N/mm^2$，求其容許 P 值。

10.4－5 一根鋼管立柱，在柱基處為固定並簡支於柱頂（$L = 4m$，$E = 200kN/mm^2$）。鋼管的外徑內徑分別為90mm及80mm。假定偏心距比 $ec/r^2 = 0.25$，$\sigma_y = 250N/mm^2$ 及 $n = 2$。試求容許載重 P。

10.4－6 一根兩端樞接的鋼質立柱（$L = 3m, E = 200kN/mm^2$），用 $254 \times 254 \times 167kg$ UC 一個W截面。一個載重 $P_1 = 450kN$ 作用在形心，另一偏心載重 P_2 則在距軸2－2 100mm之軸1－1上作用。假定 $\sigma_y = 280N/mm^2$ 及 $n = 2.5$。試求 P_2 的容許值。

10.5－1 試以解撓曲線的微分方程式，誘導一具有初期撓度的立柱的最大撓度方程式（10－14）。

10.5－2 試誘導一個與方程式（10－17）相似的正方形截面立柱的方程式。

10.5－3 一個具有兩端樞接 $203 \times 203 \times 60kg$ UC鋼質立柱（$E = 200kN/mm^2$）。負荷一個軸向載重 $P = 1MN$。立柱長5m，因受截面較弱的主軸彎曲而屈挫。該立柱有一初期撓度，其形為正弦曲線的一個單一波長，其中間的撓度等於5mm (a)用方程式（10－16），試計算立柱中的最大應力。(b)假如 $\sigma_y = 280N/mm^2$，該立柱對屈伏的安全因數為若干？

10.5－4 一個具有兩端簡支之鋼柱（$E = 200kN/mm^2$）長1.2m。假如該立柱有一直徑50mm的實心圓形截面，其容許壓力載重 P 為若干？用方程式（10－16）並假定對屈伏的安全因數 $n = 2$，$\sigma_y = 280N/mm^2$ 及 $L/a = 400$。

10.5－5 一根兩端固定之鋼柱，由一個 $76 \times 76 \times 6.2mm$ 角鋼截面構成。假如該柱長為 $L = 3m$，$E = 200kN/mm^2$，$n = 1.5$，$\sigma_y = 280N/mm^2$，及 $a/L = 1/800$。試求其容許壓力載重 P。（本題解時可用方程式10－16）。

第十一章　結構分析與能法

11.1 緒　　言

結構分析（ structural analysis ）之目的，在求各種不同形式結構的應力合力、變位、及反力，特別是那幾種靜不定結構。在早先幾章內此項主題已經介紹過，我們考慮過各種樑，扭桿件及軸向載重構材。結構分析與材料力學密切地混合在一起討論。另加，功與能的概念　包括虛功、應變能、位能及餘能（ complementary energy ）等，在結構分析中均具有重要的任務。

在本章內，將以討論虛變位原理與虛功原理開始，然後應用虛功原理導出單位－載重法（ unit-load method ），該法在求結構變位，係一非常有力而有用的方法。當應用單位－載重法時，樑之剪　撓度暫不考慮。然後在下節內，提出互換變位定理（ reciprocal displacement theorem ）與互換功定理（ reciprocal work theorem ）。其次，介紹並繪圖說明韌性法與勁性法（ flexibility and stiffness methods ），這些均為結構分析的基本方法。最後，在本章後半部專討論各種能法（ energy methods ）。

在討論結構分析應用各種能方法之後，開始提出一些與應變能及餘能有關的基本觀念。應變能的討論包括卡氏第一定理（ Castigliano's first theorem ），固定位能原理（ the principle of stationary potential energy ），瑞－李二氏法（ Rayleigh-Ritz method ），及對結構分析之變位與勁性法的關係。餘能之討論包括克－安二氏定理（ Crotti-Engesser theorem ）及最小餘能原理（ principle of minimum complementary energy ），二者皆對分析之力法與楔性法有關。再者，對作直線型行態的結構，餘能定理簡化為卡氏第二定理（Castigliano's second theorem ）與最小應變能原理。

在本章內所討論之理論與方法，僅包括樑、平面桁架、及簡單平面構

架，並各別舉例說明。可是，所有一切概念均代表應用力學的基本原理。所以對於更複雜的結構形式，包括空間桁架、空間構架、版與薄殼結構以及其他，皆可適用。

11·2 虛功原理

在研究靜力學時，慣於用以解答靜態的平衡，常常介紹些虛變位與虛功的概念。“虛”這個字的含義爲假設的各種量，在實際上或物質上的觀

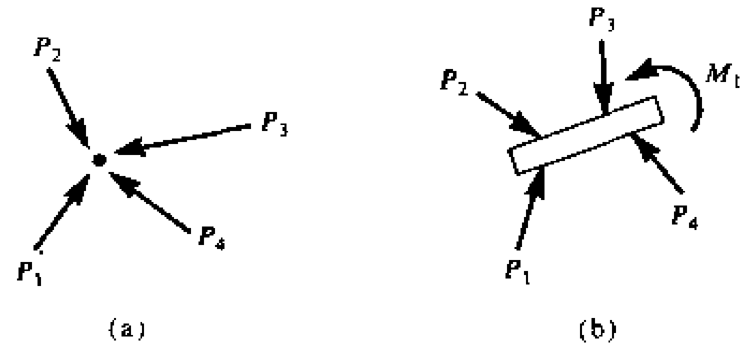


圖 11·1 虛變位原理 (a)爲一顆粒子 (b)爲一個剛體

念皆不存在，因此，一個虛變位係一個想像中的變位，並被任意強行加於結構系統上的；它並非實際的變位，像被作用在結構上的載重所引起的撓度那樣。當在虛變位時，實際上各力所做的功，皆稱爲虛功（virtual work）。

一個單獨顆粒子，受到一組力的作用而處於靜力平衡狀態時（見圖11－1a），我們可給與該顆粒一個包含在任何方向移動的虛變位。因爲這些力係在平衡狀態，在此虛變位下，各力所作的虛功必定爲零。此表面看來很簡單的陳述，即爲虛變位原理（the principle of virtual displacements）。一如在靜力學研究中所示，此原理可用來代替更熟悉的平衡方程式以解答習題。

虛變位原理，亦可適用於一個受一組載重，或包括一些力、力偶與分佈載重等作用而保持平衡狀態的剛體（圖11－1b）。該剛體可產生一個虛變位，在任何方向包含一個移動、對任何軸的旋轉、或爲一旋轉與移動的合併。在任何情況下，假如物體處於平衡狀態，則各力所作的虛功將爲零。我們必須經常將虛變位限定在一個很小的變位，使各力的作用線在虛變位時不會被改變＊。

＊虛變位原理在1667～1748年，首由John Bernoulli用公式表示出來（見參考書1－1 P.27及6－1）。

關於在結構分析上的應用，必須將虛變位原理延伸到包含變形結構的情況。對於此類結構，不僅要考慮各外力的虛功，又須考慮相關的各內力或各應力之合力的虛功。爲了表示如何完成此項工作，讓我們考慮圖 11－

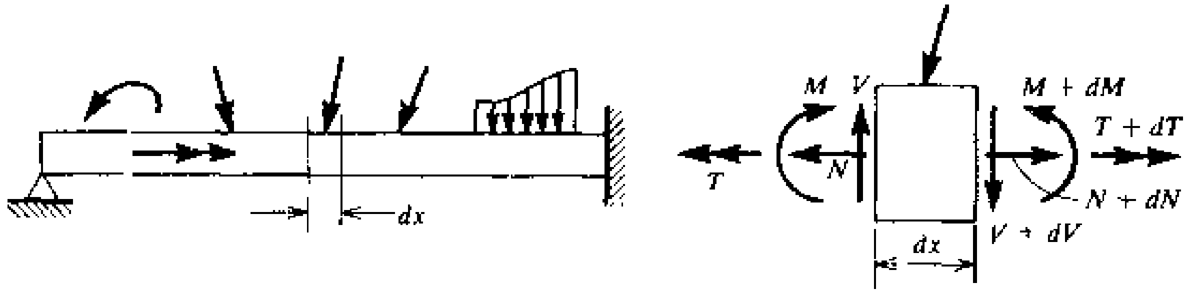


圖 11．2　虛功原理之誘導

2a 所示的結構。此結構假定完全以普通方式承受各種力、彎曲力偶、轉矩與分佈載重等負荷。該結構，當然是在靜止狀態，並處於各種負荷下的平衡狀態。在此結構的任何橫截面上，可能以一個軸向力N的形式、彎力矩M、剪應力V、與扭曲力偶T等各種應力的合力存在着，一如作用於構材（圖 11－2b）內切出長dx 元體的左面部份。在元體的另一面的各應力合力，可能受到微分量的改變。因此，這些應力合力被表示爲$N+dN$、$M+dM$、$V+dV$，及$T+dT$。

現在假定結構（圖 11－2a)有一個包含形狀偏斜的微小變化。這虛假變形以某種不指定的方式強行加在結構上，並且與該結構所受的載重而引起的實際撓度完全無關。這種實際撓度具有明確的數值，而由載重與結構的性質定得。不過，該虛變形是代表一個被給與結構的外加變形，該結構以前曾在實際載重作用下，其表面係成一平衡的配置。在虛變形上唯一的限制是，該虛變形必須代表一個會實際依自然法則而發生的變形樣式。換言之，該虛樣式的改變，必須與結構的支承情況互相適應。並在結構的元體間必須能保持連續性。樑的虛變形結果，在樑軸上的各點將遭受到虛變位，一如垂直方向的撓度。

在虛變形時期，結構的每個元體，將被移置於一個新位置，並被改變了形狀。所以，作用於一個元體上的各力（各應力合力及各外部載重，皆示於圖 11－2b）將完成其虛功。設以dW_e表示此虛功的總量。此虛功總量與一個元體結合之功，可被認爲由兩部分所組成：①由于剛體的元體之

變位（兼有移動與旋轉）所做之功 dW_r，②與元體之變形結合所做之功 dW_d。因此得成立

$$dW_e = dW_r + dW_d$$

因爲元體是在平衡狀態，所受各力（兼有外力與內力）一如剛體元體。在變位期間所做的虛功 dW_r 必定爲零，因此上項方程式化爲

$$dW_e = dW_d \tag{a}$$

此方程式是陳述：在所有作用於元體的各力所做的總虛功，在發生虛變位期間，（即，由于剛體變位的虛功，兼有元體變形所做的虛功）等於在同樣各力下，僅在元體的虛變形期間所做的虛功。假如現在將結構的一切元體在方程式(a)內的虛功項目全部相加起來，可成立

$$\int dW_e = \int dW_d \tag{b}$$

此式的積分，表示在整個結構上所完成的功。

在方程式(b)內的積分，可有一個簡單的解釋。方程式左邊的積分係受作用於所有元體各面的一切力，兼有載重與應力的合力。在結構的虛變形期間，所作的總虛功。圖 11 － 2b所示的元體，即爲所有元體中的典型。可是，我們可以注意到各個元體的各邊，皆與相鄰各元體的每邊直接接觸。所以，作用於某一元體上應力合力的虛功，恰好抵銷了作用在相鄰各元體上相等而反向應力合力的虛功。惟一留下的虛功祇有作用於各元體（如圖 11 － 2b元體的上邊與底邊）與外邊分界上之功。因此，我們得到的結論是，方程式(b)左邊的積分，等於作用在結構上各外力的功,被稱爲外功（external work），並以 W_{ext} 表示之。

在方程式(b)右邊之項，已用與一個元體變形結合的虛功加以積分而得。此功，包含作用於一個元體上一切力的影響。此一切力兼有各應力合力與各外力。可是，當一個元體變形時，祇有各應力合力完成作功。因此，在方程式(b)內第二項實際上代表祇有各應力合力的虛功。此虛功等於當各應力合力作用於各元體上，而各元體被虛假的變形所完成之功。將所有元

體的虛功相加而得的虛功總量，被稱爲內功（ internal work ），並以 W_{int} 表示之。因此，方程式(b)變爲

$$W_{ext} = W_{int} \tag{11-1}$$

此方程式代表虛功原理（ principle of virtual work ），且可陳述爲：假如一個結構處於一系列載重作用下，並成爲平衡狀態的變形，被給予一個微小的虛假變形，則受各外力（或載重）所完成的虛功，等於受各內力（或應力合力）所完成之功。

虛功原理在結構分析上頗爲有效，且有甚多實用價值。可是，在着手使用該原理之前，必需強調其中二個特點。第一，虛變形或虛變位必須與結構的支承相並相容，而必須保持結構的一致性。若無那種限制，外形的虛變化或可任意加予結構上；外形的虛變化，不應與受各個眞實載重所引起的結構變形的形狀相混淆。第二，觀察該原理在發展階段，從未將結構的材料性質納入討論。所以，虛功原理可應用于一切結構，不論其材料行態是作直線型的，或非直線型的，彈性的或非彈性的。

現在讓我們考慮出現於方程式（ 11 － 1 ）內的外在虛功與內在虛功的各項評價。外功 W_{ext}，係由作用於結構上的載重，在虛變位期間所完成之功。因爲，當給予虛變位時，比類載重正以其全值作用，其所完成之功僅爲載重乘變位之積。特別的，集中載重之虛功，係力與其作用點上變位之乘積。在此種情況，變位之正方向必須與力之正方向採取相同的方向。假如載重爲一力偶，則該虛功，爲力偶之力矩與其所旋轉之虛角度的乘積

各應力合力的內在虛功 W_{int} 的評價，略較複雜。作用在一個元體上的各應力合力所做之虛功（圖 11 － 2 b），有賴於該元體在虛變位期間的虛變形。各種不同的虛變形如圖 11 － 3 所示。在圖之(a)部份，顯示在元體內包含一個均勻軸應變的虛變形；因此，元體增加了一個 $d\delta$ 量，此虛變形造成由軸應力所做的虛功爲（ $N + dN$ ）$d\delta$（圖 11 － 2b ）。但是彎力矩、剪力或扭曲力偶並未完成做功。我們再應注意，此時對於虛變形 $d\delta$ 的起因並未說明；很明顯的，此種虛變形並非起因於軸向力 N 的本身。其

另一種虛變位是一種撓曲的變形，包含着元體兩邊的一個相對旋轉角 $d\theta$（圖 11－3b）。在那樣的一個虛變形期間，惟一完成作功的應力合力爲彎力矩，而其虛功爲（$M+dM$）$d\theta$。一個剪力的及一個扭力的虛變形，分別在圖 11－3c 與d所示。前者包含元體的一邊對另一邊的側向移動 $d\lambda$，而後者包含一個對縱軸的相對旋轉 $d\phi$。與這些虛變形相結合的各項虛功爲（$V+dV$）$d\lambda$ 及（$T+dT$）$d\phi$。

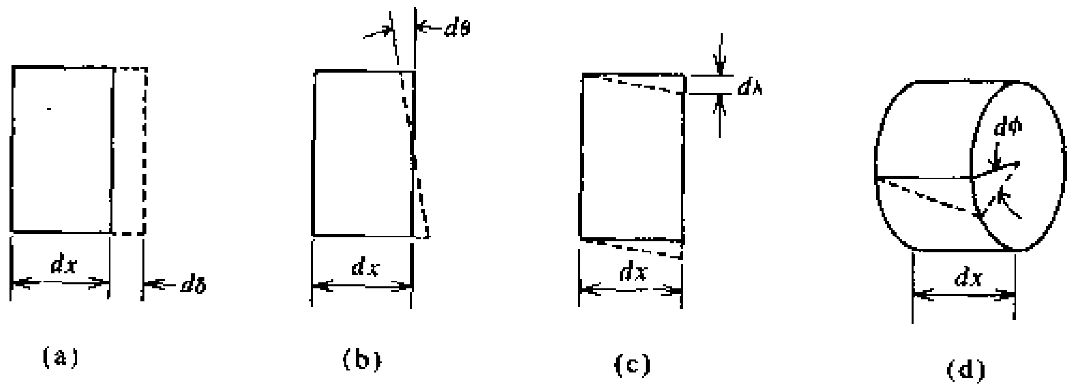


圖 11・3　一個結構元體的虛變形：
(a)軸向的，(b)撓曲的(c)剪力的(d)扭轉的

表示內虛功的前列四式中的每一個式子，若與有限項與微分之乘積（如 $Nd\delta$）比較，可藉省略兩個微分乘積（如 $dNd\delta$）而得簡化。因此，由作用於結構的一個元體，其各應力合力所完成的內在虛功的式子，變爲

$$N\,d\delta + M\,d\theta + V\,d\lambda + T\,d\phi$$

將結構內一切元體加以積分，卽得內虛功的完全式：

$$W_{\text{int}} = \int N\,d\delta + \int M\,d\theta + \int V\,d\lambda + \int T\,d\phi \qquad (11\text{-}2)$$

在此式中，各應力合力 N、M、V 及 T，爲結構內由于眞正載重所生的實際應力合力。而各變形 $d\delta$、$d\theta$、$d\lambda$ 及 $d\phi$ 反而皆爲與結構虛變位相結合的虛構變形。在次一節內，我們要發展一個利用方程式（11－1）及（11－2）以求結構變位的方法。

11.3 用單位一載重法計算變位

前節所述的虛功原理，可用以導出單位－載重法（ unit load method ）。此法爲求取結構變位的重要方法。我們早已討論過求取樑（見第六章）及簡單桁架（見 1.5 節）撓度方法。不過單位－載重法不僅可用於樑桁架，及其他若干種簡單的結構，且可用於具有許多構材所組成的很複雜結構。而且，單位－載重法亦適用於求取所有形式的變位，包括在結構內某一點的變位，一個構材軸的旋轉，兩點間的相對變位，以及其他。理論上，此法既可用於靜定結構，亦可用於靜不定結構。雖然此法由于實用爲目的，限用於靜定結構。因爲引用此法時需要知道整個結構的應力合力。

因爲單位載重法的基本方程式可自虛功原理導得，故該法有時亦被稱爲虛功法（ method of virtual work ）。又被稱爲假載重法（ dummy-load method ）及馬－摩二氏法（ Maxwell-Mohr method ）。前一個名稱，係因此法需用一個虛構的或假設的載重（即，單位載重）而得名。後一個名稱係因 J. C. Maxwell 在 1864 年與 O. Mohr 在 1874 年先後獨立發展此一方法而命名的 *

當使用單位－載重法時，必需考慮作用在結構上的兩個載重系統。第一個系統包括所受的實際載重、溫度變化、或其他必然產生而須加計算變位諸原因等的結構。第二個系統，包括一個單獨作用在結構上的單位載重。該單位載重爲一虛構或假設的載重，專爲計算該結構由于實際載重所起的變位 Δ 而引入的。該單位載重，必須與欲求的變位 Δ 相呼應。與變位相呼應的載重，意指該載重係作用在求變位的結構的特殊點上，並作用於該變位的正方向。此處所用的術語“變位”（ displacement ）係就概括的意義而言；因此，變位 Δ 可能是移動、旋轉、相對變位、或相對旋轉。假如要計算的變位是移動，則呼應的單位載重係一集中力，該力作用於移動發生之點，並將其正方向對正在移動的正方向。假如要計算的變位是旋轉的，則單位載重係作用在發生旋轉的結構，在該點上的力偶；該單位力偶的正向，必須與該旋轉的正向相同。假如變位係沿連接兩點的線上，作該兩點的相對移動，則該單位載重將包含兩個作用在該兩點的線向相同而方

---

*見參考書 11－1 與 11－4 。

向相反之力。最後，假如變位係在兩線間作相對的旋轉，則單位載重將包含兩個相等而相反的力偶。所有這些可能性稍後在本章內舉例說明之。

作用於結構上的單位載重，構成第二種載重系統，在各支承點產生反力，並在各構材內產生應力合力。讓我們將這些應力合力以符號指定爲N_U、M_U、V_U及T_U。這些與單位載重及反力的各量，共同構成一個在平衡狀態的力系。依據虛功原理，假如結構有一微小的虛變形（或形式上的改變），則各外力的虛功等於各內力的虛功（見方程式 11 − 1）。在單位 - 載重法的發展上，現已到了求解答的步驟：我們必須對虛變形妥爲選擇。讓我們把第一種載重系統使結構所引起的實際變形，一如強制加於第二種載重系統（具有單位載重的結構）的虛變形。在虛變形期間，惟一的外部虛功，乃由單位載重本身完成的功，因爲這是在結構上惟一的外在載重。此種虛功爲單位載重與單位載重移動的變位Δ；因此，

$$W_{ext} = 1 \cdot \Delta \tag{a}$$

此處Δ，代表由于實際載重所產生的結構變位（讓我們想像當初故意選擇單位載重使與Δ相呼應）。

內在虛功，是指當結構的各元體作虛假變形時，受各應力合力（N_U、M_U、V_U及T_U）所完成的功。不過，所選的虛變形，與在支承上由實際載重結構內發生的實際變形相同。圖 11 − 3 中以$d\delta$，$d\theta$，$d\lambda$及$d\phi$，來表示那些變形所得之內功，如（見方程式 11 − 2）

$$W_{int} = \int N_U\, d\delta + \int M_U\, d\theta + \int V_U\, d\lambda + \int T_U\, d\phi \tag{b}$$

最後，使外功等於內功（見方程式 a 及 b），得到單位 - 載重法的基本方程式爲：

$$\Delta = \int N_U\, d\delta + \int M_U\, d\theta + \int V_U\, d\lambda + \int T_U\, d\phi \tag{11-3}$$

在此方程式內，Δ代表要計算的變位，這變位可能是移動、旋轉、或相對

變位。應力合力N_U、M_U、V_U與T_U 代表因相當於Δ的單位載重而引起的軸向力、彎力矩、剪力與扭轉力偶等；而$d\delta$，$d\theta$，$d\lambda$及$d\phi$ 則代表因實際載重而引起的變形。因為單位載重被方程式（11－3）的左邊分開，祇剩下Δ項，就需要把N_U、M_U、V_U及T_U 各量當作每單位所加單位載重的力或力矩大小來考慮。

單位-載重法的基本方程式（方程式11－3）極為普通，對於材料或結構的行態並不受到任何限制。換言之，要使用方程式（11－3）並不需要重疊原理正與之相符。但最普通的情況，即為結構材料遵循胡克氏定律及結構行態作直線型狀。此時能容易的得到因作用於結構上的實際載重而引起各種變形$d\delta$、$d\theta$、$d\lambda$及$d\phi$ 的式子。假如我們表示由于實際載重使結構內的應力合力為N_L、M_L、V_L及T_L，則一個元體的變形為

$$d\delta = \frac{N_L\,dx}{EA} \qquad d\theta = \frac{M_L\,dx}{EI} \qquad d\lambda = \frac{\alpha_s V_L\,dx}{GA} \qquad d\phi = \frac{T_L\,dx}{GJ} \tag{c}$$

這些方程式中的第一個，可求得一個元體（見圖11－3a）由于軸向力N_L的伸長。同樣，其餘三個方程式可分別求得與撓曲、剪力、及扭轉相結合的變形（見圖11－3b、c及d）。全部四個式子，均根據在早先數章內所導得的各個方程式（見方程式1－9，6－25、6－43及3－8）。將此四個式子代入方程式（11－3）得單位-載重法的方程式為：

$$\Delta = \int \frac{N_U N_L\,dx}{EA} + \int \frac{M_U M_L\,dx}{EI} + \int \frac{\alpha_s V_U V_L\,dx}{GA} + \int \frac{T_U T_L\,dx}{GJ} \tag{11-4}$$

此方程式可用於作直線型的彈性材料，亦且適用重疊原理以求結構任意一點的變位Δ。方程式內的每一積分項，代表一種形式的變形對於總變位的貢獻。因此，第一個積分，從軸向變形的影響而對撓曲變形的貢獻，第二項是由撓曲變形而得的貢獻，以及其他得自其餘各項的貢獻。

用於出現在方程式（11－4）內的應力合力慣例符號必須一致；因此，軸向力N_U及N_L必定根據同一慣例符號求得，亦如M_U及M_L，V_U及V_L，與T_U及T_L亦同樣求得。惟有在這些情況下，變位Δ將永遠會得到與單位載重作相同的正方向。

用單位-載重法的方程式（11－4），可將計算變位的程序總括如下：①決定結構內因實際載重所引起的各應力合力N_L、M_L、V_L及T_L；

②相當於所要求的變位 Δ 在結構上放置一個單位載重；③決定因單位載重所引起的各應力合力N_U，M_U，V_U及T_U；④在方程式（11－4）內形成的各項，就全部結構的各個項目求其積分；⑤合計其結果求得變位 Δ 。這些步驟，將舉例說明於稍後所列的例題中。

依結構的形式，能預料一些在方程式（11－4）內的各項，將會不太需要。例如，一個具有樞接的桁架，其載重僅作用於接點處，於是在各構材內不會有撓曲、剪力或扭轉變形。在方程式（11－4）內祇需用第一項。而且，構材內的軸向應力在構材的全長係屬常數。所以，若各構材內皆爲等截面時，對一個構材的積分，產生$N_U N_L L / EA$。此處L爲構材長度，則桁架中一切構材的總和產生的撓度是

$$\Delta = \sum \frac{N_U N_L L}{EA} \tag{11-5}$$

此方程式顯示，桁架中任何接頭的撓度 Δ，可用下列程序求得：(1)決定所有構材，分別由單位載重及實際載重所得的N_U及N_L；(2)作出各構材的$N_U N_L L/EA$式；與(3)將一切構材的$N_U N_L L / EA$式相加，求得撓度

就樑或平面構架而言，往往祇有撓曲變形是重要的。所以單位－載重方程式可簡化爲

$$\Delta = \int \frac{M_U M_L \, dx}{EI} \tag{11-6}$$

上式可就結構的一切構材分別求其積分，然後將結構的一切構材的積分總和之即得。

一般言之，依結構的形式，自方程式（11－4）採用任何適當項目的組合以計算結構的各項變位，是可能做到的。

<u>溫度影響</u>

假如變位係受載重以外之影響所引起，如溫度變化。我們必須用$d\delta$、$d\theta$、$d\lambda$及$d\phi$等適當式子以代替專爲表示載重影響。如在方程式(c)所述。例如，溫度均勻增加，產生長度的增加（見圖11－3a）可用下列方程式表示之

$$d\delta = \alpha(\Delta T)\, dx$$

式中α爲熱膨脹係數，而ΔT爲溫度增加量（見方程式11－10）。於是

單位載重方程式（方程式11－3）可寫成下式

$$\Delta = \int N_U \alpha(\Delta T)\, dx \tag{11-7}$$

此方程式，卽使溫度改變 ΔT 沿着構材各軸變化時亦可應用；祇需將 ΔT 用 x 的函數來表示，並積分之卽可。不過，在普通情況下，溫度變化沿各構材長度爲一常數時，可將方程式（11－7）用全部構材的總和代替之

$$\Delta = \sum N_U \alpha L(\Delta T) \tag{11-8}$$

此處 L 爲構材的長度。由是 $N_U \alpha L(\Delta T)$ 項必須由結構的各個構材分別估算，然後將這些項目相加求得其變位。

當溫度從樑的一邊到另外一邊作直線型變化，但沿構材長度的溫度却並不變化時，其變形是屬於在圖11－3b所繪的形式，其變形 $d\theta$ 式爲

$$d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)\, dx}{h}$$

如方程式（6－41）所示，h 爲樑之高度，T_2 爲樑底面溫度，而 T_1 爲樑頂面溫度。因此，在這種條件下得

$$\Delta = \int \frac{M_U \alpha(T_2 - T_1)\, dx}{h} \tag{11-9}$$

在此方程式內，$d\theta$ 原係假定，當樑的上部纖維縮短而下部纖維加長時爲正，如在圖11－3b內所繪者。所以，爲了同樣條件，需把彎力矩令其爲正；意謂當樑的上部產生壓縮時，設 M_U 爲正。

相乘積積分之估算

當計算方程式（11－4）內的積分時，經常處理的構材，其材料的性質及橫截面的尺寸從構材一端至另一端，恆爲一致不變。所以，各種剛度 EA、EI、GA/α_s、及 GJ 等皆可置於積分之外。所餘一切積分皆成一相乘積的形式，如

$$\int M_U M_L\, dx \tag{11-10}$$

這些相乘積的積分必須就各個構材的全長計算之，然後將一切構材的估算值相加。對於任何特別構材，其相乘積中的各量（如 M_U 或 M_L）可沿構材軸線量度距離 x 的函數。此量可能沿其長度皆爲常數，可能沿其長度作直

線型變化，或可能爲一高次方的函數，如四次方或立方者。爲求節省運算時間，將這些相乘積的積分能預先估算而將各數列表備用。一個簡要的相乘積積分彙總表，包括最通常遇到的函數，如附表 11 − 1 所示。該表雖以函數 M_U 及 M_L 各項目表列出，顯然這些函數亦可爲任意其他函數，如 V_U 及 V_L 或 T_U 及 T_L 來代替。該表的用法將舉例說明於下列的幾個例題內。

【例題】1. 圖 11 − 4a 之桁架，在接頭 A 受到載重 P 與 $2P$。該桁架的所有構材假定皆爲等截面，且具同樣的軸向剛度 EA。試用單位 - 載重法計算該桁架接頭 B 處的水平與垂直撓度。

因爲各載重僅作用在接頭處。各構材內的軸向力，在整個構材的全長

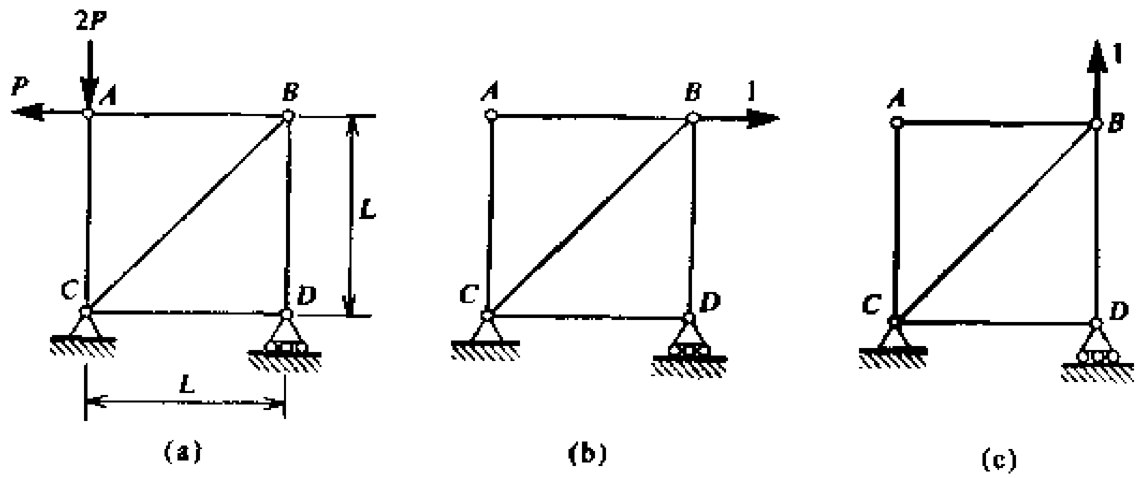


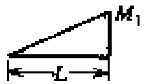
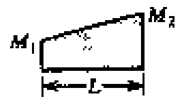
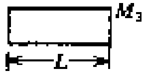
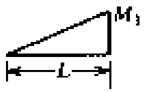
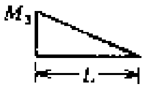
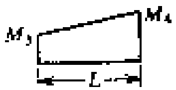
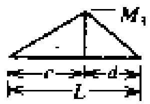
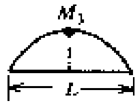
圖 11・4　例題 1　單位 - 載重法求桁架之撓度

內皆爲常數。所以，可用方程式（11 − 5）求所需的撓度。其計算皆列入附表 11 − 2 內。表內頭兩欄規定塡寫桁架各構材與其長度。用圖 11−4a 所示的桁架靜平衡分析求得的各軸向力 N_L，列入該表第三欄內（拉力爲正）。

爲求接頭 B 的水平撓度 δ_H，在結構上的 B 點（見圖 11 − 4b）引入一個水平單位載重，由單位載重產生的各軸向力 N_U 列入附表第四欄。其次，計算各構材之 $N_U N_L L$ 相乘積，並加起來（第五欄）。以 EA 除之得所需的變位爲：

$$\delta_H = -3.828 \frac{PL}{EA}$$

表11－1　$\int_0^L M_U M_L \, dx$ 之各數值

M_U ＼ M_L				
	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{L}{2}(M_1 + M_2)M_3$	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{2L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{6}(M_1 + 2M_2)M_3$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{a}{L}\right)M_1 M_3$	$\frac{L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1 M_3$	$\frac{L}{6}(2M_1 + M_2)M_3$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{b}{L}\right)M_1 M_3$	$\frac{L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1(M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} M_1(2M_3 + M_4)$ $+ \frac{L}{6} M_2(M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{b}{L}\right)M_1 M_3$ $+ \frac{L}{6}\left(1 + \frac{a}{L}\right)M_1 M_4$	$\frac{L}{3} M_1(M_3 + M_4)$
	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{c}{L}\right)M_1 M_3$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{d}{L}\right)M_1 M_3$ $+ \frac{L}{6}\left(1 + \frac{c}{L}\right)M_2 M_3$	For $c \leq a$: $\frac{L}{3} M_1 M_3$ $- \frac{L(a-c)^2}{6ad} M_1 M_3$	$\frac{L}{3}\left(1 + \frac{cd}{L^2}\right)M_1 M_3$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{3}(M_1 + M_2)M_3$	$\frac{L}{3}\left(1 + \frac{ab}{L^2}\right)M_1 M_3$	$\frac{8L}{15} M_1 M_3$
	$\frac{L}{4} M_1 M_3$	$\frac{L}{12}(M_1 + 3M_2)M_3$	$\frac{L}{12}\left(1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2}\right)M_1 M_3$	$\frac{L}{5} M_1 M_3$

註：所有附圖曲線均為二次拋物線，其頂點用黑點表示之

式內負號，表示撓度所在的方向與單位載重方向相反。亦即，該撓度係向左方。

求接點B的垂直撓度δ_V亦用同樣程序。在圖11－4c內，畫上相當的單位載重（取向上爲正）。將此種載重條件的各軸向力N_U列入附表之第六欄內。在最後一欄，計入各項相乘積$N_U N_L L$，並加起來。最後以EA除其和得

$$\delta_V=\frac{PL}{EA}$$

因爲得數爲正值。得知受載重P及$2P$所產生在接頭B處的垂直撓度，其方向爲向上的。

表11－2　例題1之計算

(1) 構材	(2) 長度	(3) N_L	(4) N_U	(5) $N_U N_L L$	(6) N_U	(7) $N_U N_L L$
AB	L	P	0	0	0	0
AC	L	$-2P$	0	0	0	0
BD	L	P	-1	$-PL$	1	PL
CD	L	0	0	0	0	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2.828PL$	0	0
				$-3.828PL$		PL

在本例題內，爲求簡單計，假定一切桿件具同一截面積。假如情況並非如此，表列這些面積，就需要在附表11－2內另外加列一欄。然後，我們要計算$N_U N_L L/A$，以代替第五及第七欄內的$N_U N_L L$。各構材可能具有不同彈性模數，同樣亦可適應。

【例題】2　在本例題內，我們欲再考慮圖11－4a所示的桁架載重。但不求接頭的撓度，僅求一根構材的旋轉角及兩接頭間距離的改變。首先假定要求構材AB的旋轉角。一般言之，相當於一個旋轉角的單位載重，將爲一個單位力偶。對於本例題，包含了作用在構材AB兩端的相等而相反各力的單位力偶，如圖11－5a所示。各力等於該單位力偶除桿件AB的長度。在此易於瞭解的，相當於該力偶的變位，爲桿件AB的反時針走向旋轉；我們僅需注意此兩力在該桁架的虛變形期間所完成的外功，將爲

$$W_{ext}=\frac{1}{L}(\delta_a)+\frac{1}{L}(\delta_b)=\frac{1}{L}(\delta_a+\delta_b) \qquad \text{(d)}$$

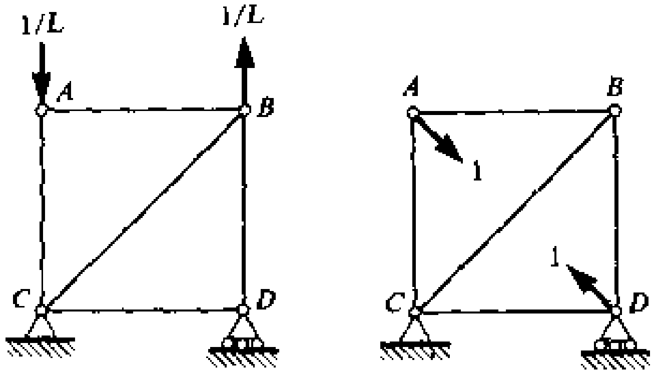


圖 11 . 5　例題 2

此處 δ_a 爲接頭 A 的向下撓度，δ_b 爲接頭 B 的向上撓度。在方程式(d)內各項的單位，因各個"1"代表單位力偶，並具有長度乘力的單位。兩個撓度 δ_a 及 δ_b 之和，除構材的長度，成爲構材 AB 的旋轉角：

$$\theta_{ab} = \frac{\delta_a + \delta_b}{L} \tag{e}$$

由方程式(d)及(e)，得到如所預期的

$$W_{ext} = 1 \cdot \theta_{ab} \tag{f}$$

因此，以圖 11－5a 所示的二力而形成的單位力偶的應用，將使我們求得旋轉角 θ_{ab}。

附表 11－3 表示本例題的計算；其前三欄與附表 11－2 相同，但第四欄包含圖 11－5a所示的各載重的軸向力 N_U，第五欄表示 $N_U\,N_L\,L$ 之相乘積，由這些項目之和，得 $\theta_{ab} = \dfrac{3P}{EA}$

附表 11－3　例題 2 之計算

(1) 構材	(2) 長度	(3) N_L	(4) N_U	(5) N_UN_LL	(6) N_U	(7) N_UN_LL
AB	L	P	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707PL$
AC	L	$-2P$	$-1/L$	$2P$	$-1/\sqrt{2}$	$1.414PL$
BD	L	P	$1/L$	P	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707PL$
CD	L	0	0	0	$-1/\sqrt{2}$	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	0	0	1	$-2PL$
				$3P$		$-2PL$

附表內得數為正號，意指桿件作反時針走向旋轉。因此求得由載重P及$2P$所產生的旋轉角。對於求取任何其他構材的旋轉角，可照相似程序進行。

其次，讓我們仍舊考慮圖11－4a內桁架的另外一種變位形式，即，兩點間距離的改變。假定需要決定接頭A與D在沿著連接兩個接頭的線上的相對移動δ_{ad}。該相當的單位載重包含兩個相等而相反，並沿着從A到D（見圖11－5b）的線上作用之力。在桁架內所發生的各個軸向力N_U列入表11－3 之第六欄內，而$N_U\ N_L\ L$ 諸相乘積列入第七欄。因此，接頭A與D的相對移動為

$$\delta_{ad} = -\frac{2PL}{EA}$$

其中負號表示A與D二點間的距離業已增加（即，距離與單位載重的本來指向相反）。

【例題】3. 在本例題內，我們要考慮圖11－4a所示桁架各桿件中的一桿件所起溫度均勻變化的影響。假定構材BD受到溫度均勻地增加量ΔT。所以該構材長度亦增加了$\alpha L(\Delta T)$。為了計算該桁架各接頭的撓度，必須用方程式（11－8）。但因該桁架惟一的桿件是因溫度變化而有長度的改變，故在方程式（11－8）所示的總結，亦將祇有一項。

當求取接頭B由於溫度變化而起的水平撓度，可用圖11－4b所示的單位載重，並從表11－2 的第四欄取得N_U。因此，在BD桿內之為$N_U = -1$，而水平撓度為

$$\delta_H = -\alpha L(\Delta T)$$

其中負號，意指撓度係朝向左方。用相似的程序，能容易的計算出該桁架任何其他各點上的變位。

【例題】4. 在本例題內，對各種樑變位方面的考慮。例如一個等截面懸臂樑上，其中一部分，支承強度q的均佈載重時，欲求其自由端B的撓度δ及旋轉角θ（見圖11－6a）。為此目的，用一種單位載重方程式形式，其中祇考慮各撓曲變形的影響（見方程式11－6）。

如果取左端A為座標軸的原點，並向右量度x，於是由於載重所起的彎力矩方程式分別為

$$M_L = -\frac{q}{2}(a-x)^2 \qquad 0 \le x \le a$$

$$M_L = 0 \qquad a \le x \le L$$

此處的正彎力矩，在樑上面將起壓縮力。

相當於撓度 δ 的單位載重如圖 11 － 6b所示，此載重所起的彎力矩爲

$$M_U = -1(L-x) \qquad 0 \le x \le L$$

將M_U 及M_L 代入方程式（ 11 － 6 ）而積分之，可得在B點的向下撓度：

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^a (-1)(L-x)\left(-\frac{q}{2}\right)(a-x)^2\,dx = \frac{qa^3}{24EI}(4L-a)$$

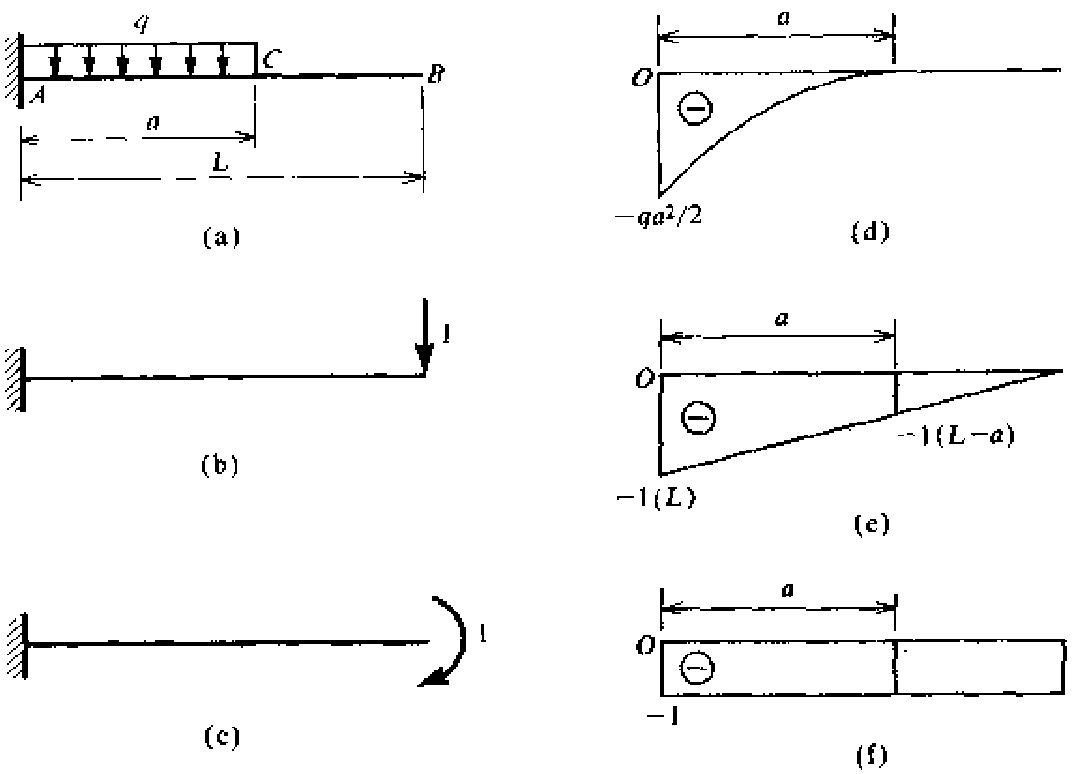


圖 11．6　例題 4　用單位－載重法求樑之變位

求旋轉角 θ 的程序，除去單位載重改用單位力偶外，其餘均爲相似，如圖 11 － 6c所示。由于單位載重所起之彎力矩爲

$$M_U = -1 \qquad 0 \le x \le L$$

單位－載重方程式變爲

$$\theta = \frac{1}{EI}\int_0^a (-1)\left(-\frac{q}{2}\right)(a-x)^2\,dx = \frac{qa^3}{6EI}$$

上式爲正號，表示 θ 角與單位載重具相同的旋轉方向（順時針走向）。

欲用相乘積的積分以求取變位，使用附表 11 － 1，亦爲一可行的程序。載重 q 的彎力矩圖，如圖 11 － 6d所示，順沿距離 a ，爲一個二次拋物線。單位載重在該樑同一區段內的力矩圖，分別爲一梯形與一三角形（見

11 － 6e 及 f ）。從附表 11 － 1 取一拋物線及一梯形情況之值，可得相乘積積分值：

$$\frac{a}{12}[-1(L-a)-3(L)]\left(-\frac{qa^2}{2}\right)=\frac{qa^3}{24}(4L-a)$$

再除 EI ，即得如以前一樣的撓度 δ 式。又，一個拋物線與一個矩形（可從附表 11 － 1 內取一梯形，使 $M_1=M_2$ 求得之），產生

$$\frac{a}{12}(-4)\left(-\frac{qa^2}{2}\right)=\frac{qa^3}{6}$$

用此式可得與前項求得的旋轉角 θ 之式。將相乘積積分表與彎力矩圖共同使用，常比用先寫彎力矩方程式，再予積分更為迅捷。

【例題】5　有一跨度長 L 與向外伸出 b 長（圖 11 － 7a）之樑 ABC，受到一溫度變化，這種溫度在該樑頂面為 T_1 ，在樑下面為 T_2 試計算該樑

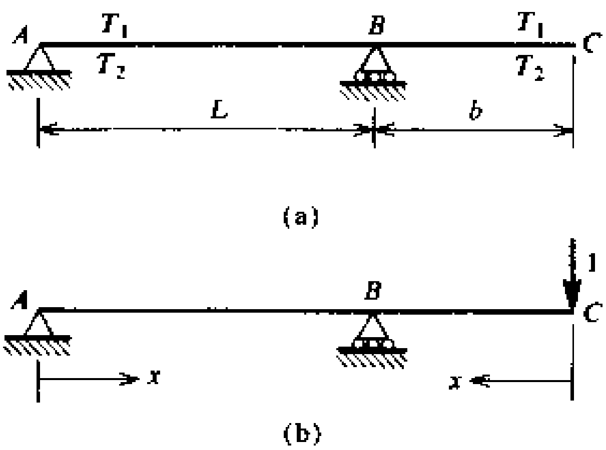


圖 11．7　例題 5 具有溫度差之樑

引伸部份末端的垂直撓度 δ_c 。

相當 δ_c 的單位載重，繪在圖 11 － 7b 內。在 AB 區段由單位載重所引起的彎力矩為

$$M_U=-1\left(\frac{b}{L}\right)x \qquad 0\leq x\leq L$$

此處 x 係由 A 向右量的距離。同樣，在 BC 區段的彎力矩為

$$M_U=-1(x) \qquad 0\leq x\leq b$$

此處 x 是從 C 向左量的距離。在該樑的兩部分內，彎力矩 M_U 皆爲負值。因爲在該樑的頂面皆起拉力。

現在知道了彎力矩，便能直接代入方程式（11－9）得到撓度：

$$\delta_c = \int_0^L -1\left(\frac{b}{L}\right)(x)\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}\,dx + \int_0^b -1(x)\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}\,dx$$

由上式得

$$\delta_c = \frac{\alpha b(T_1 - T_2)(L+b)}{2h}$$

此處 h 爲樑之高度，而 α 爲熱膨脹係數。假如 δ_c 的計算值爲負，則實際上所起的撓度向上；此種條件不論何時，T_2 祇要大於 T_1 即會存在。

【例題】6. 圖 11－8a 所示的平面構架 ABC，在 A 點有一固定支承，並在自由端承載一個垂直載重 P。構材 AB 與 BC 被堅固地連接在 B 點，而該構架的各構材皆具有不變的撓曲剛度 EI。試定出水平撓度 δ_H，垂直撓度 δ_V，與 C 點的旋轉角 θ。

受載重 P 所引起的彎力矩 M_L，已在圖 11－8b 繪出，圖中諸彎力矩關係已繪在各構材起拉力的各邊上。圖中最後的三部份中，有相當於在 C

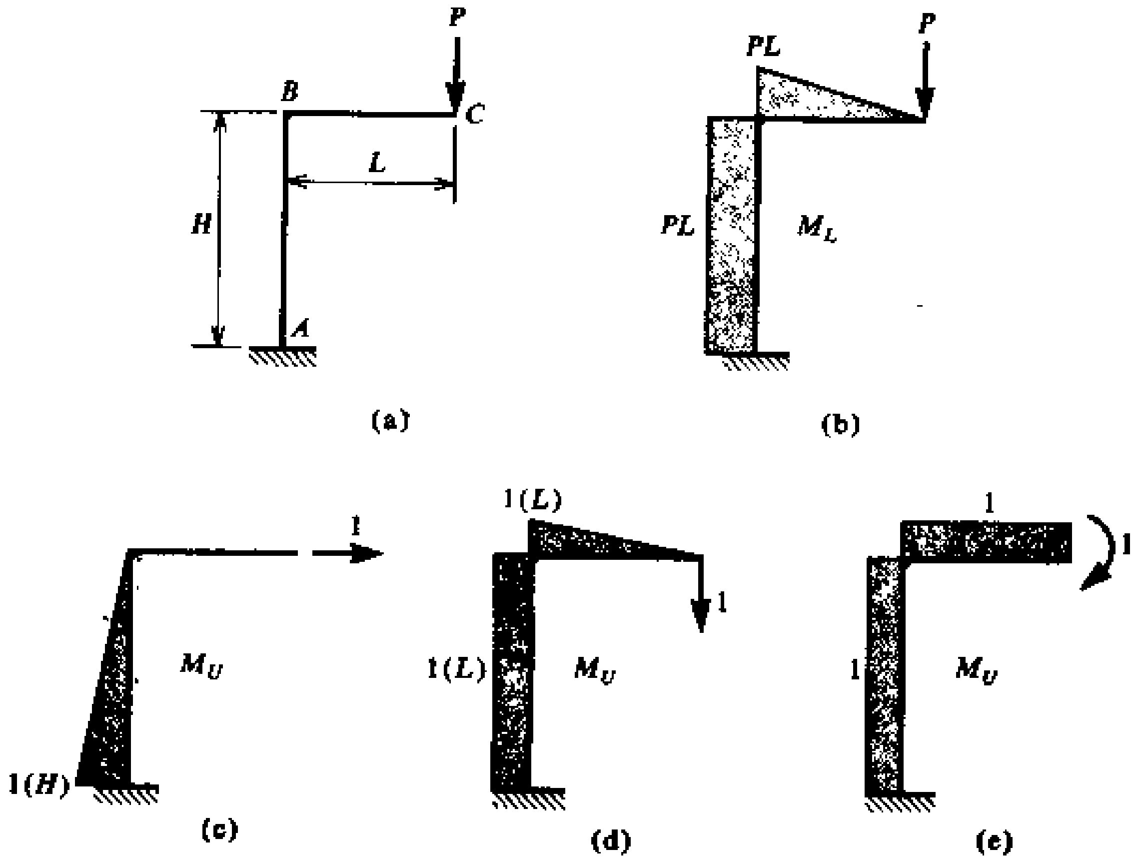


圖 11-8 例題 6 與 7 平面架構之變位

點的水平撓度、垂直撓度及旋轉角的單位載重。在各種情況下，將完整的彎力矩 M_U 圖亦表示出來，再繪在構材的拉力邊上。

已知彎力矩，我們即能用積分（見方程式11－6），或用排列於附表11－1內的相乘積積分公式，得到撓度。後面一種方法，在本例題內似較簡單。例如，求 δ_H，從圖11－8c取得 M_U，並從圖11－8b求得 M_L。然後用附表11－1，得

$$\frac{H}{2}(1)(H)(PL)$$

以 EI 除之

$$\delta_H = \frac{PLH^2}{2EI}$$

得 C 點的水平撓度式

其垂直撓度，以相似方法依圖11－8b及d求得之。對於構材 BC，有兩個三角形情況，對於構材 AB 則有兩個矩形；因此，從附表11－1可得

$$\frac{L}{3}(1)(L)(PL) + \frac{H}{2}(2L)(PL) = \frac{PL^3}{3} + PL^2H$$

而垂直撓度為

$$\delta_V = \frac{PL^2(L+3H)}{3EI}$$

最後，用圖11－8b及e與附表11－1，得

$$\frac{L}{2}(PL)(1) + \frac{H}{2}(1)(2PL) = \frac{PL^2}{2} + PLH$$

由上式得

$$\theta = \frac{PL(L+2H)}{2EI}$$

因此，所求之構架變位均已定出。

【例題】7. 在例題6內所敘述的平面構架，定出對構材內因受軸向變形所引起的 δ_H、δ_V 及 θ 等變位而成另增之量。假定兩邊構材皆具不變的軸向剛度 EA。

藉方程式（11－5）之助，可求得該項額外的增加變位。在該方程式內各軸向力 N_L，因受圖11－8a所示的載重 P 所引起之力；在構材 AB 內的惟一力為 $N_L = -P$。為求水平撓度 δ_H，可自圖11－8c取軸向力 N_U。在構材 BC 內惟一的力為 $N_U = 1$；因為，我們斷定水平撓度 δ_H 並不受軸向變形的存在的影響。

爲求得垂直撓度 δ_V，可從圖 11－8d 觀察得到，惟一受單位載重所引起的軸向力，爲構材 AB 的 $N_U=-1$ 。因此，由于軸向變形（自方程式 11－5 ）而起的垂直撓度爲

$$\sum\frac{N_U N_L L}{EA}=\frac{(-1)(-P)(H)}{EA}=\frac{PH}{EA}$$

此撓度之量，可加于早先得自例題 6 的得數，得接頭 C 的總垂直撓度

$$\delta_V=\frac{PL^2(L+3H)}{3EI}+\frac{PH}{EA}$$

當以數值代入此式時，往往發現該式中代表軸向變形影響的末項，與第一項比較極爲微小。爲了，在普通分析平面構架時，祇考慮撓曲變形的影響，而不計軸向變形的貢獻。

爲完成此項例題，現在轉向旋轉角 θ ，並觀察到該相當單位載重（圖 11－8e）在各構材內並未產生軸向力。因此，θ 並不受軸向變形的出現而受影響。

【例題】8　一個彎曲桿 AB 的中心線，其形狀以 R 爲半徑的圓的四分之一，如圖 11－9a所示。該桿在 A 處有一固定支承，並在自由端 B 處負荷一個垂直載重 P 。試求在 B 點的水平撓度 δ_H 式。

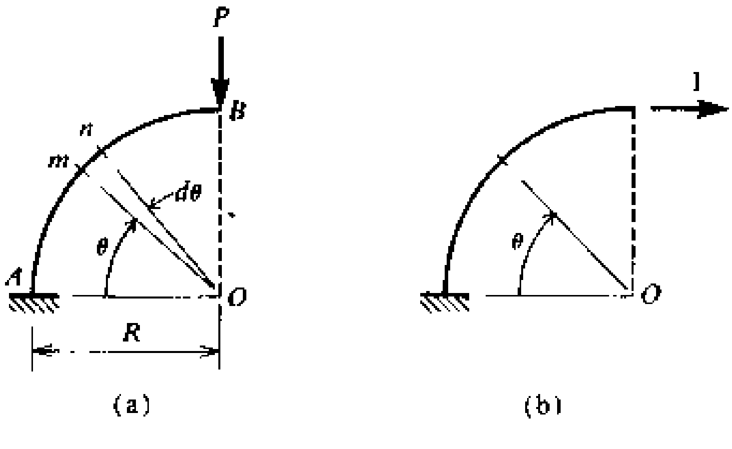


圖 11－9　例題8 曲桿件之撓度

求彎曲桿變位的單位－載重方程式，可寫成一般形式爲

$$\Delta=\int\frac{M_U M_L\,ds}{EI}\qquad(11\text{-}11)$$

此處 ds 等於 $R\,d\theta$，爲該桿的一個元體 mn 的長度。假定該桿體厚度與半

徑R相比其值甚小，在以上原爲直線桿的彎曲公式可以應用＊。

受載重P引起的彎力距爲$M_L = -PR\cos\theta$，此處正力矩被假定在彎曲桿外邊產生壓力。又，由于一個水平單位載重所起之彎力矩M_U（圖11－9b）爲$M_U = -R(1-\sin\theta)$。將M_U與M_L代入方程式（11－11）並積分之，得

$$\delta_H = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}(-R)(1-\sin\theta)(-PR\cos\theta)R\,d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

即爲B點的水平撓度。採用單位－載重法求得者。

11．4 樑之剪力撓度

虛功原理與單位－載重法，對於尋求樑受剪力影響所引起的撓度工作，提供極佳的途徑。早在6.11 節中曾提出剪力撓度的討論，曾利用撓曲線的微分方程式，其中包括一項相當於剪力係數（shear coefficient）α_s。此剪力係數是，等於該樑在中性軸之剪應力與平均剪應力（以矩形樑爲例，$\alpha_s = 3/2$）之比值。同樣的剪力係數出現在單位－載重法的一般性方程式內（方程式11－4）。不論使用微分方程式方法或使用方程式（11－4）求得的剪力撓度，皆爲近似值。至少有兩個理由：第一，因爲該撓度皆基於在中性軸處的剪力應變，並未將全部樑高的剪力應變的變化計入；第二，因爲撓度僅基於純彎曲的情況導得之彎曲理論。後者的缺點祇能藉更精確的彈性理論各種方法（一些已在6.11 節內提供結果）予以矯正。但前者的缺點，可使用虛功原理（見方程式11－11）就該樑的全部體積積分之，求得內功而除去。此種辦法，可導出一個比剪力係數α_s更爲精確的因數，現將詳細加以解說如下。

求各種樑撓度的單位－載重法，是基於虛功原理。該原理需先求外功與內功的式子。因爲單位載重爲結構上的惟一載重，如在前節方程式(a)所提供者，外功式子爲$W_{ext} = 1 \cdot \Delta$。在該方程式內，Δ代表由于該樑上實際載重所起的撓度，而1代表與該撓度相當的單位載重。

＊在“高等材料力學”書中，載有關於各種厚曲桿件的彎曲的描述。

內在虛功，即為樑內各應力（各應力，係由單位載重所引起者）。與由實際載重所引起的全部變形而移動時所完成的功。以前，曾考慮過四種可能的應力合力－軸向力、彎力矩、剪力、與轉矩。因為我們現在的注意力，僅限於樑的剪力撓度，故應將各軸向力與轉矩略去不計。又以前在誘導公式時，曾用各個應力合力，並以一個樑內元體的適當變形量乘每個合力而得內部的虛功；照此進行，乃得前節中之方程式(b)。可是，現在我們要將樑內各應力直接加以處理，並就樑的體積積分之，以求內部的虛功。

讓我們考慮一個承受單位載重之樑，切出微分元體的尺寸為 dx、dy、dz（圖 11－10a）。作用於該元體各邊的，將為由單位載重所產生的彎力矩 M_U 及剪力 V_U 而引起的各個正交應力 σ 與剪應力 τ（圖 11－10b）。這些應力，可由撓曲與剪力公式計算出來(方程式 5－10 與 5－18)：

$$\sigma = \frac{M_U y}{I} \qquad \tau = \frac{V_U Q}{Ib}$$

當用單位－載重法時，給與元體的虛變形，使與受實際載重而引起的變形相同。這些變形包括一個受彎力矩 M_L 而引起的擴張（圖 11－10c）與一

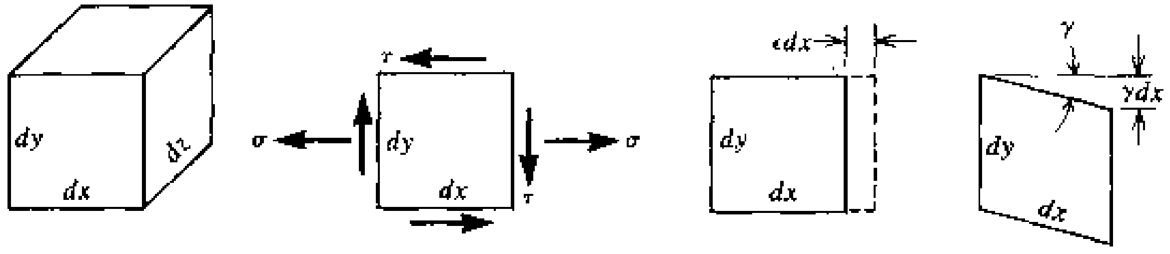


圖 11－10

個受剪力 V_L 而引起的剪力畸變（圖 11－10 d）。這些變形結合乃由擴張應變 ϵ 與剪力應變 γ 分別為

$$\epsilon = \frac{M_L y}{EI} \qquad \gamma = \frac{V_L Q}{GIb}$$

所以，作用在微分元體上的各個應力 σ 與 τ 的內在虛功為

$$dW_{\text{int}} = (\sigma\, dy\, dz)(\epsilon\, dx) + (\tau\, dy\, dz)(\gamma\, dx)$$
$$= \frac{M_U M_L y^2}{EI^2}\, dx\, dy\, dz + \frac{V_U V_L Q^2}{GI^2 b^2}\, dx\, dy\, dz$$

將上式就該樑全部體積予以積分，求得總內在的功爲

$$W_{int} = \int \frac{M_U M_L y^2}{EI^2} dx\, dy\, dz + \int \frac{V_U V_L Q^2}{\quad} dx\, dy\, dz$$

在該樑的截面爲已知，則以下各數量M_U、M_L、V_U、V_L、E、G及I等皆爲常數。因之，上式可予簡化。所以，我們能將前面的積分式分開，成爲一個對截面面積的積分，與一個沿該樑的軸線的積分。其式如下：

$$W_{int} = \int_L \frac{M_U M_L}{EI^2} \left[\int_A y^2\, dy\, dz\right] dx + \int_L \frac{V_U V_L}{GI^2} \left[\int_A \frac{Q^2}{b^2} dy\, dz\right] dx \qquad \text{(a)}$$

此處L與A兩個符號，分別表示就該樑的長度L，與就截面面積A所施的積分。在上述(a)方程式的第一項方括弧內，可看出是一個截面的慣性矩I。第二項方括弧內，亦是依該樑的截面尺寸而定。所以，給一個新的截面性質f_s，稱爲剪力形狀因數（form factor for shear）下一定義尙屬方便。茲將此因數作一定義如下：

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \qquad \text{(11-12)}$$

此處$dA = dy\, dz$代表該樑截面內的一個元體。形狀因數，係一可就各特殊斷面形式之樑加以估計的無次元數量。以後將舉例說明之。茲將在方程式(a)的兩個方括弧內各項，分別換以I及$f_s I^2/A$，則得內在虛功的算式爲：

$$W_{int} = \int \frac{M_U M_L\, dx}{EI} + \int \frac{f_s V_U V_L\, dx}{GA}$$

最後，使外在功與內在功相等，得撓度Δ的單位-載重方程式爲：

$$\Delta = \int \frac{M_U M_L\, dx}{EI} + \int \frac{f_s V_U V_L\, dx}{GA} \qquad \text{(11-13)}$$

式內單位-載重已從方程式內去掉（一如在誘導方程式11－3時所爲者）。就樑的彎力矩與剪力效果而論，可用方程式11－13求其撓度。方程式右邊的第一項與先前所得的撓曲項是一樣的（見方程式11－4）。不過，第二項與先前所得的剪力項微有不同；其差異在於剪力係數α_s被形狀因數f_s所代替。因此，樑之剪力剛度的含義現在定爲GA/f_s以代替$GA/$

α_s 。

對於各別特殊形式的截面，必須用方程式（ 11 － 12 ）以估計剪力形狀因數值 。例如 ，假如截面爲一寬度 b 及高度 h 的矩形（見圖 5－12 ），第一力矩 Q 的算式將爲（見第 5．3 節，方程式 d ）

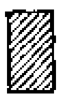
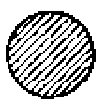
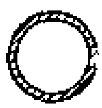
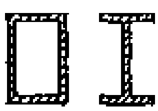
$$Q=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right)$$

就矩形樑而言，該 A/I^2 數量等於 $144/bh^2$ 。所以，該形狀因數爲

$$f_s=\frac{144}{bh^5}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{4}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right)^2 b\,dy_1=\frac{6}{5}$$

在類似情況下，其他截面的形狀因數亦可計算得出 。例如，實心圓截面的形狀因數爲 10 / 9，薄壁管狀截面者爲 2 。關於 I 字樑或箱形樑，可假定剪應力係均佈於腹鈑的全高，略等於剪力除腹鈑截面積（見 5.3 節及圖 5 － 14 ）；這些假設導致的結論，樑的形狀因數是 A/A_{web}，其典型的數字係在 2 至 5 的範圍內 。在表 11 － 4 內提供一有關各種剪力係數 α_s 與各種形狀因數 f_s 值的比較 。

表 11－4　剪力係數 α_s 與形狀因數 f_s

	截面	α_s	f_s
	矩形	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
	圓形	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$
	薄管	2	2
	I 字或箱型截面	$\frac{A}{A_{web}}$	$\frac{A}{A_{web}}$

讓我們用單位 - 載重法（方程式 11 － 13）作爲決定樑之剪力撓度的實例。求簡支樑負均佈載重在樑中點之撓度。以座標距離 x，從樑之左邊支承點量起，由于實際載重所起的彎力矩與剪力算式爲

$$M_L = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \qquad V_L = \frac{qL}{2} - qx$$

此處 L 爲樑的長度，q 爲均佈載重強度。作用於該樑中點的單位載重產生下列彎力矩與剪力：

$$M_U = \frac{1(x)}{2} \qquad V_U = \frac{1}{2} \qquad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

將以上各值代入方程式（ 11 － 13 ）獲得下列樑中點的撓度算式：

$$\delta = \frac{2}{EI}\int_0^{L/2} \frac{x}{2}\left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)dx + \frac{2f_s}{GA}\int_0^{L/2} \frac{1}{2}\left(\frac{qL}{2} - qx\right)dx$$

$$= \frac{5qL^4}{384EI}\left(1 + \frac{48f_s EI}{5GAL^2}\right) \tag{11-14}$$

以上結果，除形狀因數 f_s 代替了剪力係數 α_s，其餘與早先用微分方程式求解（見方程式 6 － 46 ）所得者相符。

假如有一集中載重 P 作用於簡支樑中點的情況，使用單位 - 載重法，求樑中點的撓度，其式如下

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}\left(1 + \frac{12f_s EI}{GAL^2}\right) \tag{11-15}$$

在上式中，若將 α_s 代替 f_s，即與方程式（ 6 － 50 ） 完全相同。對於在懸臂樑的自由端負一集中載重時，用單位 - 載重法獲得的自由端撓度式爲

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{f_s PL}{GA} \tag{11-16}$$

此時可注意的是，用單位 - 載重法得到最後結果時，並未對固定端作任何假設。可是，當假設在固定端的限界條件爲可能自由發生反曲，而位在中性軸元體的垂直邊，仍保持垂直（見 6.11 節方程式(j)時，方程式（ 11 － 16 ）的右邊第二項與先前 6.11 節的特殊情況，將成一致。對於在固定端的其他條件，用早先的方法將提供不同的結果。因此，當使用單位 - 載

重法時，在固定端關於限界條件將有隱含的假設 *。

剪力之應變能

在承受剪應力 τ（見圖 11 － 10b及d）之樑的元體內，其剪力應變能等於 $u\,dx\,dy\,dz$ ，但 u 爲單位體積的應變能。該單位體積的應變能爲 $u=\tau^2/2G$ ，如由方程式（1－23a）所提供者。因此，我們可以剪應力 τ 爲項以表示剪力的應變能 dU_s 如下：

$$dU_s=\frac{\tau^2}{2G}\,dx\,dy\,dz$$

因爲剪應力 τ 等於 VQ/Ib ，故剪力的應變能可化爲

$$dU_s=\frac{V^2Q^2}{2GI^2b^2}\,dx\,dy\,dz$$

將此式就該樑的整個體積加以積分，得剪力的總應變能爲：

$$U_s=\int_L\frac{V^2}{2GI^2}\left[\int_A\frac{Q^2}{b^2}\,dy\,dz\right]dx$$

同前，此處符號 L 與 A ，表示兩種積分式，分別順着樑的長度並就全部截面面積來估算。在方括弧內之項，等於 $f_s I^2/A$ 。—如與方程式（11－12）相比較所示。所以，U_s 的算式可簡化爲

$$U_s=\int\frac{f_sV^2\,dx}{2GA}\tag{11-17}$$

此方程式提供了以剪力 V 爲項之樑的剪力應變能。該式除以 f_s 代替 α_s 外，與以前所導得的剪力應變能的方程式皆屬相符。

一般而論，在求取由于剪力而引起樑的撓度，或估算其應變能時，寧可使用形狀因數 f_s 而不用剪力係數 α_s 。形狀因數 f_s 非常接近用彈性理論方法算得更精確之值（見方程式 6 － 53 ）。

11．5　互換定理

在本節內，我們將採用應變能觀念，以誘導互換變位定理及互換功定

---

*在參改書 6 － 18 內可查得用單位－載重法求得由剪力而引起樑的撓度表。

理。這些互換定理（ reciprocal theorem ）在許多情況中皆屬有用。且在結構分析中，負有重要任務。而且，由互換定理，便可應用於一切直線型彈性結構的基本理論觀念得以具體化。

互換變位定理

為了舉例說明此一定理，讓我們取一懸臂樑 AB 為例（圖11－11a），該樑在自由端承受一個集中載重 P。經由附錄D內的公式，求得該樑在中點 C 之撓度為

$$\delta_{cb}=\frac{5PL^3}{48EI}$$

在上列方程式內的 δ 所用的註脚字母，第一個小註脚字母表示撓度發生之點，第二個小註脚字母表示施加載重之點。因此，符號 δ_{cb} 表示在 B 點作用的載重引起在 C 點上的撓度。

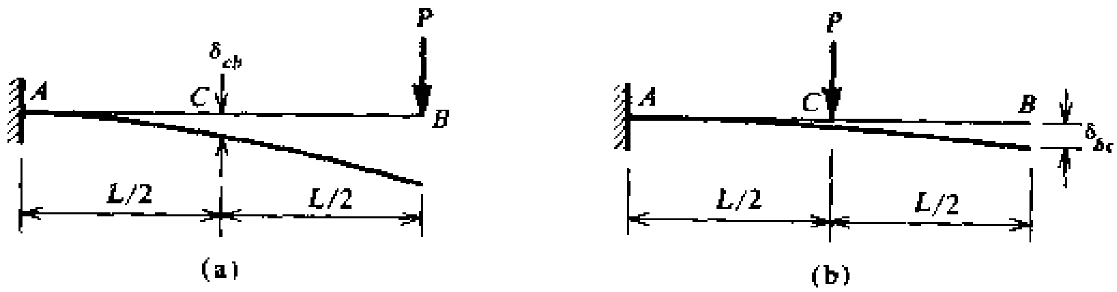


圖 11・11　互換變位定理

現在讓我們考慮同一根懸臂樑，其載重 P 係作用於其中點 C（圖11－11b）。此時如希望求得在自由端 B 的撓度，以撓度所用的符號以 δ_{bc} 表示之。再參考附錄D內的公式，得

$$\delta_{bc}=\frac{5PL^3}{48EI}$$

此式等於撓度 δ_{cb}。因此，我們觀察到，在 B 點作用的載重 P 使 C 點所起的撓度，等於在 C 點作用的載重使在 B 點所起的撓度。這種說法，卽為互換變位定理（ reciprocal displacement theorem ）之一特殊情況。

為了用更通俗的用語來證明該項定理。讓我們考慮一個具有任意形式的結構，並假定承受兩種載重情況。為方便計，取一個簡支樑來討論（見圖11－

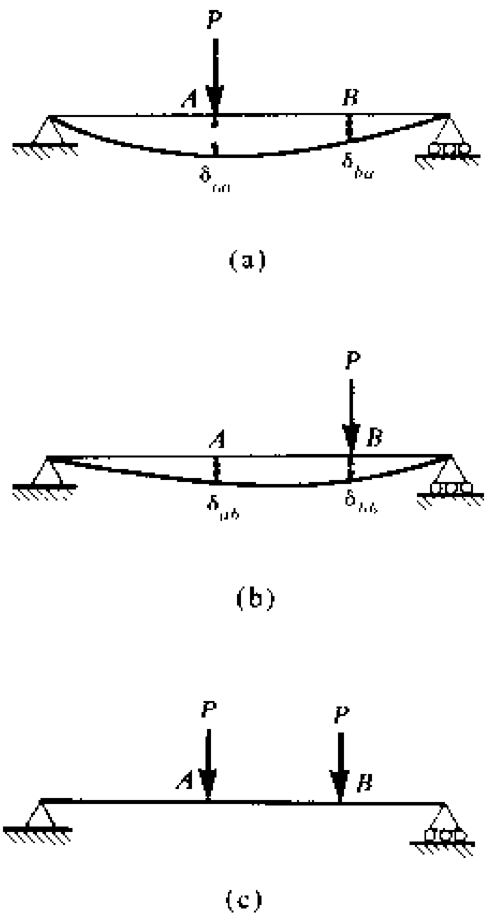


圖 11 - 12 互換變位定理

12)。但任何其他行態作直線型的結構，亦能滿足。在第一種載重情況下，一個P力作用在結構的任意點A上（圖 11 － 12a ）。而在第二種情況下，該同樣載重P作用在其他任意點B上（圖 11 － 12 b ）。對於第一種載重情況下，A與B二點的撓度，依據已經描述過的註腳符號（subscript notation ）各以δ_{aa}與δ_{ba}來表示。在類似情形，對於第二種載重情況，兩個撓度分別定爲δ_{ab}與δ_{bb}。

兩根樑的撓度，亦可用介於載重與變位間的對應（ correspondence ）觀念加以敍述（見 11.3 節）。例如，撓度δ_{aa}及δ_{ab}皆與圖 11－12a 所示的載重P相當。爲了澄淸此種觀念，必須回想那與集中載重力相當的變位，包含一個在該力作用點的撓度；又該撓度係順着該力的方向量得。然而，撓度並不需要受與其相當之力來導致。在撓度δ_{aa}的情況中，來自第一種載重狀態的P力，而在δ_{ab}的情況中，來自第二種載重狀態的P力。雖然如此，兩個撓度仍皆與圖 11 － 12a 的載重P相當。相似的，雖然

δ_{ba} 係受第一種載重所導致，而 δ_{bb} 係受第二種載重所導致，但 δ_{ba} 及 δ_{bb} 皆與第二種載重狀態相當。此種作爲判定變位方法的相當概念，在後面的討論中將很有用：

現在回到互換變位定理的誘導方法。假設二力 P 皆同時作用在樑上（圖 11 － 12c）。假設樑爲直線型彈性材料，各個撓度皆屬微小，可用重疊原理以求該樑的各個撓度。其與作用在 A 點的載重 P 相當的撓度將爲 δ_{aa} ＋ δ_{ab}，而與作用在 B 點的載重 P 相當的撓度將爲 δ_{ba} ＋ δ_{bb}。知道了這些撓度，便能計算當該兩個載重 P 緩慢而同時施加於樑上所完成的功。等於該樑的總應變能的功

$$U = \tfrac{1}{2}P(\delta_{aa} + \delta_{ab}) + \tfrac{1}{2}P(\delta_{ba} + \delta_{bb}) \tag{a}$$

一如自方程式（1 － 15）所求得者。

負兩個載重之樑的總應變能（圖 11 － 12c），並不受該兩個載重加於樑上先後次序的影響。因爲該樑的行態動作成直線形狀，假若該兩個載重被同時施加或先施加一個載重然後施加另一個載重，其應變能必定相同。假定在 A 處載重先行施加，跟着在 B 處再加。因此在第一個載重施加期間，該樑的應變能爲

$$\tfrac{1}{2}P\delta_{aa} \tag{b}$$

由該載重所引起的撓度 δ_{aa}，如圖 11 － 12a 所示。當第二個載重施加時，在 B 處將有一個等於 δ_{bb} 的另外增加的撓度；因此，該第二個載重做出等於

$$\tfrac{1}{2}P\delta_{bb} \tag{c}$$

的功，而在樑內就出現一另外增加的應變能量。但必須不要漏掉一項事實，當載重正在 B 處施加時，該已在 A 處作用的載重 P 將做出另外一個撓度 δ_{ab}。受第一載重所做之功的相當量爲

$$P\delta_{ab} \tag{d}$$

因之產生了此項應變能量。在(d)式內沒有因數 1/2，是因爲 P 力在另外一個撓度 δ_{ab} 發生期間仍維持一個常數。將(b)、(c)及(d)三式加起來，可得，

$$U = \tfrac{1}{2}P\delta_{aa} + \tfrac{1}{2}P\delta_{bb} + P\delta_{ab} \tag{e}$$

當兩個載重連續施加時所得的應變能相同（見方程式(a)）。使該兩個應變

能式相等，導得下列的結果：

$$\delta_{ab}=\delta_{ba} \tag{11-18}$$

此方程式，即代表互換變位定理。該項定理又可作如下列的方式陳述之。由於在 B 處作用的載重，而在 A 發生的撓度，等於在 A 處作用的載重而在 B 處發生的撓度。我們瞭解，各個撓度的正方向是與其相當載重的正方向相一致的。

假如一個載重是力，而另一個是力偶，或假如兩個載重皆是力偶，該互換變位定理亦可適用。爲舉例說明其可能，再度考慮一個簡支樑，承受兩種載重情況。除了這第一種情況載重，另包含一個在 A 點作用的力偶 M（圖 11－13）。在第一根樑內與 M 相當的變位是旋轉角 θ_{aa}，而在第二

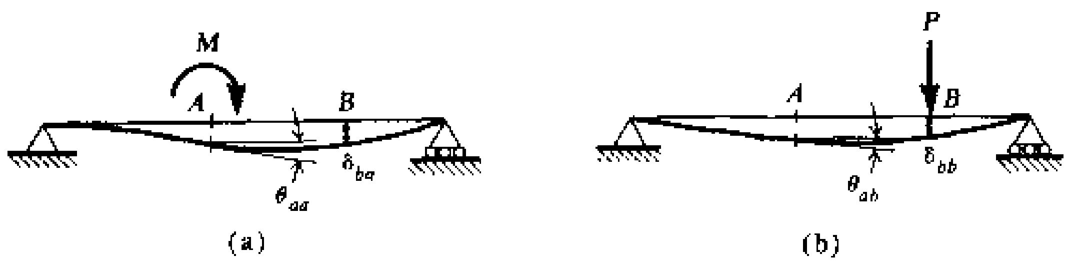


圖 11 - 13　互換變位定理

根樑內是角 θ_{ab}。重複在先前的誘導法作同樣步驟，當兩個載重 M 及 P 同時施加時，即得該樑的應變能算式爲：

$$U=\tfrac{1}{2}M(\theta_{aa}+\theta_{ab})+\tfrac{1}{2}P(\delta_{ba}+\delta_{bb})$$

當力偶 M 首先施加時，跟着再施加 P 力，則該應變能式爲

$$U=\tfrac{1}{2}M\theta_{aa}+\tfrac{1}{2}P\delta_{bb}+M\theta_{ab}$$

使兩式相等以求應變能，即得

$$M\theta_{ab}=P\delta_{ba} \tag{11-19}$$

假如載重 M 及 P 在數值上相同，則 θ_{ab} 及 δ_{ba} 亦將在數值上相等。所以，在這種情形下，我們可以陳述互換變位定理如下：假設力與力偶在數值上相等，則由於在 B 處作用的集中力在 A 處所起的旋轉角在數值上是等於在 A 處作用的力偶在 B 處所起的撓度。

假如作用於該結構上的兩個載重皆爲力偶 M（圖 11－14），將得成立

$$\theta_{ab}=\theta_{ba} \tag{11-20}$$

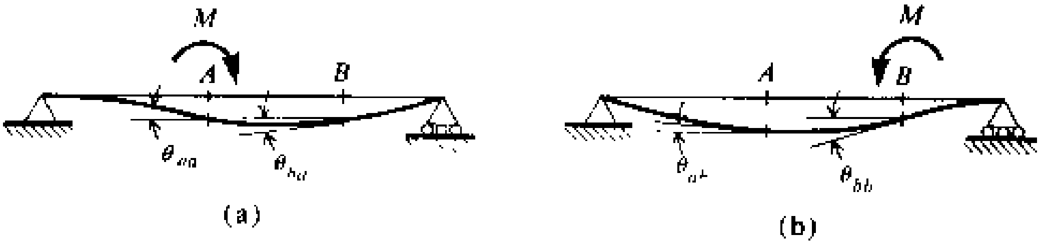


圖 11·14 互換變位定理

在這種情勢內，該互換變位定理可陳述爲：由於作用在B處的力偶在A處所起的旋轉角，等於作用在A處的力偶在B處所起的旋轉角。

如以前所解釋，該項互換變位定理先前的誘導法被認爲只是純粹爲了舉例說明目的，而借助一個簡支樑，其實任何其他結構、桁架、構架，甚至一個大而且重的物體，皆能適用。因爲該誘導法，是基於應變能的考慮及基於重疊原理而得之故。因此，該定理極爲有用，並適於作任何形式的變形的結構物，不論其爲軸向的、撓曲的、剪力的、或扭轉的變形皆無不可。在使用該項定理的惟一限制，乃爲重疊原理必須符合該結構係屬直線型彈性者。要滿足此種條件，所用材料必須遵循胡克氏定律，並且假定撓度要小得足夠使一切計算，皆可基於結構的非變形幾何來計算。*

互換功定理

此項定理比互換變位定理更爲普遍而適用，並且將後者包容在內，作爲其特例。爲誘導該項定理，讓我們考慮任何適合於重疊原理的直線型彈性物體（圖 11－15）。此項物體，要能代表樑、桁架、構架、或其他結構，一如在前段所說明者。結構上的兩種載重情況須加考慮的，在第一種

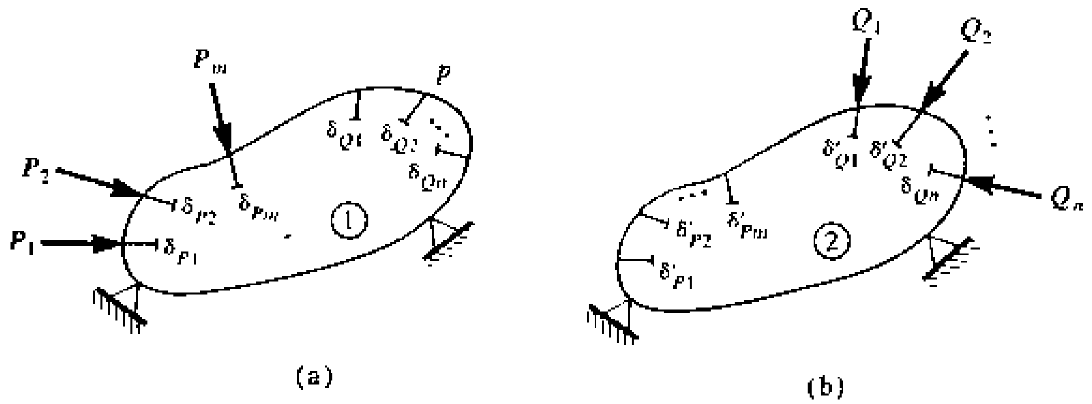


圖 11·15 互換功定理

*互換變位定理首先由 J. C. Maxwell 氏獲致，並於1864年出版（見參考書 11－1）該定理常被稱爲馬克威氏互換定理（Maxwell's reciprocal theorem）。

情況下（圖 11 － 15a）有 m 個載重 P_1 ，P_2 ，…，P_m，在第二種情況下（圖 11 － 15b ）有 n 個載重 Q_1 ，Q_2 ，…，Q_n。在第一種情況下與各種載重 P 及 Q 相當的各個撓度，採用帶有註腳符號的 δ ，以指定與各個撓度相當的特別載重。例如，δ_{Q2} 代表與力 Q 相當的撓度。自然此項撓度必須在力 Q_2 的方向量度之，但並不含有在施加 Q_2 的 p 點（見圖 11 － 15a ）祇在 Q_2 的方向內移動。p 點也許可能有一個垂直於 δ_{Q2} 方向的分變位 ，但因該分變位不與 Q_2 相當，我們即不加考慮。

在第二種載重情況下（圖 11 － 15 b ），其情況是相似的；由載重 Q 所導致的各個變位有些與每個 P 力相當，有些與每個 Q 力相當。所有這些變位皆以符號 δ' 表示，並且其所註腳各字母仍表示與各撓度相當之力。

為誘導互換功定理，我們將使用曾用以誘導互換變位定理有關變形能的同一觀念。假如兩個載重系統 P 及 Q 同時加在該物體上，則總應變能（等於各力所做之功）為

$$U = \tfrac{1}{2}P_1(\delta_{P1} + \delta'_{P1}) + \tfrac{1}{2}P_2(\delta_{P2} + \delta'_{P2}) + \cdots + \tfrac{1}{2}P_m(\delta_{Pm} + \delta'_{Pm})$$
$$+ \tfrac{1}{2}Q_1(\delta_{Q1} + \delta'_{Q1}) + \tfrac{1}{2}Q_2(\delta_{Q2} + \delta'_{Q2}) + \cdots + \tfrac{1}{2}Q_n(\delta_{Qn} + \delta'_{Qn}) \tag{f}$$

此項應變能，必與在施加第一個全部 P 載重系統後，接着施加第二個全部 Q 載重系統所得的總應變能相同。當各載重 P 單獨施加時，該應變能為

$$\tfrac{1}{2}P_1\delta_{P1} + \tfrac{1}{2}P_2\delta_{P2} + \cdots + \tfrac{1}{2}P_m\delta_{Pm} \tag{g}$$

當第二組載重施加時，由於各 Q 力所做的功，可得下列的應變能量：

$$\tfrac{1}{2}Q_1\delta'_{Q1} + \tfrac{1}{2}Q_2\delta'_{Q2} + \cdots + \tfrac{1}{2}Q_n\delta'_{Qn} \tag{h}$$

另加由於各 P 力所做的功，可得下列的應變能量：

$$P_1\delta'_{P1} + P_2\delta'_{P2} + \cdots + P_m\delta'_{Pm} \tag{i}$$

所以，總應變能（對於在先加的各個載重 P ，跟着後加的各個載重 Q 的情況時）為(g)、(h)及(i)各個算式之和。將此項應變能之和，令與各個載重同時施加所結合的應變能之和（見方程式 f ）得成立方程式

$$P_1\delta'_{P1} + P_2\delta'_{P2} + \cdots + P_m\delta'_{Pm} = Q_1\delta_{Q1} + Q_2\delta_{Q2} + \cdots + Q_n\delta_{Qn}$$

或

$$\sum_{i=1}^{m} P_i\delta'_{Pi} = \sum_{j=1}^{n} Q_j\delta_{Qj} \tag{11-21}$$

此項方程式的左邊，為各個 P 力與其由各個 Q 力導致的各個相當變位乘積之和。左邊為各個 Q 力與其由各個力導致的各個相當變位乘積之和。此項方程式，即為互功定理（ reciprocal work theorem ）。上項定理又

可陳述如下：

當各個力沿着第二種載重情況經行其相當的變位時，它們在第一種載重情況所做之功，等於它們沿著第一種載重情況經行其相當的變位時，它們在第二種載重情況所做之功。

互換功定理，可應用於各個力，亦可應用於各個力偶。例如，P_1 可代表力亦可代表力偶。於是相當的變位 δ_{Pi} 就成爲撓度，或成爲旋轉角。

雖然在互換功定理的誘導中，我們僅繪過兩組作用在結構上各個不同點上之力（見圖 11 － 15），但現在不需如此。例如，Q_1 力，能在物體上的同一點作用，一如 P 組各個力中之一；甚至能作用在同一方向並具同一大小。換言之，對於 P 組的各個力或 Q 組的各個力的數目，它們作用點的位置，或其方向皆不必作任何限制。因其具有此項通性，互換功定理在結構力學上是一個很有用處的原理。因爲在互換變位定理的情況下，互換功定理祇有對於重疊原理可以使用的結構才爲有效 *。

互換變位定理是互換功定理的特殊情況，這是易於瞭解的。例如，我們能將互換功定理應用於圖 11 － 12 a 及 b 所示的兩種載重情形。於是得到 $P\delta_{ab} = P\delta_{ba}$，該式立卽變爲互換變位定理的方程式（11－18）。相似的，應用該定理於圖 11 － 13 內所示的兩個載重情況，而得 $M\theta_{ab} = P\delta_{ba}$。此式與方程式（11 － 19）相同。最後，應用互換功定理於圖 11 － 14 內所示的兩種載重情形，可得到方程式（11 － 20）。

11·6 韌性法

在本節及下節中，我們提出韌性法與勁性法之基本概念。這兩種方法在許多複雜結構形式的分析中是很重要的。爲了用最簡單的方式舉例說明各項概念，我們僅對樑、平面構架、與平面桁架加以討論。兩種簡便方法早在 1.6 節內用單一軸向載重的習題敘述過，並在 7.3 節內有關靜不定樑的分析亦已討論過韌性方法。

在分析一座結構內使用韌性方法的最初步驟，爲判定結構的靜不定級次（degree of static indeterminacy）。卽從各靜力平衡方程式可

*互換功定理，應歸功於白帝（E. Betti）（見參考書 11 － 5）及瑞利夫（Rayleigh 爵士）（見參考書 11 － 6 至 11 － 8）；因此，常被稱爲柏－瑞二氏互換定理（Betti-Rayleigh reciprocal theorem）。

求得諸力（為反力或為應力合力）的數目，超過靜力平衡方程式的數目。例如，一個兩孔連續樑（見7－6a）為靜不定一級次。因為有一個反力超過能從靜力學求得的數目。相似的，圖7－7a所示的固定端樑，是二級次的靜不定結構，因為有兩個反力超過能用靜力學求得的數目。

在找出不定的次數後，我們必須選出同數的靜贅力（statical redundants）。這些力，可能是反力或為應力合力。這些數量可被視作贅力（redundant），在靜力平衡下，是不需要這些力去維持結構不動。再次，就圖7－6a所示的兩孔樑而言，我們知道，若把中央反力作為贅力，並取去中央支承而將該贅力自結構中移去，就剩下一個穩定的結構，如圖7－6b所示。或者，就圖7－7a的樑而言，能在兩端取去抵抗旋轉的各個鉗制力，留下各個力偶，該剩下的結構（圖7－7b）亦能支持各個載重。在贅力解除以後所留下的靜定結構（以取消適當的鉗制），被稱為被放鬆結構（released structure）*。用韌性法解靜不定結構的分析，即為對所選的贅力之計算。因為一旦求得贅力，其他一切力皆可由靜力平衡方程式求得。

為了決定各個贅力，需要計算在被解除結構中受到實際載重與未知贅力所導致的變位。在後一種情況，我們必須將贅力，想像成為它們是作用在被放鬆結構上的實際載重，而且必須求得與贅力相當的各個變位。此一步驟，應用諸單位值的贅力而變得更為簡易。因此，致放鬆結構的各個相當變位，被稱為韌性 flexibilities。知道了韌性與實際載重所導致的變位，我們能用形變適合的條件與重疊原理作成聯立方程式。此種方程式，被稱為形變適合方程式（equation of compatibility）亦可稱為重疊方程式（equation of superposition）。並且有多少未知贅力，就會有多少此種方程式。由這些方程式可解得各個贅力，而其他一切反力與應力合力，皆可由靜力學求得。

現在，我們舉一個特例來說明。將上面所述的韌性法（flexibility method）之討論，可更加清楚。（見圖11－16）。在該圖(a)部份之樑，係屬二次靜不定結構，因此可藉解除兩個贅力作用將其成為靜定性樑。例如，選取在支承點 B 及 C 的垂直反力作為贅餘作用力，並假定將該支承點移去，則被放鬆的結構就變成圖11－16b內所示的懸臂樑。另外選取兩個贅餘作用力亦屬可能。假定選取在 A 支承的反力矩及在 B 支承的垂直

*該被放鬆的結構，亦稱為原結構（primary structure）

反力亦可。於是在A點的旋轉鉗制及在B點的支承先被解除；結果被放鬆的結構，如圖11－16c所示，成爲一簡支樑。另外增加的被放鬆結構的可能性，在圖11－16d 及 e表示。這兩種情況中的第一個，在A處的反力矩與在B處內部的彎力矩業經選作贅餘作用力。所以，該被放鬆的結構，在A處並無旋轉鉗制，而在B處亦無抗彎力矩的鉗制；後者的情況，是在該樑的B點插入一個鉸鏈而得。當在B處的反力及彎力矩被選爲贅餘作用力時，即得最後的被放鬆結構（圖11－16e）。所有繪於圖11－16中的被解除結構皆屬靜定且不動搖。因爲我們對贅餘作用力作了適當的選

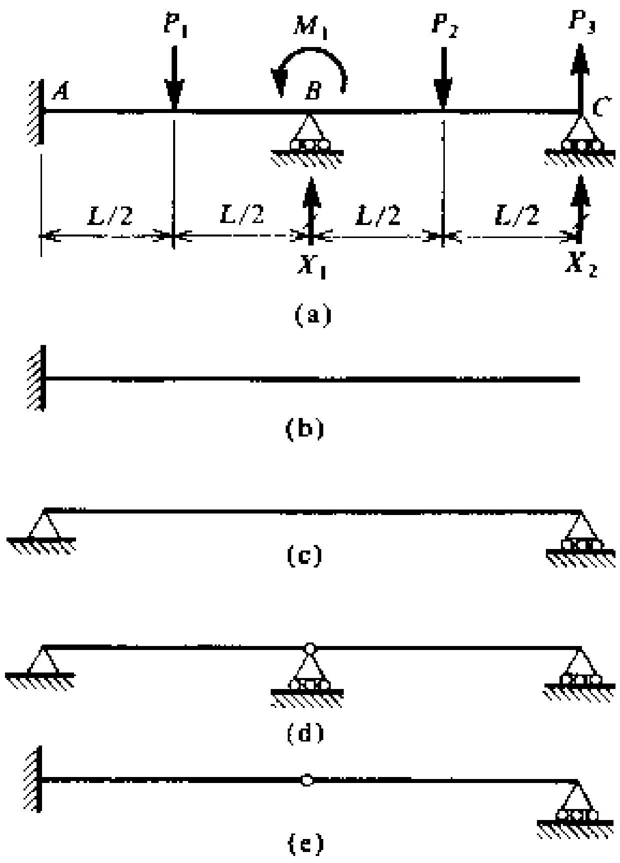


圖11 - 16　韌性法舉例說明

擇。反之，要注意的，我們不能選取在B處的彎力矩與在C處的反力作爲贅餘作用力，因爲那樣，該被放鬆的結構，就會動搖而不能支承所有的載重。

現在讓我們繼續舉例說明，選擇在支承B及C的反力，用符號X_1及X_2在圖11－16a內表示，作爲贅餘作用力。普通，我們採用贅餘作用

力的符號爲X之目的，是在指出其所代表的各個未知量。與贅餘作用力的選擇相當的放鬆結構，如圖 11 － 16 b 所示的懸臂樑。我們必須先求出在此樑內因受實際載重與贅餘作用力所引起的某些變位。在被放鬆結構內需要的變位要作一個正確決定，我們觀察形變適合方程式，必須表示在實際樑內與贅餘作用力X_1及X_2相當的並無變位這種情況。（換言之，圖 11－16 a 所示，樑的B及C點並無垂直撓度）。因此，我們瞭解，在被放鬆結構內計算的變位，即爲所選贅餘作用力相當的變位。在此種情況，該變位即爲在B及C點的垂直撓度。

在圖 11 － 16 a 之例題內的各載重，假定爲三個集中力（P_1、P_2、及P_3）與一個力偶M_1。這些載重另繪在圖 11 － 17 所示。作用於被放鬆的結構上，產生與各個贅餘作用力X_1及X_2相當的變位爲D_{1P}及D_{2P}。這些變位的註脚將如下述。註脚的第一個字母表示與變位相當的贅餘作用力，第二個字母表示受結構上載重所引起的變位。在圖 11 － 17 所表示的

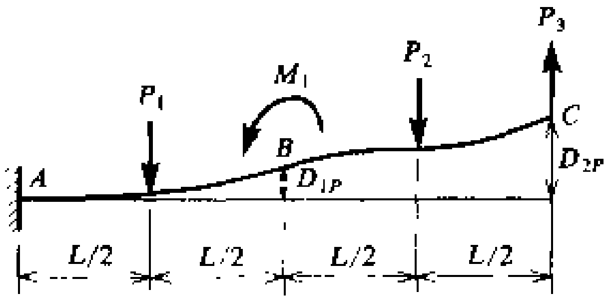
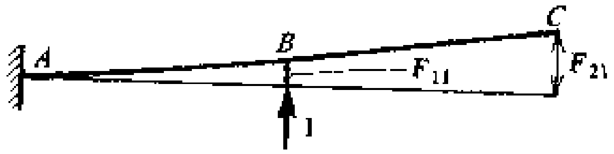


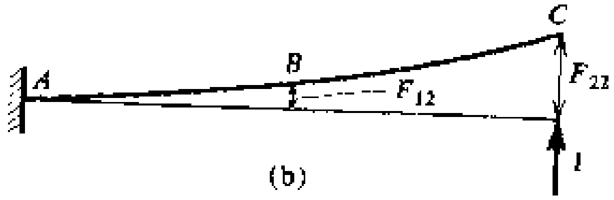
圖 11 - 17 結構內由於各載重被解除後之變位

變位D_{1P}及D_{2P}，假定向上的作爲正的方向。大體上，各變位的正方向，必須與贅餘作用力的正方向相同，而其變位則與贅餘作用力相當。

其次，我們必須考慮的是，在被放鬆結構中受贅餘作用力所引起的變位。爲求這些數量，可將各贅餘作用力X_1及X_2的單位值分開施加在被放鬆結構上。就圖 11 － 18 a 內所示的$X_1 = 1$的條件而言，將會有一個撓度F_{11}與X_1相當，並有一個撓度F_{21}與X_2相當。這些撓度被稱爲韌性影響係數（ flexibility influence coefficients ）或簡稱韌性（ flexibilities ）。因其表示載重單位值的影響。其註脚內各字母依照通常記法，用第一個字母表示與撓度相當的贅餘作用，而第二個字母表示其引起的原因。因此，韌性F_{11}是由於X_1的單位值所起與X_1相當的變位，而F_{21}是由於X_1的單位值所起與X_2相當的變位。就圖 11 － 18b內所示的



(a)



(b)

圖 11・18　韌性

$X_2=1$ 的條件而言，韌性 F_{12} 是由於 X_2 的單位值所起與 X_1 相當的變位，以及 F_{22} 是由於 X_2 的單位值所起與 X_2 相當的變位。全部四個韌性係數，皆在圖內表示出它們的正方向。因爲該被放鬆結構係一靜定樑，我們可假定不僅祇是韌性，而且受到實際載重所引起的各個變位 D_{1P} 及 D_{2P}，藉單位－載重法皆易計算得之。

現在可寫出，表示實際樑在支承 B 與 C 處形變適合性條件的方程式。在 B 或 C 處的垂直合成撓度計包含三個部份，由於實際載重引起的撓度，由於 X_1 的撓度，及由於 X_2 的撓度，全部三個變位的重疊得出等於零的總變位。因此，我們可得下列兩個形變適合性方程式：

$$D_{1P}+F_{11}X_1+F_{12}X_2=0$$
$$D_{2P}+F_{21}X_1+F_{22}X_2=0$$

由這些聯立方程式可求贅餘作用力 X_1 及 X_2 因爲在該方程式內所有其他各項皆爲已知。當解方程式時，受實際載重所引起的變位 D_{1P} 及 D_{2P} 將移至右邊，所以方程式可寫成下面的形式

$$\begin{aligned}F_{11}X_1+F_{12}X_2&=-D_{1P}\\F_{21}X_1+F_{22}X_2&=-D_{2P}\end{aligned}\qquad(11\text{-}22)$$

當方程式寫成此種標準形式時，我們瞭解各個韌性即是各個未知贅餘作用力的係數，而全部含有載重的各項，皆置於右邊。因此，假如樑上各個載重遭遇到改變，僅對形變適合方程式的右邊將起改變。依結構的性質而改

變的韌性，將不受載重系統改變的影響。認識此點頗為重要，觀察下面韌性間的互換關係亦屬重要：

$$F_{12} = F_{21} \tag{11-23}$$

此項方程式係由互換變位定理（方程式11－18）推論而得成立。

為求前項例題的完全解答，讓我們假定在圖11－16a內所示之樑，在兩孔內皆具有不變的撓曲剛度 EI ，樑上的各個載重如下：

$$P_1 = 2P \qquad M_1 = PL \qquad P_2 = P \qquad P_3 = P$$

由於這些載重，將這被放鬆結構產生各個撓度（見圖11－17）為

$$D_{1P} = \frac{13PL^3}{24EI} \qquad D_{2P} = \frac{97PL^3}{48EI}$$

一如單位－載重法所求得。這兩個撓度皆係向上、亦即為兩個贅餘作用力的正方向。因此給予正號。如圖11－18內所示的各個韌性，具有下列各值：

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad F_{12} = F_{21} = \frac{5L^3}{6EI} \qquad F_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$$

將以上各個數量代入方程式（11－22），然後將兩個方程式皆乘以48 EI/L^3 ，得

$$16X_1 + 40X_2 = -26P$$

$$40X_1 + 128X_2 = 97P$$

求解贅餘作用力 X_1 及 X_2 ，由上式獲得下列答數：

$$X_1 = \frac{69P}{56} \qquad X_2 = -\frac{8P}{7}$$

X_2 的負號，意謂此項反力是向下的。當各贅餘反力在前一項情況內業已求得，其餘反力以及一切應力合力卽可由靜力平衡方程式求得。

該韌性法頗易擴充，以供任何數目的贅餘作用力的可能性。所有討論過有關樑的例題的觀念與程序，如需另外增加未知贅餘作用力時，仍屬有效。

為明確起見，讓我們假設一個結構具有 n 次靜不定，所以要選定 n 個贅餘作用力 X_1 ， X_2 ，…、 X_n 。於是作用在被放鬆結構上的實際載重，將產生 n 個變位與 n 個贅餘作用力相當。這些變位被指定為 D_{1P} 、 D_{2P} 、…、 D_{nP} 。憑藉贅餘作用力的性質，變位可能是一個移動（translation

）（假如贅餘作用力爲一個反作用力），可能是一個旋轉角（假如贅餘作用力爲一個反作用力矩），或可能是一個兩構材間的相對旋轉（假如贅餘作用力爲一個彎力矩），或可能是一個兩相鄰截面間的橫向移動（假如贅餘作用力爲一個樑內剪力）。在一個桁架的情況下，一個贅餘作用力，可能是各構材中的一個軸向力。於是該相對變位成爲該構材的相鄰截面間的相對移動（依構材的軸向量度之）。

其次，將各個贅餘作用力的單位值，當作各項作用於被放鬆結構上的載重，並對各個這種載重，分別求出與全部 n 個贅餘作用力相當的變位。例如，在結構上的載重 $X_1 = 1$，求與 X_1 相當的變位 F_{11}，與 X_2 相當的變位 F_{21}，與 X_3 相當的變位 F_{31}……等等。然後在結構上再放置一個載重 $X_2 = 1$ 並求得 F_{12}、F_{22}、F_{32}、…F_{n2} 各個變位。在這種情況內繼續下去、求出全部 n 個單位載重，可得 n^2 個韌性。當然，從互換變位定理，我們知道將有許多成雙成對而相等的韌性。例如，$F_{12} = F_{21}$、$F_{13} = F_{31}$、$F_{23} = F_{32}$、等等。一般而論，我們能將韌性寫成下列的互換關係：

$$F_{ij} = F_{ji} \tag{11-24}$$

此方程式可作如下的陳述。與贅餘作用力 X_i 相當而受贅餘作用力 X_j 的單位值所引起的變位，等於與贅餘作用力 X_j 相當而受贅餘作用力 X_i 的單位值所引起的變位。

在分析時的次一步驟，是將形變適合性的方程式寫出。在與各個贅餘作用力相當的原有結構內，將有一個變位，以 D_1、D_2、…，D_n 等表示這些變位。這些變位有時將成爲零。如在圖 11 − 16a 的例題內，曾爲這種情形。但是，假如該贅餘作用力爲一反力，並假定與反力相當的支承鉗制遭受一個變位，則在此情況下的變位 D 將不會成爲零。當作一個例題來說，在先前的習題中，曾有過支承 B 或支承 C 的已知移動（向上或向下）。用重疊原理，我們能表示各實際的變位 D_1、D_2、…D_n 乃爲由載重所起各變位及由於贅餘作用力所起各變位之和。因此，該形變適合性方程式爲

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{1P} + F_{11}X_1 + F_{12}X_2 + \cdots + F_{1n}X_n \\ D_2 &= D_{2P} + F_{21}X_1 + F_{22}X_2 + \cdots + F_{2n}X_n \\ &\cdots \\ D_n &= D_{nP} + F_{n1}X_1 + F_{n2}X_2 + \cdots + F_{nn}X_n \end{aligned} \tag{11-25}$$

在方程式（ 11 − 25 ）內求各種變位時，必須用一個協調的符號慣例：特別是，當各變位具有與贅餘作用力的正方向同方向時，凡變位與贅餘作用力相當者，必須爲正號。方程式（ 11 − 25 ）可予重新排列，將所有 D 項

置於右邊，而將各個未知量與贅餘作用力置於左邊；然後各個方程式乃成爲標準式，用來求各個贅餘作用力。

在此節內，我們的注意力囿於負荷載重的結構，但在分析時，若將其他各項影響，如溫度變化包含在內時，在觀念上並不困難。這些其他影響，在被放鬆結構中亦將產生變位，且可藉這些變位與受載重而引起的變位加在一起，以便將其併入形變適合性方程式內。

因爲重疊原理對於韌性法，以及在下節所述的勁性法同屬基本性質。當然祇有線性彈性行態的結構將在這兩節中加以討論 *。

該韌性法亦被稱爲力法（ force method ），因爲各力在方程式內均作爲未知數。有時該方法，因方程式的性質，亦被稱爲形變適性方法（ compatibility method ）。**

【例題】1.本例題用韌性法，取內在彎力矩爲贅力，用圖解法說明連續樑的分析。一連續樑 $ABCD$ 計有三孔，（見圖 11 − 19 a ）並在 AB 孔內承受強度 q 均佈載重，及在 BC 與 CD 兩孔內各承受一個集中載重作用。該結構爲二次靜不定結構，必須選出兩個靜贅力。在本例題中，選擇該樑在 B 及 C 處的彎力矩爲靜贅力。該兩個彎力矩，可自該樑內移去，而在 B 及 C 處插入兩個鉸鏈，因此產生一個包含三個簡支樑的放鬆結構（圖 11 − 19 b ）。用來表示 X_1 與 X_2 的贅餘彎力矩，亦示於該圖內。每個靜贅力，包含兩個力偶，作用在結構上每孔相毗連之處。例如，靜贅力 X_1 包含一個作用在 AB 樑上的反時針走向力偶，和一個作用在 BC 樑上順時針走向力偶。各靜贅力的正方向，皆與使樑頂產生壓縮力的彎力矩相當。因爲每個靜贅力包含兩個力偶，當然與每個靜贅力相當的放鬆結構的各個變位，皆包含兩個旋轉角之和。在每孔的毗連處都有。例如，與 X_1 相當的變位，包含 AB 構材在 B 端的反時針走向旋轉，加上 BC 構材在 B 端的順時針走向旋轉。

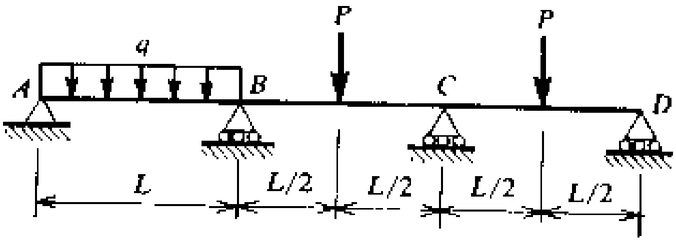
圖 11 − 19 c 所示，爲分別與 X_1 及 X_2 相當，並在放鬆結構上受各載重所導致的各個變位 D_{1P} 及 D_{2P}。由於均佈載重在 AB 構材 B 端的反時針走向旋轉爲 $qL^3/24EI$，及由於載重 P 在 BC 構材 B 端的順時針走向旋轉爲

*以能法作非線性結構的分析，從第 11．8 節一直討論到第 11.13 節。

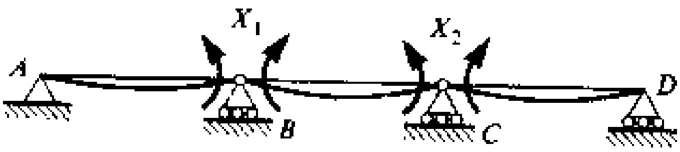
**此韌性法首由 J.C.Maxwell 1864 年及 O. Mohr 1874年各自獨立發現，（見參考書 11−1 與 11 − 3）故稱爲Maxwell-Mohr 法。此法經過發展到達相程度而廣被利用；更進一步之資料可由結構分析教科書找到，（例如參考書 11 − 14 至 11− 19 ）。

$PL^2/16EI$, 於是變位 D_{1P} 就成了

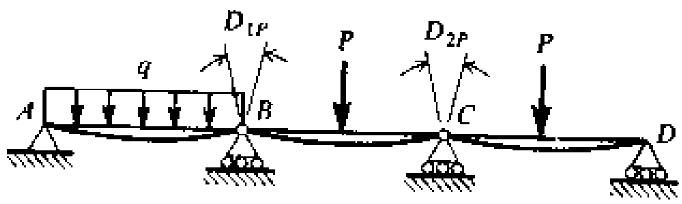
$$D_{1P}=\frac{qL^3}{24EI}-\frac{PL^2}{16EI}$$



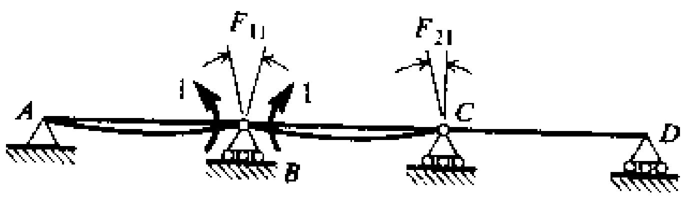
(a)



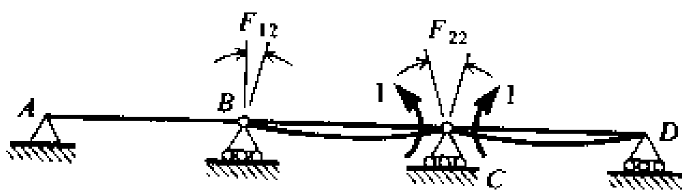
(b)



(c)



(d)



(e)

圖 11・19　例題 1 韌性法

用相似的情況，求得變位D_{2P}為

$$D_{2P}=\frac{PL^2}{16EI}+\frac{PL^2}{16EI}=\frac{PL^2}{8EI}$$

其次求樑的韌性。為此目的，在圖11－19d與e所示，在被放鬆結構上受X_1及X_2單位值的作用。各圖只表示四個韌性。例如，韌性F_{11}為在B點上二個旋轉之和；一個旋轉係在AB孔內，另一個是在BC孔內。但韌性F_{21}係等於祇在BC孔內的旋轉，因為在CD孔內的旋轉為零。類似的說明，適合於圖11－19e所示的韌性F_{12}及F_{22}。現在要寫下這些不同的韌性係數是很簡單的：

$$F_{11}=\frac{L}{3EI}+\frac{L}{3EI}=\frac{2L}{3EI}\qquad F_{22}=\frac{L}{3EI}+\frac{L}{3EI}=\frac{2L}{3EI}$$

$$F_{12}=F_{21}=\frac{L}{6EI}$$

其次，我們將變位D_{1P}及D_{2P}與各韌性代入各形變適合方程式（方程式11－22），得

$$\frac{2L}{3EI}X_1+\frac{L}{6EI}X_2=-\frac{qL^3}{24EI}-\frac{PL^2}{16EI}$$

$$\frac{L}{6EI}X_1+\frac{2L}{3EI}X_2=-\frac{PL^2}{8EI}$$

求解贅彎力矩X_1及X_2，獲得

$$X_1=-\frac{qL^2}{15}-\frac{PL}{20}\qquad X_2=\frac{qL^2}{60}-\frac{7PL}{40}$$

因X_1為負值，我們知道，在原樑內B點的彎力矩在該樑頂上產生拉力。力矩X_2可能為正抑為負，要看各載重相對值的大小。在中間各支承上求各彎力矩，可用靜力學求所有各個剪力及各個反力以及該樑內的各個彎力矩。

【例題】2　圖11－20a所示的平面桁架，在各接點皆用樞接聯結，支承兩個垂直力P及一個水平力$P/2$。該桁架的垂直與水平構材的軸向剛性為EA，屬於對角線的構材者為$2EA$。該桁架為二次靜不定結構，是由事實看出來的。該桁架的兩根桿件，如斜桿AE及EC，由具有穩定而靜定結構的觀念而言，是不必要的。因此，可選擇那兩根桿件內的軸向力（以拉力時為正）作為未知靜贅力X_1及X_2。當然，其他各桿件內的軸力亦可被選作靜贅力，但各種選擇，會形成各種不同的被放鬆結構。在這種情形

，將 AE 與 EC 桿件各端點間的某處切開，放鬆各桿件內的軸向力。各被

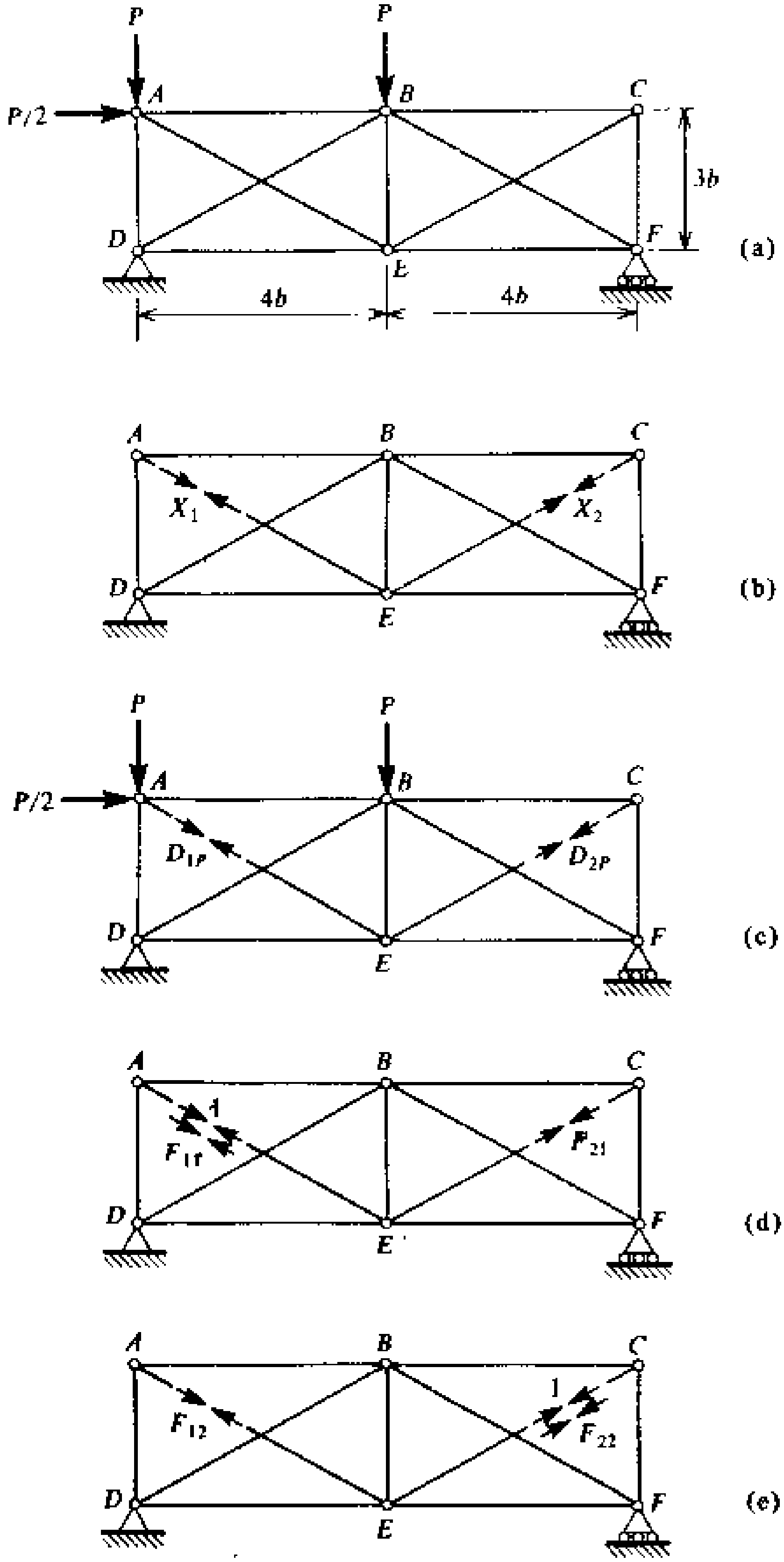


圖 11 • 20　例題 2　韌性法

切開的桿件，仍保持為被放鬆結構的一部份（見圖 11 － 20 b ）。因為它

們的變形，必被包括在被放鬆結構變位計算中。

各靜贅力包含一對作用在被放鬆結構（圖 11 － 20 b ）之力，與上面例題（見圖 11 － 19 b ）中代表贅彎力矩的成對力偶類似。它們假定正方向在構材中產生拉力；假如最後結果，顯示出不是 X_1 就是 X_2 為負，其意祇是構材中的真正軸向力為壓力。

一個不相當於 X_1 就相當於 X_2 的變位，包含着一個桿件的兩個切開端的相對移動。當兩個切開端被相向互換，該變位的方向即與靜贅力的方向相同。因之，如此的變位亦為正方向。當兩切開端被反向互換，祇要開了一個間隙，該變位就是負方向。

分析的下一步，包含在被放鬆結構內，相當於 X_1 及 X_2 的各個變位。而各該變位，係受實際載重所引起的。這些變位，D_{1P} 及 D_{2P}，在圖 11 - 20 c 中用一對箭頭來表示。（這種代表變位的表示法，被用來代替在變換的外形圖內繪製桁架，否則會弄成一幅錯綜複雜的圖形）。這些變位的計算、用單位 - 載重法得到直捷了當的結果（見 11.3 節）。此最後的結果為：

$$D_{1P} = -\frac{401}{480}\frac{Pb}{EA} \qquad D_{2P} = -\frac{2783}{480}\frac{Pb}{EA}$$

該負號，意指各桿件的切開端，為互相分離而移開的。

該桁架的韌性，在圖 11 － 20 d 及 e 內被鑑定為無誤。在該圖(d)部份 X_1 的一個單位值，其作用一如在被放鬆結構上的一個載重，而在(e)部分 X_2 的一個單位值，亦發生如一個載重的作用。各個韌性如前所述，相當於在該被放鬆結構內 X_1 及 X_2 的變位。例如 F_{21} 為相當於靜贅力 X_2 受一個 X_1 單位值所引起的變位。用單位 - 載重法求這些韌性時，最要認清各切開桿件，是屬於被放鬆結構的部份，而不可置之不顧。因此，在圖 11－20d 內所示的 AE 桿件，具有一個由載重 $X_1 = 1$ 而得的等於 + 1 的軸向力。當運用單位 - 載重法時，此力的出現，必須被納入計算。這些計算，得到下列各韌性

$$F_{11} = \frac{307}{25}\frac{b}{EA} \qquad F_{12} = F_{21} = \frac{27}{25}\frac{b}{EA} \qquad F_{22} = \frac{307}{25}\frac{b}{EA}$$

各變位的形變適合方程式（見方程式 11 － 22 ）可寫成

$$\frac{307}{25}\frac{b}{EA}X_1 + \frac{27}{25}\frac{b}{EA}X_2 = \frac{401}{480}\frac{Pb}{EA}$$

$$\frac{27}{25}\frac{b}{EA}X_1 + \frac{307}{25}\frac{b}{EA}X_2 = \frac{2783}{480}\frac{Pb}{EA}$$

解以上兩式，得

$$X_1 = 0.027P \qquad X_2 = 0.470P$$

此結果，顯示X_1與X_2二者皆爲拉力。知道了這些靜贅力，即能利用靜力學以求桁架中其他一切桿件的軸向力。

【例題】3　圖 11－21a所示的平面構架 ABC，具有一個在 A處的固定支承及在 C 處一個樞接支承。接頭 B 是一個介於構材 AB 與 BC 間的剛性聯接，兩者皆具相同剛性 EI 及長度 L。在該構架上各個載重，包含一個作用於構材 BC 上 q 強度的均佈載重，及施加在接頭 B 的力偶 $M = 2qL^2$。此二次靜不定的構架，可用韌性法分析。

在 C 支承的兩個分力，將被選爲未知靜贅力 X_1 及 X_2（見圖 11－21a）。在圖(b)部份，顯示承受實際載重的被放鬆結構。這些載重在 C 點產生撓度 D_{1P} 及 D_{2P}，各相當於 X_1 及 X_2。這兩個撓度的正方向，在圖內用箭頭顯示，乃爲避免繪出結構的撓曲形態而設。兩個撓度皆可用單位－載重法求得，其結果如下：$D_{1P} = -\dfrac{3qL^4}{4EI}$　　$D_{2P} = \dfrac{11qL^4}{8EI}$

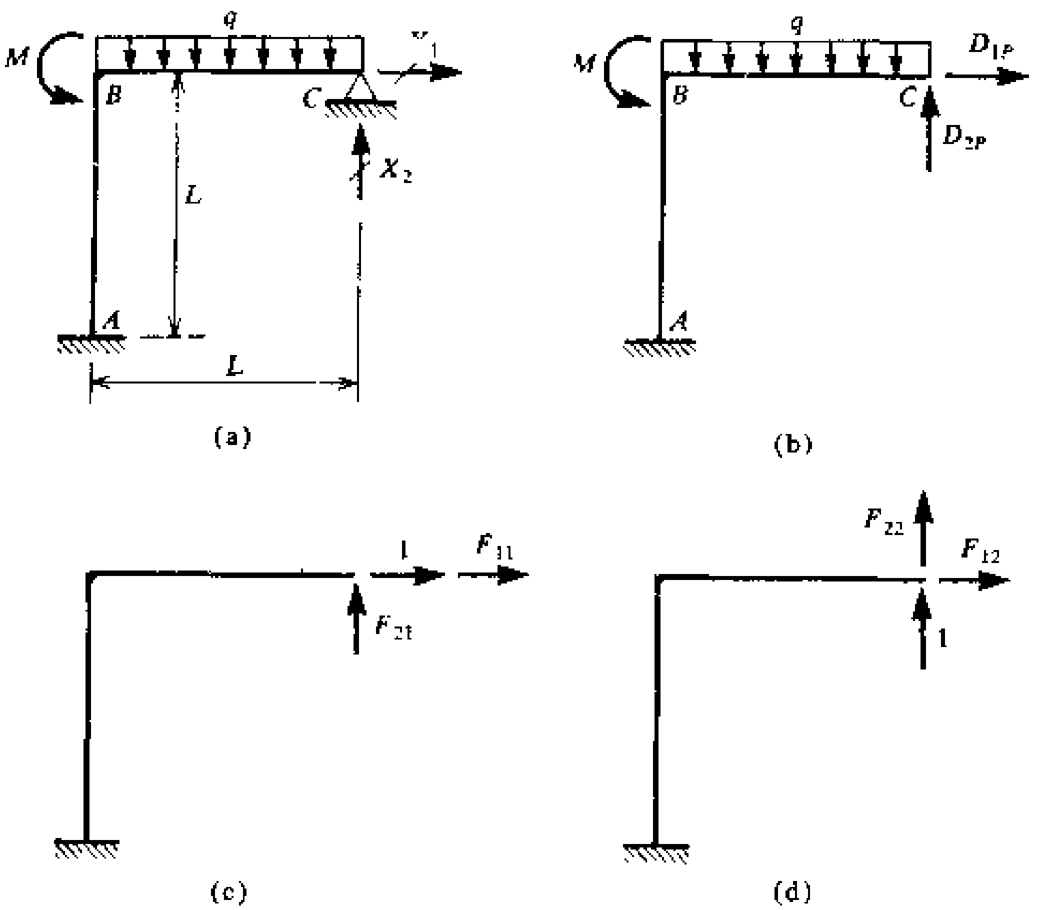


圖 11・21　例題 3　韌性法

各個韌性被繪於圖 11－21 c 及 d 圖中各項撓度，爲求簡明起見，再

度用箭頭來鑑定各種撓度。這些以單位－載重法求得的韌性為

$$F_{11}=\frac{L^3}{3EI}\qquad F_{12}=F_{21}=\frac{L^3}{2EI}\qquad F_{22}=\frac{4L^3}{3EI}$$

在本例題中，有些韌性是負的，這是一個普通事件。依一般法則，用兩個不同的註腳字母，如F_{12}及F_{21}，可能此正彼負，要看各個靜贅力所假定的正方向如何而定。另一方面，用兩個同樣的註腳字母鑑定一個韌性如F_{11}，因為各個變位，永遠發生在與單位載重引起的同一方向，亦即永遠是正方向的。

將前式代入形變適合方程式（方程式11－22），然後以$12EI/L^3$乘第一方程式，並以$24EI/L^3$乘第二方程式，可得

$$4X_1-6X_2=9qL$$

$$-12X_1+32X_2=-33qL$$

兩方程式的解答是

$$X_1=\frac{45qL}{28}\qquad X_2=-\frac{3qL}{7}$$

所以，在C點的水平反力（圖11－21a）是指向右邊，而垂直反力是指向下。用這些X_1及X_2的結果，用靜力學即可求得構架的其餘各個反力。同樣，一切應力合力皆可求得。

在本分析中，祇需記入彎曲變形的影響。不但，要將軸向變形與剪力變形的各種影響一併加入，並不困難。當求被放鬆結構的變位時，亦即，用單位－載重法求D_{1P}、D_{2P}及各該韌性時，這些影響，可在該分析中加入考慮。在平面構架的情況，當軸向變形與剪力變形的影響與彎曲變形相比較，往往成為可以略去的程度。

11·7 勁性法

用這種分析結構的方法，要用比韌性法更為廣泛，特別對於大而複雜的結構為然。那種結構，需要使用電子計算機實施數字極多的計算。勁性法更比韌性法適於電子計算機程式用。理由是勁性法可被置入標準計算程序的形式內。該項形式在計算過程期間，不需要任何工程上的決定。例如，在勁性法內，各未知數量被明確規定，－－如我們將在下列討論中所見到的。在韌性法內，為各個未知贅力可作許多選擇。

用勁性法分析一個結構時，要使用運動的不定性（ kinematic indeterminacy ）、固定端作用（ fixed-end actions）及勁性（stiffness ）的各種概念。所有這些，將予分別說明如下：

運動的不定性

在勁性法分析中的未知數量，是結構的接頭變位，而不是在韌性法內用贅餘反力及應力合力作爲未知數量。我們要將結構的各種接頭，規定爲兩個或更多構材交會點、各支承點、以及任何構材伸出支點以外的自由端。當該結構承受載重時，全部的或其中幾個接頭，將受到移動或旋轉等形式上的變位。當然，有些接頭變位，因爲各種鉗制情況而等於零。例如，在一個固定支承處，就不會有任何種類的變位。此類未知接頭變位，被稱爲運動未知數（ kinematic unknown ）。而其數量，被稱爲運動不定性的級次（ degree of kinematic indeterminacy ）或被稱爲接頭變位的自由級次（ degree of freedom ）。

要說明運動的不定性概念，列出若干個例題是有助益的。讓我們以圖 11 － 16 a 所示的連續樑開始。這個結構的接頭 A，係固定而經不起任何形式的變位。但接頭 B 及 C 可以旋轉。因此，當用勁性法分析該樑時，有兩個未知接頭的變位要加計算，而該樑因此成爲二級次的運動不定樑（以後簡稱“動不定樑”）。假如在該樑內有軸向變形，加上撓曲變形，則接頭 B 及 C 就會受到水平移動一如受到旋轉那樣。在這種情況，就會有四個運動未知數（ kinematic unknowns ）。

一個靜不定懸臂樑（圖 11 － 6 a）是屬二次動不定樑，因爲在自由端作垂直方向的移動與旋轉，有兩個接頭變位。假如軸向變形存在，則動不定性的級次，將增加到三個，因爲在自由端的水平移動，變爲另一個未知數。

在圖 11 － 19a 內所示，爲另一個有關樑的例題。這個三孔連續樑爲四級次動不定樑。假如祇考慮樑的撓曲變形，因爲在接頭處共有四個未知的旋轉。因此，與用韌性法分析該樑時，要解兩個聯立方程式相較，用勁性法分析，就要解四個聯立方程式。這個例題，可能會給人的印象是，韌性法永遠比勁性用較少的聯立方程式。但要注意，在圖 11 － 22內所示的雙孔樑 ABC 即能消去此類觀念。假定我們不計軸向變形，該樑明爲一級

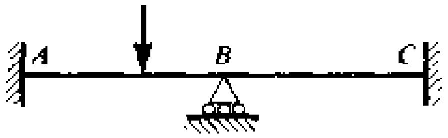


圖 11・22

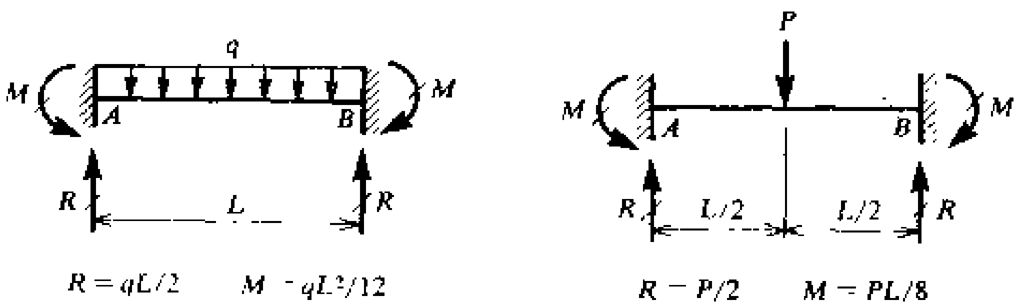
次動不定，因爲惟一的未知接頭變位，是在B處的旋轉，該樑的靜不定次數却爲三。另外一個相似的例題，是一個固定端樑。若祇考慮撓曲變形時，其靜不定的次數爲二，但在動性方面却是確定的。

現在就繪於圖 11 － 20 a 內的平面桁架。這個桁架的接頭A，可能受到兩個獨立的分變位，即在水平及垂直方向的移動，因而具有兩個自由度。這個桁架的各個接頭的旋轉，並無實質上的重要性。因爲構材並不彎曲。接頭B、C及E亦各有兩個自由度，但受鉗制的接頭D及F却分別爲零及一個自由度。所以，該桁架共有接頭移動的九個自由度，及九級次動不定性。這個結論，意謂本桁架用勁性法作分析，需要具有九個接頭移動作爲未知量的九個聯立方程式求其解答。

圖 11 － 21 a 內所示的平面構架，提供另外一個動不定結構的例子。因爲支承A爲固定，在該點不會有變位。但是B與C點可能有旋轉，因此該構架具有兩級次的動不定性。假如軸向變形包括在分析中，接頭B將有兩個外加未知變位（水平與垂直的移動），一共成爲四級次動不定性 *。

<u>固定端作用</u>

在勁性法中，我們一定常遇到固定端樑。因爲在該法中第一步就是鉗制住所有未知的接頭變位。安放這種鉗制，使一個連續樑或平面構架，變



(a)　(b)

圖 11・23　固定端作用

---

*爲求進一步研究動不定性，可參閱參考書 11 － 14。

成一個具有固定端樑的集合體。所以，需要使用頗爲方便的求固定端樑各反力的集合公式。這些反力，包含力與力偶，共同稱爲固定端作用（fixed end actions）。在圖 11 − 23 內，提供兩個在普通載重情況下固定端作用之值 **。

<u>勁性</u>

在韌性方法中，我們利用因單位作用而引起的變位，而被稱爲韌性的（flexibilities）。一如將在以後討論中所看到的，在勁性法中，利用因單位變位而引起的各種作用。這些變位或者是單位移動或者是單位旋轉，而作用結果則是幾個力或是幾個力偶。受單位變位所引起的各個作用，被稱爲勁性影響係數（stiffness influence coefficient）或稱爲勁性（stiffness）。我們經常需要知道結構的每根構材的個別勁性。這些數量，稱爲構材勁性（member stiffness），兩個最有用的載重情況，繪圖說明於圖 11 − 24內。在圖(a)部份，表示一個在右側受到單位旋轉

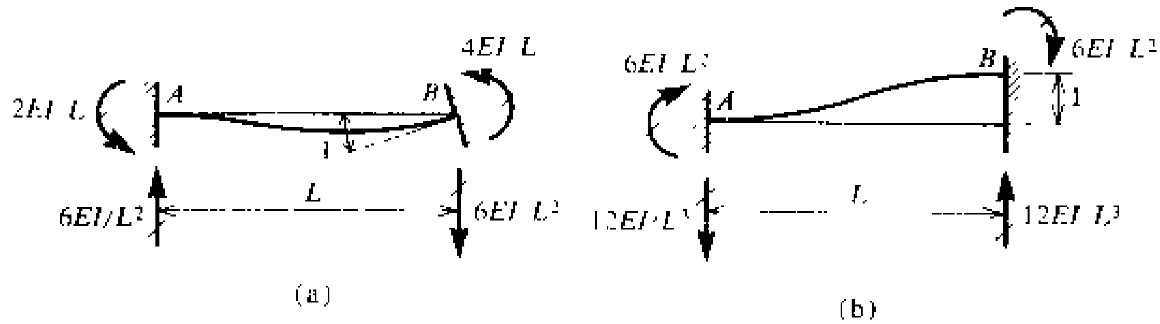


圖 11・24　構材勁性

的固定端樑 AB。因爲這個單位變位的結果，在該樑的兩邊皆發展出各自的反力。在 B 端發展出力矩 $4EI/L$，而在對面一端的力矩則爲 $2EI/L$。在該樑兩端的每個反作用力爲 $6EI/L^2$，其作用方向則示於該簡圖內。同樣，在樑的右端的單位移動，產生各個反力如圖(b)部份所示。一切這些反力，皆爲構材勁性，因爲它們是由於一端的單位變位，而在構材的兩端引起作用 *。

---

*關於構材勁性的更詳討論可參閱參考書 11 − 14。

**固定端反力的詳細表格，包括二十五種不同載重情況，載於參考書 11 − 20。

勁性法

一些初步的觀念與定義已經說明。我們準備用勁性法直接處理一個結構的分析。此種方法，所包含的物理概念有異於韌性法。但兩種方法皆需要解聯立方程式。再者，在兩種情形內，聯立方程式皆用重疊原理獲得。所以該法被局限於具小撓度的直線型彈性結構。在韌性法內，各未知數量爲贅力作用，但在勁性法內，各未知數爲結構的接頭變位。所以，在勁性法內要計算的未知數數目，與動不定性的級次是相同的。

爲了用最簡單的形式舉例說明勁性法的概念，讓我們分析圖 11 － 25a 所示之樑。此樑在 A 處有一固定支承，在 B 處有一滾承，並受強度 q 的均佈載重。因爲惟一的未知接頭變位是在滾承 B 處，用符號 D 來表示其旋轉，該樑是第一級次的動不定樑。

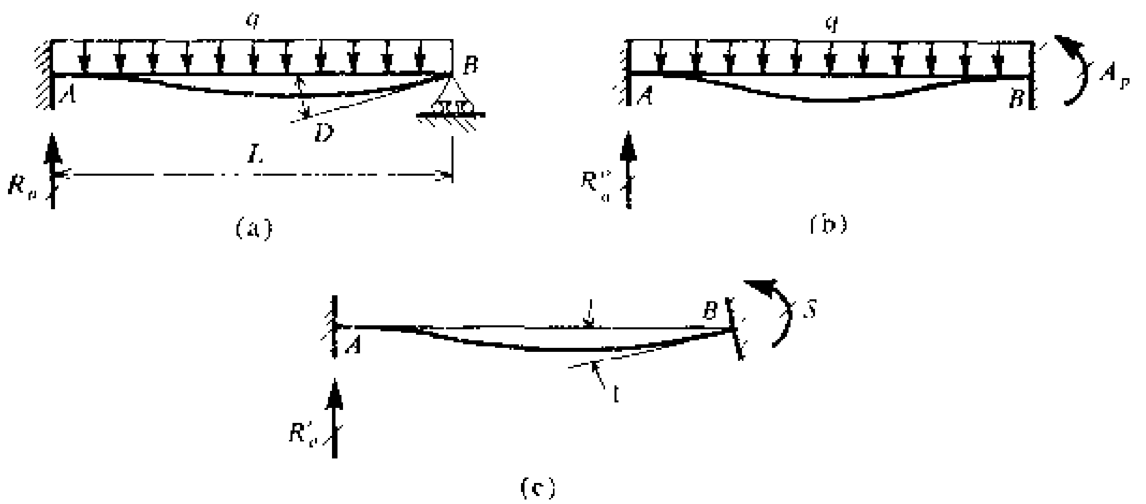


圖 11 - 25　勁性法說明舉例

在韌性法內，一個靜定被放鬆結構，係用切開或用別的方法來改變該實際結構，成爲將贅力移去的那種形式。在勁性法內的類似運用，係用改變實際結構，使所有的未知接頭變位，皆變爲零以求得一個動定的結構。因爲各個未知變位，是各個接頭的移動及旋轉，它們可用鉗制（restrin）結構的各個接頭來抵抗那種變位。用鉗制一切接頭而成的結構，被稱爲鉗制結構（ restrained structure ）。對於圖 11 － 25a 之樑，該被鉗制之樑，係由鉗制接頭 B 不使旋轉，在那附近的 D 等於零而獲得。因此，該被鉗制之樑，即爲圖 11 － 25 b 所示的固定端樑。

當均佈載重作用在被鉗制的結構上，如圖 11 － 25 b 所示，各種不同的作用（即，各力與各力偶）將被發展出來。特別是，一個力偶將在接頭 B 處發生。此一力偶，係一個相當於該未知接頭變位 D 的作用，並且係由載重在鉗制結構上所引起的。所以，用符號 A_P 來表示這個力偶，這符號的含義如下。字母 A 用來表示一個作用，不論是一個力或是一個力偶，而該註脚字母 p 表示該作用，是受作用在該鉗制結構上的各載重所引起的。因為這個力偶，相當於該未知接頭變位 D。當具有與 D 相同的動向為正，即，依如圖所示之反時針走向，該力偶 A_P，是由圖 11 － 23 a 極易求得的固定端作用：

$$A_P = -\frac{qL^2}{12} \tag{a}$$

由以上所闡釋的符號慣例，該負號是需要的。

因為該被鉗制的樑，在接頭 B 並無旋轉。現在必須加入其他考慮到實際接頭旋轉的載重情況。此一步驟的促成，類似在韌性法內取贅力作用的單位值的步驟相當。將該未知變位的單位值，加於該鉗制結構上。該單位旋轉（ $D = 1$ ）如圖 11 － 25 c 所示，在 B 處相當於該未知接頭變位 D 的作用為勁性係數 S。因為它是受該結構的一個單位變位所引起，這個勁性為

$$S = \frac{4EI}{L} \tag{b}$$

如在圖 11 － 24 a 的公式所示。

現在準備寫出一個使我們能解出未知接頭變位 D 的重疊方程式（equation of superposition）。從圖 11 － 25，我們觀察到在圖(b)部份那些與樑相結合的各個作用與各個變位，當被重疊在(c)部份的各個作用與各個變位乘以 D，便會得到在實際樑內（圖 11 － 25 a ）的各個作用與各個變位。因此，可寫出一個相當於未知變位 D 作用的重疊方程式。在原樑內，該相當於 D 的作用，在接頭 B 將為一個反時針走向的力偶。在本例題內，該樑上並無那樣的載重，但為了許可有這種可能性，要以符號 A 來表示這個在原樑內相當於 D 的作用。此一作用 A，等於在有載重（圖 11 －25 b ）的鉗制樑內的相當作用，加上 D 乘具單位變位（圖 11 － 25 c ）的鉗制樑內的相當作用。所以，重疊方程式寫成

$$A = A_P + SD \tag{11-26}$$

由這個方程式，能求解未知變位 D 。我們早已觀察到，在這個例題內 $A=0$ ；又該 A_P 與 S 兩項，由方程式(a)與(b)提供。將這些值代入方程（11－26）得

$$0=-\frac{qL^2}{12}+\frac{4EI}{L}D$$

由上式得

$$D=\frac{qL^3}{48EI}$$

因此，在接頭 B 處的旋轉已被確定。該答數為正號，意指該旋轉具有原假定的正動向（反時針走向）。

對於上面所述接頭變位 D 的解答，利用一個求相當於 D 作用的重疊方程式（方程式11－26）。包含在這方程式內的是受鉗制結構載重所引起的力偶，以及鉗制結構 B 端受旋轉所引起的力偶。後者，曾以該力偶乘未知變位本身的相乘積來表示。該力偶係受一未知變位的單位值所引起。該兩個影響用代數求和，為了求得在原結構內的合力影響，在方程式內的所有項皆用全體一致的符號慣例。這個重疊方程式常稱為平衡方程式。因為該方程式表示在該接頭上各個作用的局部平衡。

在圖11－25內所示，該樑在接頭 B 已得到的旋轉，現在可計算其他各個數量，如各個反力及應力合力。當作一個例題來看，假定要求該樑（圖11－25a）在支承 A 的垂直反力 R_a 將此力在圖11－25b 內所示。等於被鉗制樑的相當反力 R_a^0 ，與 D 乘圖11－25c 內所示的反力 R_a' 之和。因此，能用下列重疊方程式計算反力 R_a ：

$$R_a=R_a^0+R_a'D \tag{c}$$

在鉗制樑內各反力 R_a^0 及 R_a' ，各由圖11－23及11－24內的公式求得

$$R_a^0=\frac{qL}{2}\qquad R_a'=\frac{6EI}{L^2}$$

與先前求 D 值一樣，將這些值代入方程式(c)時，結果即變為

$$R_a=\frac{5qL}{8}$$

知道這個反力值，即能藉靜力學求得其他各個反力及所有的應力合力。

假如一個結構是多於一級次的動不定性，需加用另外的重疊方程式。要舉例證明在這種情形下的程序，取先前曾用來說明韌性法例題的同一雙

孔樑，現用勁性法分析之（見圖11－26a）。該樑因在接頭B與C具有未知的旋轉，故為二級次動不定性。這些未知的旋轉，各以D_1及D_2來表示，當作反時針走向假定為正，分析的直接目的，即為求取這些數量。

在分析中的第一步，包含應用在接頭　　　置構鉗制，以防止旋轉。已完成鉗制的結構，包含兩個固定端樑，如圖11－26b內所示。該鉗制結構即被假定，將遭受到除去那些相當於各個未知變位的載重以外，所

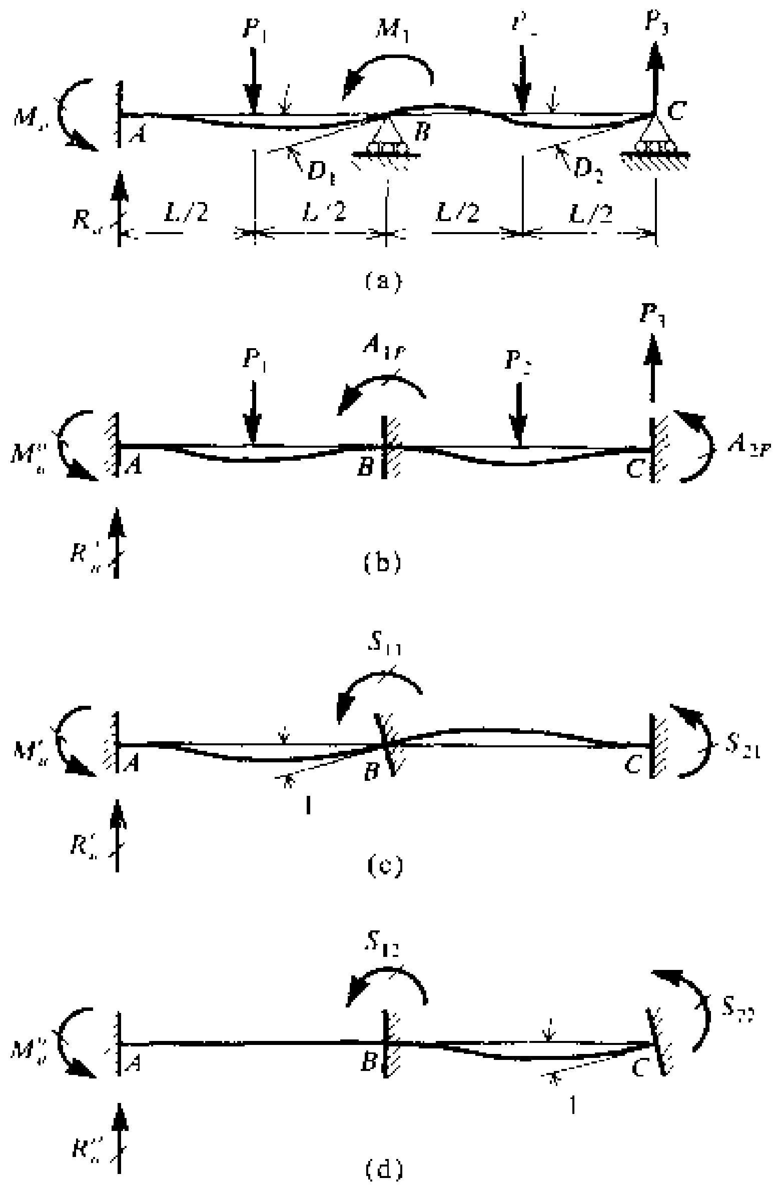


圖 11－26　勁性法說明舉例

有一切載重的作用。因此，祇有載重P_1、P_2與P_3示於圖 11 － 26 b 內。一切相當於未知變位的載重，如在本例題中的力偶M_1以後再加考慮。圖內所示的各個力偶A_{1P}及A_{2P}，是作用於鉗制結構上的反力。這些反力，各個相當於未知變位D_1與D_2，且係受到各個載重所引起者*。這些力偶，可藉固定一端作用的公式求得之；例如，A_{1P}由於作用在構材AB上的載重P_1在B處所起的反力矩，與由於作用在構材BC上的載重P_2在B處所起的反力力矩兩者的代數和。因此得

$$A_{1P} = -\frac{P_1L}{8} + \frac{P_2L}{8} \qquad A_{2P} = -\frac{P_2L}{8} \tag{d}$$

為了在接頭B與C上產生勁性，將各個未知變位D_1與D_2的單位值列入鉗制結構上。一個相當於D_1的單位變位，包含接頭B的單位旋轉，如圖11－26c所示。該變位D_2在此情況下仍等於零。相當於D_1的勁性以S_{11}表示，其中第一個註腳字母表示與該勁性相當的變位，第二個註腳字母表示引起變位的原因（即，一個D_1的單位值）。在類似的情形中，另一個勁性用S_{21}來表示，因其為一個相當於D_2受一個D_1的單位值所引起的。同樣，$D_2 = 1$之情況，如圖11－26d所示。勁性S_{12}是為相當於D_1而受一個D_2的單位值所引起的作用。同時勁性S_{22}是為相當於D_2而受一個D_2的單位值所引起的作用。所有這些勁性，可很容易從圖11－24內所提供的各個構材勁性計算出來。因此，當該樑在接頭B被旋轉一個單位角度時，一個等於$4EI/L$的反時針走向力矩，因為構材AB的末端旋轉而在B處發生，而另外一個等於$4EI/L$的反時針走向力矩，因為構材BC的末端旋轉而在B處發生。所以，在B處的總力矩，將等於勁性S_{11}即

$$S_{11} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L}$$

勁性S_{21}，是當接頭B旋轉一個單位角度時，在接頭C發生的力矩

$$S_{21} = \frac{2EI}{L}$$

---

*要注意，A_{1P}與A_{2P}在韌性法中，是與D_{1P}與D_{2P}相類似。後者兩個數量分別為在放鬆結構中，相當於未知贅力X_1與X_2的變位，且係各個載重所引起者。

勁性爲 S_{11} 與 S_{21} ，因爲各該力矩與未知的旋轉 D_1 與 D_2 的正轉向具同樣的轉向，所以皆爲正。於圖 11 －26 d 內所示的勁性 S_{12} 與 S_{22} 式爲：

$$S_{12}=\frac{2EI}{L} \qquad S_{22}=\frac{4EI}{L}$$

該四個勁性，被稱爲接頭勁性（ joint stiffnesses ），因爲它們代表該結構，在各個接頭由於未知接頭變位的單位値而起的各個作用。一般說來，各個接頭勁性，係將連接在各接頭的各構材勁性的總和而得。又，從本例題可看出來

$$S_{12}=S_{21} \tag{11-27}$$

這種勁性的互換關係，一般都可適用。並且與韌性的互換關係相類似（方程式 11 －23 ）。

現在可寫出，與 D_1 及 D_2 相當的各個作用有關的兩個平衡方程式。將在原結構內與 D_1 及 D_2 相當的各個作用，各以 A_1 及 A_2 來表示。在本例中，該作用 A_1 等於 M_1 ，而作用 A_2 爲零。因爲在原樑內並無力偶在 C 點作用。該平衡方程式表示在接頭 B 與接頭 C 上各力矩的平衡。它們係利用重疊原理及觀察原結構內的各個作用，等於在鉗制結構內，由載重（圖 11 －26 b ）而起的各個相當作用，再加上在鉗制結構內，在單位變位下 Δ（圖 11 － 26 c 及 d ）乘變位自身情況下的各個相當作用。所以，該平衡方程式可寫成

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{1P}+S_{11}D_1+S_{12}D_2 \\ A_2 &= A_{2P}+S_{21}D_1+S_{22}D_2 \end{aligned} \tag{11-28}$$

這些方程式所採用的符號慣例是，各個作用與其相當的未知變位在同一動向時爲正。方程式（ 11 － 28 ）可求解未知變位 D_1 與 D_2 。

爲了明確解答各個平衡方程式，就先前的例題，採用與韌性法例題同値的各種載重，即

$$P_1=2P \qquad M_1=PL \qquad P_2=P \qquad P_3=P$$

將這些數量代入方程式(d)，可得下列在鉗制結構中，與 D_1 及 D_2 相當的各個作用値：

$$A_{1P}=-\frac{PL}{8} \qquad A_{2P}=-\frac{PL}{8}$$

從以上計算可觀察到，載重P_3並不影響A_{1P}或A_{2P}。所以，也不影響接頭變位D_1及D_2的計算。但是此項載重，亦不影響該樑在接頭C的反力值

除了各個未知數外，在各個平衡方程式（方程式 11 － 28)內所有的各項皆已確定。將各項代入後，各方程式可化爲

$$PL = -\frac{PL}{8} + \frac{8EI}{L}D_1 + \frac{2EI}{L}D_2$$

$$0 = -\frac{PL}{8} + \frac{2EI}{L}D_1 + \frac{4EI}{L}D_2$$

求解各個未知接頭變位，得

$$D_1 = \frac{17PL^2}{112EI} \qquad D_2 = -\frac{5PL^2}{112EI}$$

D_2 是負號，顯示這個旋轉，實際上是順時針走向的。

該分析的最後部份是，要確定各個反力與各個合力。在本例題內，求固定支承的垂直反力R_a與力矩反力M_a很是便利（圖 11 － 26 a ）。這些反力的重疊方程式爲

$$M_a = M_a^o + M_a' D_1 + M_a'' D_2 \tag{e}$$

$$R_a = R_a^o + R_a' D_1 + R_a'' D_2 \tag{f}$$

式內所有各項的意義，在圖 11 － 26 內看得很清楚。這兩個方程式的右邊，所有M與R各項很容易從圖 11 － 23 及 11 － 24內所提供的各個固定端作用與各個勁性公式得到。因此，求得

$$M_a^o = \frac{P_1 L}{8} = \frac{PL}{4} \qquad M_a' = \frac{2EI}{L} \qquad M_a'' = 0$$

$$R_a^o = \frac{P_1}{2} = P \qquad R_a' = -\frac{6EI}{L^2} \qquad R_a'' = 0$$

與D_1及D_2的式子一樣，將這些數量代入方程式(e)及(f)得

$$M_a = \frac{PL}{4} + \frac{2EI}{L}\left(\frac{17PL^2}{112EI}\right) = \frac{31PL}{56}$$

$$R_a = P - \frac{6EI}{L^2}\left(\frac{17PL^2}{112EI}\right) = \frac{107P}{56}$$

因已知M_a及R_a。現在能從靜力平衡方程式求得所有其他各個反力及各應力合力。這個結論的理由是，該結構現成爲二次靜不定結構，因而藉着任

何兩個力量（ force quantities）即可用靜力學求得一切其他力量。因此，可認爲此一結構的分析已告完成。

先前的例題所處理的，是具有兩級次動不定結構。但是，能很容易將具有 n 級次動不定性結構情況下的各個平衡方程式予以普遍化。在那時，各個平衡方程式的一般形式成爲

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_{1P} + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + \cdots + S_{1n}D_n \\
A_2 &= A_{2P} + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + \cdots + S_{2n}D_n \\
&\cdots \\
A_n &= A_{nP} + S_{n1}D_1 + S_{n2}D_2 + \cdots + S_{nn}D_n
\end{aligned}
\qquad (11\text{-}29)
$$

此 n 個方程式能解出該結構的 n 個未知接頭變位。這些一般形式的平衡方程式與韌性法中的各個形變適合方程式相同（見方程式 11 － 25 ）。觀察該兩組方程式間的類似性，結果頗爲有趣。勁性法的平衡方程式，表示與未知變位相當的作用力重疊，而韌性法的形變適合方程式，却表示與各個未知作用相當的變位重疊。

在方程式（ 11 － 29 ）出現的勁性係數，與勁性的互換定理有關，其結果如下：

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad (11\text{-}30)$$

此各個勁性間的重要關係，與韌性的互換關係相類似（見方程式 11 － 24 ），在下一節內（見方程式 11 － 55 ）將用一般說法加以證實。

各個平衡方程式（ 11 － 29 ）寫成的形式，祇考慮到該結構上載重的影響。但各該方程式很容易修正成爲包括溫度變化、預應變，及支承沉陷等的影響。只需要在確定 A_{1P} ， A_{2P} ，⋯， A_{nP} 各個作用時，將這些影響包括在內。雖然在本節內，我們將例題局限於各種樑與各種平面構架，但方程式（ 11 － 29 ）可應用於包含桁架與空間構架的許多結構形式。當然，方程式（ 11 － 29 ）是基於重疊原理，因此勁性法，如以上所提示者，僅可適用於各種直線型的彈性結構 *。

*對於勁性法理論的進一步發展，包括對於桁架及其他種類的結構，請參閱有關結構分析的教科書。當勁性法用矩陣照固定的程式製作，並送入電算機完成計算時，其在結構分析中有效解的特性更趨明顯。詳見參考書 11 － 14 ， 11 － 17 ， 11 － 18 ， 11 － 19 。當使用矩陣列成勁性方程式，用電算機計算，使在結構分析形成強有力的本質。可參閱參考書 11 －14 及 11 － 21 。

勁性法的另一名稱爲變位法（ displacement method ）。因爲變位是方程式內的未知數量。又稱爲平衡法（ equilibrium method ），因爲各個方程式代表各個力與各個力矩的總和 **。

【例題】　圖 11 － 27a 內之連續樑 ABC ，在 A 處有一固定支承，在 B 處有一滾承，及在 C 處一導向支承（ guided support ）。該導向支承允許作垂直移動但防止構材軸在 C 點的旋轉。該樑承受各作用於 AB 孔與 BC 孔中點的集中載重 P_1 與 P_2 。這些孔的長度分別爲 L_1 與 L_2 。

惟一未知的各個接頭變位爲，在 B 處的旋轉，在 C 處的垂直移動。這些變位各以 D_1 及 D_2 表示，如圖 11 － 27a 所示。D_1 的正動向爲反時針走向，D_2 的正向爲向上。求得這些變位之外，亦將計算在該樑兩端的反力偶 M_a 及 M_c （圖 11 － 27a ）。

爲防止在 B 處的旋轉及在 C 處的移動而得被鉗制結構。因此產生示於圖 11 － 27b 內的兩個固定端樑。由於作用於被鉗制樑上的載重 P_1 及 P_2 ，共相當於未知變位 D_1 及 D_2 的作用力爲

$$A_{1P} = -\frac{P_1 L_1}{8} + \frac{P_2 L_2}{8} \qquad A_{2P} = -\frac{P_2}{2}$$

又，在 A 處與 C 處的力偶爲

$$M_a^0 = \frac{P_1 L_1}{8} \qquad M_c^0 = -\frac{P_2 L_2}{8}$$

下一步爲誘導在鉗制結構內的各個未知變位之單位値，如圖 11 － 27 c 及 d 內所示兩個類情況中的第一個各種作用如下：

$$S_{11} = \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} \qquad S_{21} = -\frac{6EI}{L_2^2} \qquad M_a' = \frac{2EI}{L_1} \qquad M_c' = -\frac{2EI}{L_2}$$

一如在圖 11 － 24 的公式所得者。同樣，在 $D_2 = 1$ 的情況得

$$S_{12} = -\frac{6EI}{L_2^2} \qquad S_{22} = \frac{12EI}{L_2^3} \qquad M_a'' = 0 \qquad M_c'' = \frac{6EI}{L_2^2}$$

** 在1826年，Navier 氏應是用勁性法作結構分析的第一人。他曾取接頭變位爲未知量，求解二次級動不定結構。並寫出兩個平衡方程式（見參考書 1－1及 7－1與 1－14 等）。後來在 1862 年 Clebsch氏，曾對各種桁架的勁性法作一般性的描述。（見參考書 1－1，11－22 ），勁性法應用到平面構架，係在 1914 年由Bendixen氏創始（見參考書 11－23及 1－1 ）。勁性法的一般性公式，係在 1926年由Ostenfeld氏所作（見參考書 11－24 ）。

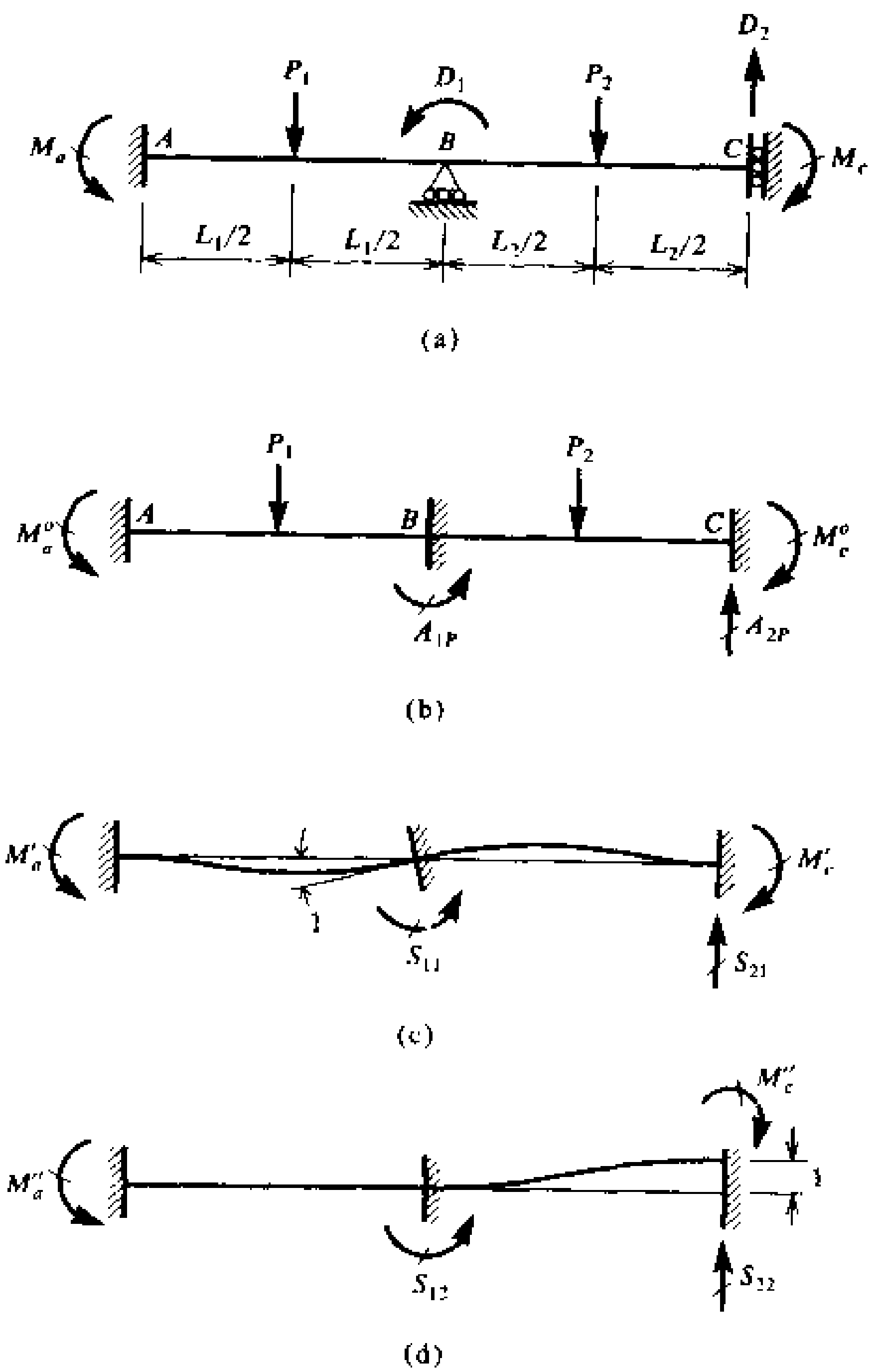


圖 11・27 例題 勁性法

欲求接頭變位 D_1 及 D_2，可將先前的各數代入平衡方程式（11－28），再求解各方程式。在那些方程式內的作用 A_1 及 A_2 爲零。因爲在接頭 B 並無施加的力偶，在接頭 C 亦無垂直力（見圖 11－27 a）。解方程式求得 D_1 及 D_2 後，能從下列的重疊方程式求得力偶 M_a 及 M_c。

$$M_a = M_a^o + M_a' D_1 + M_a'' D_2 \tag{g}$$

$$M_c = M_c^o + M_c' D_1 + M_c'' D_2 \tag{h}$$

為了明確地完成本例題的解答，假定下列的各個關係：

$$P_1 = 2P \qquad P_2 = P \qquad L_1 = L_2 = L$$

然後將先前所得的各項，簡化成

$$A_{1P} = -\frac{PL}{8} \qquad A_{2P} = \frac{P}{2} \qquad M_a^0 = \frac{PL}{4} \qquad M_c^0 = -\frac{PL}{8}$$

$$S_{11} = \frac{8EI}{L} \qquad S_{12} = S_{21} = -\frac{6EI}{L^2} \qquad S_{22} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$M_a' = \frac{2EI}{L} \qquad M_c' = -\frac{2EI}{L} \qquad M_a'' = 0 \qquad M_c'' = \frac{6EI}{L^2}$$

將這些項代入方程式（ 11 － 28 ），並重整之，得

$$4LD_1 - 3D_2 = \frac{PL^3}{16EI}$$

$$LD_1 - 2D_2 = \frac{PL^3}{12EI}$$

由上式解得

$$D_1 = -\frac{PL^2}{40EI} \qquad D_2 = -\frac{13PL^3}{240EI}$$

該負號顯示，在 B 處的旋轉作順時針走向，而在 C 處的移動是向下的。

最後一步，由方程式(g)及(h)得反力矩為：

$$M_a = \frac{PL}{4} + \frac{2EI}{L}\left(-\frac{PL^2}{40EI}\right) = \frac{PL}{5}$$

$$M_c = -\frac{PL}{8} - \frac{2EI}{L}\left(-\frac{PL^2}{40EI}\right) + \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{13PL^3}{240EI}\right) = -\frac{3PL}{20}$$

因為該結構是二次靜不定結構，關於這兩個力矩的資料，已足夠用靜力學來確定其他的反力及應用合力。

11．8　應變能及餘能

應變能及餘能的雙重概念，為結構分析中若干強有力的方法，提供了一個根據。這幾種方法一律可應用於直線型及非直線型的結構。這種情況也是虛功原理（方程式 11 － 1 ）及單位載重法（方程式 11 － 3 ）在其基本形式中的情形。但互換定理、韌性法及勁性法，則因依據重疊原則，只能應用於結構之具有直線型行態者。在單位載重法中，我們開始為非彈性

結構導出方程式（11－3），並在以後，將直線型結構當作一種特殊情形加以考慮而得方程式（11－4）。緊隨其後關於能方法的討論中，也將採用相似的過程。

一座結構行態具非直線性者，主要的由於兩個原因中之一。最明顯的原因是一種具有非直線型應力－應變曲線的材料，在此種情形下，稱此種結構爲具有材料非直線性（material nonlinearities）。另外一種可能性係由撓曲變形結構的幾何形所產生者。無論何時，當該結構的撓度將加上的載重或反力作用改變時，卽發生這種情勢。一個具有偏心軸向載重之柱（見第10.1節）卽爲一個實例。在這種情事中，曾經看到，該柱雖起很微小的横向撓度，對於柱內的彎力矩，也會有很重大的影響。另外一例，是具有很大撓度的樑，如6.12節內曾經敍及者。在這兩個例中，樑的材料一律假設係遵循胡克氏定律，但由於已變形的結構之幾何形，我們發見撓度及應力合力，與所加的載重發生非直線型關係。這兩個例，均爲幾何學的非直線性（geometric nonlinearities）之例證。

不問究竟是由材料的或幾何形的非直線型存在，我們將永遠假設該結構的材料，仍將保持彈性。若眞是如此，則從以下的討論中所得到的結果，將對該結構上多於一次的載重，將爲正當無誤。若該項材料爲非彈性的，則所得的結果，只在該結構的第一載重期內，是可以適用的。

處於材料遵循胡克氏定律，且沒有幾何學的非直線性特殊情形，則該結構的行態，將爲一種直線型的樣式，而重疊原理可以應用。但對於一個非直線型的結構，我們必須經常留心這個事實，卽重疊原理普通均不宜應用。

爲舉例說明能的概念，讓我們考慮一根等截面桿件承受一個軸向力 P，且產生一項均佈應力 $\sigma = P/A$（見圖11－28a）。在桿件內的應變爲

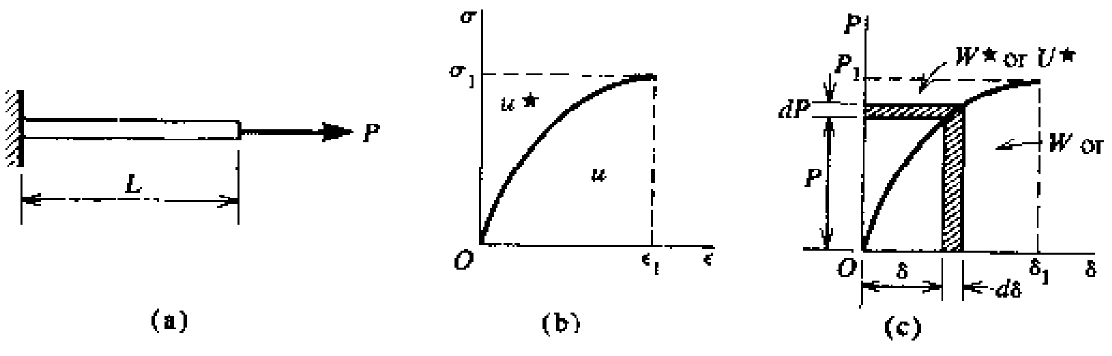


圖11·28　應變能及餘能

$\epsilon = \delta / L$,式中的 δ ,爲桿件的伸長量,L 爲其長度。該桿件材料假設爲彈性材料,並具有如圖 11－28 b 所示的非直線型應力－應變曲線。於是載重撓度關係(圖 11－28 c)將具有與應力－應變曲線相同的一般形狀。由載重 P 所完成的功爲:

$$W = \int_0^{\delta_1} P\, d\delta$$

式中的 δ_1 爲撓度的最大值。這個關於功的式子,可按幾何學解釋如圖11－28c所示,在載重－撓度曲線以下的面積。由於該桿件的行態是彈性的,由於在加上及卸去載重時所起能的損失略去不計,換句話說,由於我們係處理一個保守的系統,故所有一切由載重所完成的功,將以彈性應變能的形式儲存於該樑內,並假定在卸去載重時仍能恢復。因此,應變能即等於完成的功W 而成立如下式:

$$U = W = \int_0^{\delta_1} P\, d\delta \tag{11-31}$$

材料的每個單位體積的應變能 u ,可考慮其爲體積微小的單位尺寸元體,承受應力 σ 並經過一個應變 ϵ ,其最大值爲 $\epsilon_1 = \delta_1 / L$;於是得

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma\, d\epsilon \tag{11-32}$$

在方程式(11－32)內的積分,代表圖 11－28 b 內應力－應變曲線下的面積。與這個相同的 u 式子,可從總應變能(見方程式 11－31)式,除以桿件體積(等於 AL),並注意 $\sigma = P / A$ 及 $d\epsilon = d\delta / L$ 而獲得。與此相反,總應變能,可從各個單位體積的應變能,用積分法獲得,如下式:

$$U = \int u\, dV \tag{11-33}$$

式中的 dV 爲體積的一個元體,積分係就該桿件的整個體積以完成。

在應力－應變曲線遵循胡克氏定律的特殊情形,因而 $\sigma = E\epsilon$ 及 $P = EA\delta / L$ 。在上面的應變能式子,將產生如下的方程式:

$$U = \frac{EA\delta_1^2}{2L} = \frac{P_1^2 L}{2EA} \tag{11-34a,b}$$

$$u = \frac{E\epsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E} \tag{11-35a,b}$$

這些式子與在 1.10 節所導得的相同(見方程式 1－16及1－17)。

現在爲桿件具有非直線型載重－撓度曲線的另一種型式的功下一定義（見圖11－28）。這種功被稱爲餘功（complementary work）W^*，其定義爲：

$$W^* = \int_0^{P_1} \delta \, dP$$

餘功，係用介於載重－撓度曲線及垂直軸間的面積來代表（圖11－28c）。餘功，並未具有顯明的物理內涵，如功W所做的。但我們可以注意到：

$$W + W^* = P_1\delta_1 \tag{a}$$

因此，在一種幾何學的意義下，功W^*爲功W的補餘，因其能使圖11－28c 內所示的矩形成爲完整。該桿件的餘能U，等於所加載重的餘功，於是：

$$U^* = W^* = \int_0^{P_1} \delta \, dP \tag{11-36}$$

餘能，可將一個元體視爲承受應力σ及應變ϵ，在用來規定該桿件每個單位體積的應變能相類似的樣式。用該項材料每個單位體積來表示；於是

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \epsilon \, d\sigma \tag{11-37}$$

每個單位體積的餘能，即等於應力－應變曲線與應力軸間的面積（圖11－28b）。整座結構的總餘能，可用積分法從u^*式得到：

$$U^* = \int u^* \, dV \tag{11-38}$$

有時，餘能被稱爲應力能（stress energy）以便維持與應變能的類似性質。

若圖11－28b所示的應力－應變曲線爲直線型，則毫無疑問，餘能及應變能將變成相等。但這兩種能的數量，在概念上彼此頗不相同。因此偶然需要維持二者之間的分別，甚至即在直線型的情況下，兩者在數值上雖屬相同，亦依然需要分別。雖然，所有在以前屬於應變能及餘能的一切理想，均與一根受拉力的桿件有關，但這些理想，均可很容易的擴大，以包括其他載重情況如扭力及彎曲等。因此，可將圖11－28c內所示的載重－撓度曲線，視爲代表任何一種結構如樑、平面構架或桁架等，介於載

重與其相當的變位間的關係。在所有如此的實例中，可應用方程式（ 11－31 ）及（ 11 － 36 ）以獲得伴隨載重而起的功及餘功。這些功的數量，將分別等於該結構的應變能及餘能。若該載重爲一個力偶M及與其相當的變位θ，只需以M及θ代替P及δ即可。

通常，常有多於一個的載重，作用在一個結構上。因此關於能及功的各項，需用各項的總結而獲得。於是，若一個非直線型的彈性結構承受幾個載重，所有這些載重全在同時加在該結構上，並維持其相互間的一定比例，則其應變能及餘能分別爲：

$$U = \sum \int P\, d\delta \qquad U^* = \sum \int \delta\, dP \tag{11-39a,b}$$

在這兩個式子內的總和，係指該結構上作用一切載重計算而得。在求積分時，係取下限爲零，上限則分別等於δ及P的最大值。

當該結構的行態作直線型時，則以上爲U及U^*所得的式子即變爲相等，且具有由方程式（ 1 － 15 ）所提供的形式：

$$U = U^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i \delta_i}{2} = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \cdots + \frac{P_n \delta_n}{2} \tag{11-40}$$

式中的P_i及δ_i，爲載重的最大值，與其相當的變位值。而n則爲載重數目的總數。方程式（ 11 － 40 ）以變位及載重二者爲項以表示U及U^*。但是，我們很容易以一個數量爲項代入另一個，或單獨以變位爲項或單獨以載重爲項來表示這兩個數量。於是因爲該結構的行態爲直線型的，其載重即可表示爲變位的直線型之組合，有如下列諸式：

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + \cdots + a_{1n}\delta_n \\ P_2 &= a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + \cdots + a_{2n}\delta_n \\ &\cdots \\ P_n &= a_{n1}\delta_1 + a_{n2}\delta_2 + \cdots + a_{nn}\delta_n \end{aligned} \tag{11-41}$$

式中的a_{11}，a_{12}，……a_{nn} 均爲常數，將依結構的性質而定。若將這些關係代入方程式（ 11 － 40 ）內，則應變能及餘能將被表示成爲只含變位的一個函數，並具有下列的一般性形式：

$$\begin{aligned} U = U^* = {} & b_{11}\delta_1^2 + b_{12}\delta_1\delta_2 + \cdots + b_{1n}\delta_1\delta_n \\ & + b_{21}\delta_2\delta_1 + b_{22}\delta_2^2 + \cdots + b_{2n}\delta_2\delta_n \\ & \cdots \\ & + b_{n1}\delta_n\delta_1 + b_{n2}\delta_n\delta_2 + \cdots + b_{nn}\delta_n^2 \end{aligned} \tag{11-42}$$

式中的若干 b 係數，是由 a 係數中得來的新常數。此種形式的式子，被稱爲二次函數（ quadratic function ）。因爲所有在諸式中的各項，均爲二次之故。二中擇一的另外一個方法，我們可以載重爲項求解方程式（11－41 ）而獲得下列諸式：

$$\begin{aligned} \delta_1 &= c_{11}P_1 + c_{12}P_2 + \cdots + c_{1n}P_n \\ \delta_2 &= c_{21}P_1 + c_{22}P_2 + \cdots + c_{2n}P_n \\ &\cdots \\ \delta_n &= c_{n1}P_1 + c_{n2}P_2 + \cdots + c_{nn}P_n \end{aligned} \tag{11-43}$$

在式中的若干 c 係數，皆爲新常數。將依 a 係數値而確定。當這些方程式代入方程式（ 11 － 40 ）之後，即爲 U 及 U^* 得到另外一個二次函數；如下：

$$\begin{aligned} U = U^* = & d_{11}P_1^2 + d_{12}P_1P_2 + \cdots + d_{1n}P_1P_n \\ & + d_{21}P_2P_1 + d_{22}P_2^2 + \cdots + d_{2n}P_2P_n \\ & \cdots \\ & + d_{n1}P_nP_1 + d_{n2}P_nP_2 + \cdots + d_{nn}P_n^2 \end{aligned} \tag{11-44}$$

式中的各係數仍爲常數，將依該結構的性質而定。這些結果，表示在一座結構的行態作直線型的情況下，應變能及餘能又可用一個變位的二次函數或用一個載重的二次函數來表示。

【例題】1. 假設有一結構上負一個 P 力作用，所產生與其相當的變位 δ ，可用方程式 $\delta = CP^2$ 來代表。式中的 C 爲一個常數（見圖11 － 29 ）。試爲該結構確定其應變能及餘能。

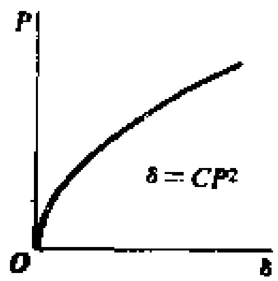


圖 11 29 例題 1 非直線型載重 - 撓度曲線

應變能可以 δ 爲項代替 P ，而由方程式（ 11 － 31 ）求得之，於是

$$U = \int_0^{\delta} \sqrt{\frac{\delta}{C}}\, d\delta = \frac{2\delta^{3/2}}{3C^{1/2}} \tag{11-45}$$

其餘能，則可從方程式（11－36）求得之

$$U^* = \int_0^P CP^2\, dP = \frac{CP^3}{3} \tag{11-46}$$

注意。變位餘能是以變位爲項來表示的。而餘能係用載重爲項來表示。這種代表能的形式，係與U及U^*定義的性質相符而成一致。將在以下幾節內可以看出，這種形式，在求撓度及分析結構時，最爲有用。自然，在若干情形下，很可能以載重爲項來表示應變能，並以變位爲項來表示餘能。所求結果，可將原來的載重－撓度關係$\delta = CP^2$，代入方程式（11－45）及（11－46），以完成本例之解。

【例題】2　一座結構，係由兩根水平桿件AC及CB所組成，每根長度爲L，如圖（11－30a）所示。這兩根桿件均爲栓接支承，在C點則用鉸連接。桿件材料用直線型彈性材料，每一桿件具有爲常數的軸向剛度

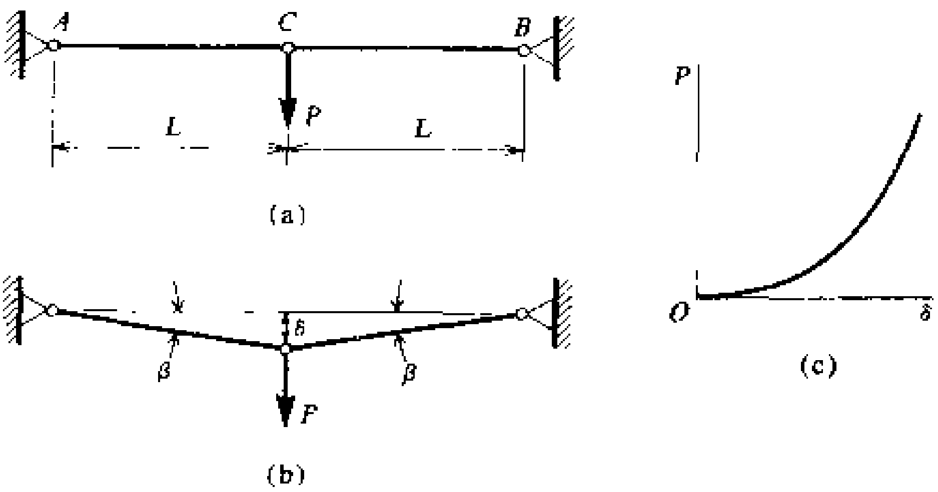


圖11‧30　例題2　幾何的非直線型性之結構

EA。設在C點加施一個垂直力P，只要兩根桿件仍保持在原來的水平位置，則兩根桿件便不能支承該載重。當該載重被逐漸加上時，接頭C將作向下的撓曲變位，而在桿件內將發生拉力。於是即可達到該結構的平衡位置，而在該載重下將有一個微小的撓度δ產生（見圖11－30b）。

讓我們爲這個結構估計其應變能及餘能。首先必須獲得載重P與撓度δ間的關係。這個關係可從力及桿件的伸長式中獲得。於是由靜力學，在每根桿件內的拉力N爲：

$$N = \frac{P}{2\sin\beta}$$

式中的 β 爲兩根桿件的旋轉角。但撓度 δ 及旋轉角 β 均假設爲微小數量。因此可以 δ/L 代替 β，並以 β 代替 $\sin\beta$， 於是在上面的方程式成爲：

$$N=\frac{PL}{2\delta}$$

每根單獨桿件的伸長量 Δ，現在可根據胡克氏定律得：

$$\Delta=\frac{NL}{EA}=\frac{PL^2}{2EA\delta} \tag{b}$$

關於該結構的撓度 δ，及桿件伸長量 Δ 的第二個方程式，可從該結構撓曲變位後的幾何形求得之。每根桿件在長度上的增量（從圖 11 － 30 b ）爲：

$$\Delta=\sqrt{L^2+\delta^2}-L=L\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{L}\right)^2}-L$$

依照二項式定理，將根號下的式子展開得

$$\Delta=L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{L}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{\delta}{L}\right)^4+\cdots\right]-L$$

對微小的撓度，可將式子內所包含指數高於 2 的各項，均捨去不計。只保留在括號內的前面兩項。於是 Δ 式簡化成

$$\Delta=\frac{\delta^2}{2L} \tag{c}$$

至此，可在方程式(b)及(c)間將 Δ 消去，因此爲該結構產生一個合宜的載重－撓度關係。這種關係可用下面兩個形式中的任何一個來表示：

$$P=\frac{EA\delta^3}{L^3}\qquad\delta=\sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}} \tag{11-47a,b}$$

這兩個方程式的曲線如圖（ 11 － 30 c ）所示。要注意到，在這例題內的分析結構，就幾何學而言，爲非直線型的，雖其材料本身係遵循胡克氏定律。此一事實頗爲重要。

至此，已能從方程式（ 11 － 31 ） 很容易求得該結構的應變能：

$$U=\int_0^{\delta}P\,d\delta=\int_0^{\delta}\frac{EA\delta^3}{L^3}\,d\delta=\frac{EA\delta^4}{4L^3} \tag{11-48}$$

同樣，從方程式（ 11 － 36 ）可求得餘能爲：

$$U^* = \int_0^P \delta\, dP = \int_0^P \sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}}\, dP = \frac{3P^{4/3}L}{4\sqrt[3]{EA}} \tag{11-49}$$

仍應注意，此式是以變位爲項以表示應變能，並以載重爲項以表示餘能。

【例題】3　一根長爲 L 截面爲矩形（寬度爲 b 高度爲 h）的懸臂樑，負荷一個集中載重 P 在自由端上（見圖 11－31）。應力－應變圖，用方程式 $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$ 代表之。式中 B 爲一個常數，對於拉力及壓力均爲相同。

在這個例題內，應力及應變係從樑的一端變化至另一端，因此需要由決定每個單位體積的餘能 u^* 開始。於是，爲獲得總餘能 U^* 起見，可就樑的整個體積求其積分。數量 u^* 將爲 x（距樑的自由端距離）及 y（距

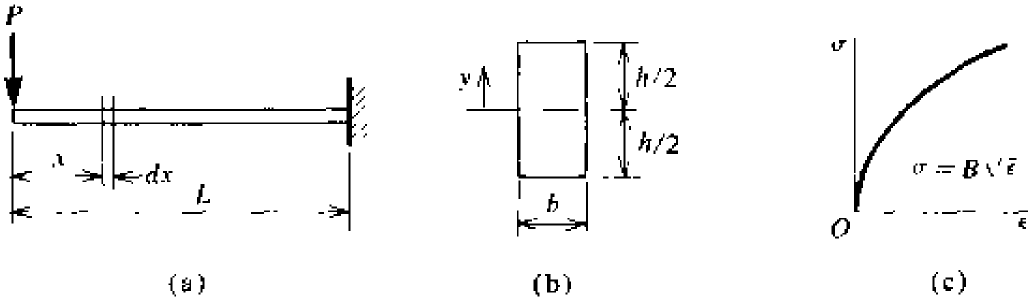


圖 11－31　例題 3　非直線型應力－應變曲線材料之懸臂樑

中性軸的距離）的一個函數。爲求得 u^* 起見，需要明瞭存在於樑上某一點，即具有其座標爲 x 及 y 者的應力 σ_1。若已知在同點上的應變 ϵ_1 則該應力 σ_1 即可求得；而在該點上的曲度若爲已知，則該應變亦可求得。因此，必須先建立該樑的曲度開始，從事分析工作。

用 9-7 節內，爲樑的非彈性彎曲所敘述的方法，可很容易求出該樑的曲度。從方程式（9－22）得其曲度爲：

$$\kappa = \frac{\epsilon_t}{h} \tag{d}$$

式中的 ϵ_t，爲該樑頂纖維內應變的兩倍（見方程式 9－26）。從方程式（9－27）可爲任何一個截面上的彎力矩得到下列式子：

$$M = \frac{2bh^2}{\epsilon_t^2}\int_0^{\epsilon_t/2} \sigma\epsilon\, d\epsilon$$

代入 $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$ 並求其積分，可得：

$$M = \frac{Bbh^2\sqrt{\epsilon_t}}{5\sqrt{2}}$$

從上式可得

$$\epsilon_t = \frac{50M^2}{B^2b^2h^4} \tag{e}$$

至此，可由方程式(d)及(e)間，將 ϵ_t 消去，並以 Px 代替彎力矩 M 以求曲度 κ 如下式：

$$\kappa = \frac{50P^2x^2}{B^2b^2h^5} \tag{f}$$

由這個方程式得出的曲度，爲沿該樑軸線量得的距離 x 的函數。

在該樑上任何一個截面的應變 ϵ_1 爲

$$\epsilon_1 = \kappa y$$

與方程式（9－1）所提供者相同。應力可利用應力－應變的關係。從應變求得：

$$\sigma_1 = B\sqrt{\epsilon_1} = B\sqrt{\kappa y}$$

將由方程式(f)得來的曲度 κ 代入，得到：

$$\sigma_1 = \frac{5\sqrt{2}\,Py^{1/2}x}{bh^{3/2}} \tag{g}$$

即爲在該樑上任何一點的應力公式。

至此，我們已準備就緒計算每個單位體積的餘能 u^*（見方程式11－37）：

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \epsilon\, d\sigma = \int_0^{\sigma_1} \frac{\sigma^2}{B^2}\, d\sigma$$

在式中 σ_1 值，係由方程式(g)所提供。完成積分程序可得：

$$u^* = \frac{250\sqrt{2}\,P^3y^{3/2}x^3}{3B^2b^3h^{15/2}} \tag{h}$$

這是一個以 x 及 y 函數，求每個單位體積的餘能。全樑的餘能 U^* 可就該樑的體積求 u^* 的積分而得，如方程式（11－38）所示。在安排求積分時，將使 x 從0變化至 L，而 y 則從0變位至 $h/2$；於是將其結果加倍，並以樑的兩半計入。於是餘能的方程式爲：

$$U^* = \int u^*\, dV = 2\int_0^L \left[\int_0^{h/2} u^* b\, dy\right] dx$$

將 u^* 式(h)代入，則得

$$U^* = \frac{500\sqrt{2}\,P^3}{3B^2b^2h^{15/2}} \int_0^L \left[\int_0^{h/2} y^{3/2}\, dy\right] x^3\, dx$$

由此式可得：

$$U^* = \frac{25P^3L^4}{6B^2b^2h^5} \tag{11-50}$$

這個方程式，是以力 P 爲項提供餘能，一如以前所預期者。

11 · 9 應變能法

現在將繼續展開若干重要的應變能原理，使建立結構分析的基礎。讓我們想像有一座結構，承受 n 個載重 P_1 、P_2 、……P_n ，而這些載重並將產生相當的變位 δ_1 、δ_2 、……δ_n。與在以前的討論相同，我們瞭解，P 及 δ 係代表在一般化的觀念中的力，與其相當的變位。因此包括了一個力及一個移動，一個力偶及一個旋轉，一對力及一個相對變位，或兩個力偶及一個相對的旋轉等的可能性。並了解該結構的行態，可能為非直線型的，亦即意指任何一個力 P_i 與其相當的變位 δ_i 之間的關係，用圖 11－28 c 內所示的載重－變位圖，作為典型的代表。

該結構的應變能 U ，等於各載重加在該結構上所完成的功。每一個力 P_i，應當在理論上可利用適當的載重－變位關係，表示成為一個與其相當的變位 δ_i 的一個函數。這些屬於載重的式子，可代入方程式（11－39a），然後再完成求積分及求總和的計算工作。結果所得到應變能 U 的式子，將為變位 δ 的一個函數。以這些變位為項所表示的 U 求得後，即可追求，當其中有一個變位 δ_i 增加微小量 $d\delta_i$，而其他一切變位仍保持固定不變時，在應變能中的增加為若干？這種在應變能中的增加，用 dU 來代表，可用下式求得：

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i$$

式中的偏導數 $\partial U / \partial \delta_i$ 為應變能對 δ_i 的改變率。我們並可知道，當變位 δ_i 增加微小量 $d\delta_i$ 時，則與其相當的力 P_i 將完成做功，而任何其他各力則未能完成做功，因其他各變位並未改變之故。這個功，即 $P_i\ d\delta_i$，也等於儲存在該結構內應變能所增加的量。

$$dU = P_i d\delta_i$$

將以上兩個屬於 dU 的式子使其相等，得：

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \tag{11-51}$$

這個方程式說明，對任何一個變位 δ_i 的應變能的偏導數，等於與其相當的力 P_i。倘該應變能被當作一個變位的函數來表示。這個方程式被稱為「卡斯梯葛利亞諾」氏第一定理（Castigliano's first theorem）。由意大利工程師卡氏，首先誘導並應用這個定理，刊行於 1879 年的有名的著作內。見（參考書 11－25 至 11－29）。

為舉例說明卡氏第一定理起見，讓我們參照在上一節例題 1 內所述的非直線型結構。該結構的應變能由方程式（ 11 － 45）提供。應用卡氏第一定理，在那個式子，我們得到

$$P = \frac{dU}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left(\frac{2\delta^{3/2}}{3C^{1/2}}\right) = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$$

從這個式子可得到 $\delta = CP^2$ ，為載重與撓度間的正確關係。

以相同樣式，我們可應用卡氏第一定理於圖（ 11 － 30 a ）所示，在前節例題 2 內的幾何學非直線型結構。應變能，可由方程式（ 11 － 48 ）提供，於是獲得：

$$P = \frac{dU}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left(\frac{EA\delta^4}{4L^3}\right) = \frac{EA\delta^3}{L^3}$$

又一次得到了這個結果，與以前的分析相符（見方程式11－ 47 a）。

卡氏的第一定理，提供一種利用應變能作非直線型結構的分析法。這個方法是利用接頭的變位作為未知數量的根據，與這個事實正相符合。即假設我們想應用卡氏定理，必須將應變能表示成一個變位的函數。為展示這個方法，假設有一座非直線型結構，具有 n 個未知接頭變位 D_1 、 D_2 、……D_n 。並假設在該結構上僅有的載重，為符合這些運動學的未知數的載重。這些載重將以 P_1 、 P_2 、……P_n 代表之，以便分別符合於 D_1 、 D_2 、……D_n 。於是一如曾經解釋的，可以未知的接頭變位 D_1 、 D_2 、……D_n 等項為項，以表示該結構的應變能 U 。在已完成此項步驟之後，即可對每一個變位應用卡氏第一定理，而獲得一組 n 個聯立方程式如下：

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial D_1} \qquad P_2 = \frac{\partial U}{\partial D_2} \quad \cdots \quad P_n = \frac{\partial U}{\partial D_n} \tag{11-52}$$

每個方程式的一般性形式均屬相同。若我們檢查一個典型的方程式，假如第 i 個方程式，將發現這個事實，即該方程式的右側，係由包含 n 個接頭變位 D_1 、 D_2 、……D_n 為未知數量的各項所組成。因為這些項，將為總結至載重 P_i 本身之和。我們可以斷定，這個方程式在實際上是代表相當於算至 P_i 諸力的一種平衡條件。因此，（ 11 － 52 ）各方程式為一組平衡方程式，可同時解出，將以載重 P_1 、 P_2 、……P_n 為項而求得各個接頭變位。在分析工作中的最後一步，是從接頭變位以計算其他各項數量如反力及應力合力等。

在上一段內所述的應變能法，利用接頭變位為未知數量，並需求解一組平衡方程式。所以此種分析方法為一種變位法（ displacement method

），此種方法業已作為直線型結構的情況，當作勁性法敘述過（見第11.7節）。變位法及勁性法在原則上是相同的方法。但因勁性一詞，只被限於直線型分析用。所以從現在開始，將使用"變位法"這個名詞，作為被考慮非直線型結構分析的可能性用。使用"勁性法"這個名詞只適於具直線型結構討論時用。以變位法用於一座非直線型結構的分析工作，其實例之一，將在以後作為〔例題〕1.說明之。

現在讓我們作更詳盡的考慮一座直線型結構的特殊情況，亦即一座結構可應用重疊原理者。在這種情況中，應變能U將為變位的一個二次函數，如在上一節內曾加說明者。所以當有n個未知的接頭變位D_1、D_2、……D_n及n個與彼等相當的載重P_1、P_2、……P_n時，則應變能U方程式的一般形式將成為

$$
\begin{aligned}
U = {} & a_{11}D_1^2 + a_{12}D_1D_2 + \cdots + a_{1n}D_1D_n \\
& + a_{21}D_2D_1 + a_{22}D_2^2 + \cdots + a_{2n}D_2D_n \\
& \cdots \\
& + a_{n1}D_nD_1 + a_{n2}D_nD_2 + \cdots + a_{nn}D_n^2
\end{aligned}
$$

在上式中係數a_{11}、a_{12}、……等均為常數，將依該結構的性質而定。現在，假如我們應用卡氏第一定理（見方程式11－52），可獲得平衡方程式如下：

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\partial U}{\partial D_1} = S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + \cdots + S_{1n}D_n \\
P_2 &= \frac{\partial U}{\partial D_2} = S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + \cdots + S_{2n}D_n \\
& \cdots \\
P_n &= \frac{\partial U}{\partial D_n} = S_{n1}D_1 + S_{n2}D_2 + \cdots + S_{nn}D_n
\end{aligned} \qquad (11\text{-}53)
$$

在以上各式中，S_{11}、S_{12}等為常數，其值將依各係數a值而定，亦即將依結構的性質而定。從這些方程式的形式，可以看出，這些係數是該結構的勁性係數（見第11.7節及方程式11－29）。於是方程式（11－53）乃為結構分析用勁性法中的平衡方程式。

介於一座結構的應變能及其勁性間的一項重要關係，可由求取方程式（11－53）的偏導數而獲得如下的結果：

$$\frac{\partial P_1}{\partial D_1}=S_{11} \qquad \frac{\partial P_1}{\partial D_2}=S_{12} \quad \cdots \quad \frac{\partial P_1}{\partial D_n}=S_{1n} \tag{a}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial D_1}=S_{21} \qquad \frac{\partial P_2}{\partial D_2}=S_{22} \quad \cdots \quad \frac{\partial P_2}{\partial D_n}=S_{2n} \tag{b}$$

其餘各方程式亦可求得諸如此類的數值。

因爲P_1 等於 $\partial U / \partial D_1$，所以方程式(a)可以寫成如下列的各式：

$$S_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_1^2} \qquad S_{12}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_2\,\partial D_1} \quad \cdots \quad S_{1n}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_n\,\partial D_1}$$

同樣，方程式(b)將化爲

$$S_{21}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_1\,\partial D_2} \qquad S_{22}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_2^2} \quad \cdots \quad S_{2n}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_n\,\partial D_2}$$

從這些例子內，現出了導數的型式。我們可斷定勁性係數與應變能有關，可用下列的一般性方程式來表示：

$$S_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_j\,\partial D_i} \tag{11-54}$$

於是無論何時，當應變能被當作未知的變位D_1、D_2、……D_n 等的一個二次函數來表示時，立刻可用求偏微分的程序爲該結構求得其勁性。又因求U 微分的次序並不重要，因此勁性的互換定理，可以成立：

$$S_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_j\,\partial D_i}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_i\,\partial D_j}=S_{ji} \tag{11-55}$$

自然，在以上關於勁性的討論，只能適用於直線型的彈性結構。在以下的〔例題〕2 及 3，將爲應變能法應用於直線型結構行態作一解說。

【例題】1. 圖 11 − 32 a 所示的桁架ABC，在其接頭B處支承一個垂直載重P。AB及BC兩根桿件均具有不變的截面積A。材料的應力-應變關係（見圖 11 − 32 b）爲$\sigma = B\sqrt{\epsilon}$，式中的$B$爲一常數。此種關係在拉力及壓力均各相同。利用卡氏第一定理，用變位法分析這個非直線型的彈性桁架。

在這個結構的接頭B處，有兩個未知的變位，一個水平變位D_1及一個垂直變位D_2，如附圖所示。這個結構的應變能，必須用這些變位爲項來表

示，以使用卡氏第一定理獲得平衡方程式。應變能的決定如下：由於變位

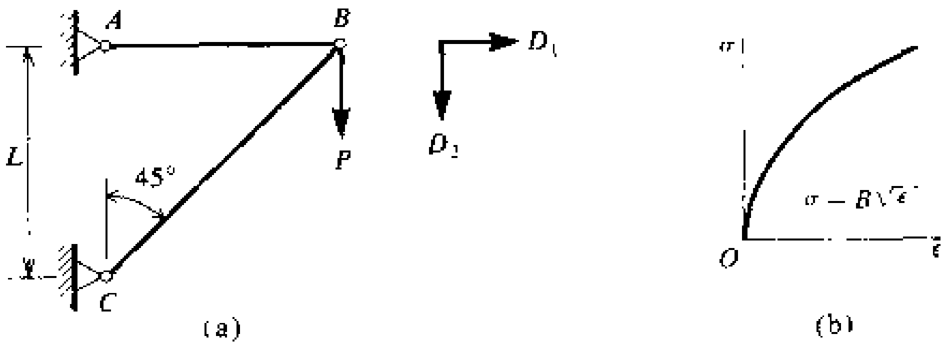


圖 11.32　例題 1　用非直線型應力 - 應變曲線材料之桁構

D_1 之故，AB 桿件將有一個等於 D_1 的伸長，而 BC 的伸長則等於 $D_1\sqrt{2}$。由於變位 D_2 之故，BC 桿件將有一個等於 $D_2\sqrt{2}$ 的縮短，但在 AB 長度內則無變化。於是 AB 桿件的總伸長為 D_1，而 BC 桿件的總縮短則為 $(D_2 - D_1)/\sqrt{2}$。因此，在此兩桿件內的應變為：

$$\epsilon_{ab} = \frac{D_1}{L} \text{（伸長）} \tag{c}$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{D_2 - D_1}{2L} \text{（縮短）} \tag{d}$$

現在可從方程式（11 － 32）內求出每根桿件內每個單位體積的應變能為

$$u_{ab} = \int_0^{\epsilon_{ab}} \sigma\, d\epsilon = \int_0^{\epsilon_{ab}} B\sqrt{\epsilon}\, d\epsilon = \frac{2B}{3}\left(\frac{D_1}{L}\right)^{3/2}$$

$$u_{bc} = \int_0^{\epsilon_{bc}} \sigma\, d\epsilon = \int_0^{\epsilon_{bc}} B\sqrt{\epsilon}\, d\epsilon = \frac{2B}{3}\left(\frac{D_2 - D_1}{2L}\right)^{3/2}$$

因為在每根桿件整個體積內的應力及應變為固定不變，因此可以桿件的體積乘每個單位體積的應變能而得到每根桿件內的總應變能。於是這些應變能即可加在一起而得該結構的總應變能 U：

$$U = U_{ab} + U_{bc} = u_{ab} AL + u_{bc} AL\sqrt{2}$$

從這個式子可以得到：

$$U = \frac{AB}{3\sqrt{L}}\left[2D_1^{3/2} + (D_2 - D_1)^{3/2}\right] \tag{11-56}$$

式中的 A，為每根桿件的截面積。這個方程式，用未知的接頭變位 D_1 及 D_2 為項提供其應變能。

現在可用卡氏第一定理獲得平衡方程式（見方程式 11 － 52）。在這

些方程式內的數量 P_1，代表相當於 D_1 的載重，並等於零；而 P_2 則代表相當於 D_2 的載重，且等於 P。於是我們得到：

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial D_1} = \frac{AB}{2\sqrt{L}}[2D_1^{1/2} - (D_2 - D_1)^{1/2}] = 0$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial D_2} = \frac{AB}{2\sqrt{L}}(D_2 - D_1)^{1/2} = P$$

將這兩個方程式簡化之得：

$$2D_1^{1/2} - (D_2 - D_1)^{1/2} = 0 \tag{e}$$

$$(D_2 - D_1)^{1/2} = \frac{2P\sqrt{L}}{AB} \tag{f}$$

將以上兩個方程式解出，可獲得接頭變位爲：

$$D_1 = \frac{P^2L}{A^2B^2} \qquad D_2 = \frac{5P^2L}{A^2B^2} \tag{11-57}$$

這一步驟，是用變位法完成分析的主要部分。因爲現在已知 D_1 及 D_2 很容易計算出所有一切在桿件上的力及反力。

爲舉例說明這最後一步計算工作，讓我們決定在該桁架各桿件內的力。首先將 D_1 及 D_2（見方程式11－5）代入方程式(c)及(d)內，可獲得桿件內的應變如下

$$\epsilon_{ab} = \frac{D_1}{L} = \frac{P^2}{A^2B^2} \quad (\text{伸長})$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{D_2 - D_1}{2L} = \frac{2P^2}{A^2B^2} \quad (\text{縮短})$$

下一步，從應力－應變定律，可決定其應力如下：

$$\sigma_{ab} = B\sqrt{\epsilon_{ab}} = \frac{P}{A} \quad (\text{拉力})$$

$$\sigma_{bc} = B\sqrt{\epsilon_{bc}} = \frac{\sqrt{2}P}{A} \quad (\text{壓力})$$

這些結果，很容易用靜力學的平衡予以證明。

$$N_{ab} = \sigma_{ab}A = P \quad (\text{拉力})$$

$$N_{bc} = \sigma_{bc}A = \sqrt{2}P \quad (\text{壓力})$$

在這個例題內，曾經故意將其解法中的一切步驟一一加以敘述，以便說明變位法的一般性概念、及卡氏第一定理的應用。雖然這個結構頗爲簡單，很容易按靜定結構加以分析。應用變位法要解兩個聯立方程式，因該桁架爲運動力學的二次靜不定結構。但因該結構爲一個靜定結構，故又可

分析如下：(1)從靜力學的平衡求出各桿件內的力；(2)由採用截面積除各力，以求各桿件內的應力；(3)從應力－應變圖獲得各桿件內的應變；(4)從應變決定各桿件的伸長量；及(5)繪出韋氏（ Williot ）圖（見第 1.5 節）以獲得接頭 B 的變位 D_1 及 D_2 。

【例題】2　作爲應用卡氏第一定理及勁性法求解一座直線型結構分析工作的說明。讓我們考慮繪於圖 11 － 33 a 內的桁架。假設，所有桁架的四根桿件，均用同樣的直線型彈性材料，並具有彈性模數 E 。每根桿件的長度均爲 L ，截面積均爲 A ， β 角均等於 30° 。載重 P_1 及 P_2 均在該桁架的接頭 E 處作用。

選擇這個桁架作爲例題，是因爲接頭移動僅具二級次自由，亦即在接頭 E 處的水平及垂直向的移動 D_1 及 D_2（圖 11 － 33 b ）。爲將應變能表示成爲一個 D_1 及 D_2 的函數起見，開始假設變位 D_1 係單獨發生（圖 11－33 c ）。在這些條件下，各桿件的伸長量將如下列

$$\Delta_{ae}=D_1 \qquad \Delta_{be}=\frac{\sqrt{3}\,D_1}{2} \qquad \Delta_{ce}=\frac{D_1}{2} \qquad \Delta_{de}=0$$

從該圖的幾何形，很容易予以證明。當變位 D_2 單獨發生時，各桿件的伸長分別爲：

$$\Delta_{ae}=0 \qquad \Delta_{be}=\frac{D_2}{2} \qquad \Delta_{ce}=\frac{\sqrt{3}\,D_2}{2} \qquad \Delta_{de}=D_2$$

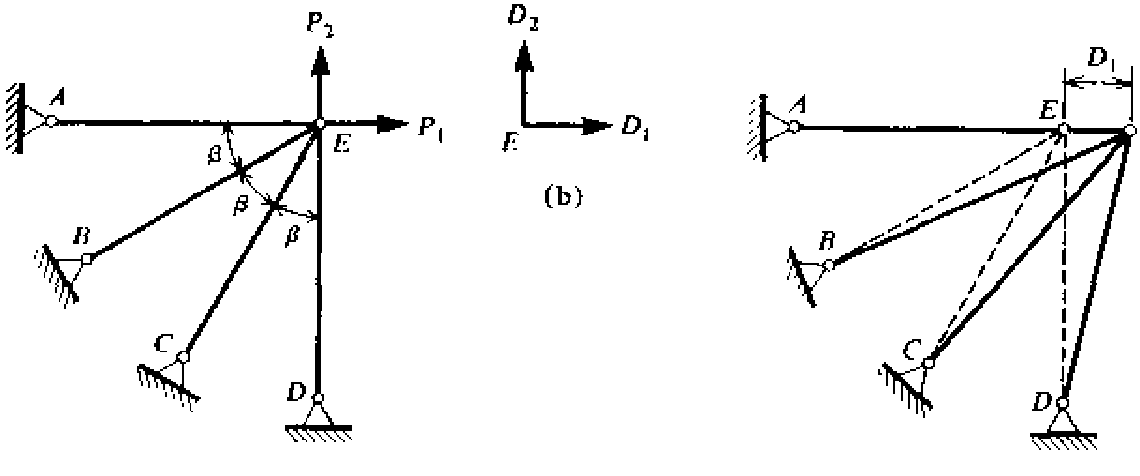


圖 11 • 33　例題 2　平面桁構

因此，當 D_1 及 D_2 二者同時發生，則各桿件的伸長將分別成立下列各式：

$$\Delta_{ae} = D_1 \qquad \Delta_{be} = \frac{\sqrt{3}\,D_1 + D_2}{2} \qquad \Delta_{ce} = \frac{D_1 + \sqrt{3}\,D_2}{2} \qquad \Delta_{de} = D_2 \quad \text{(g)}$$

每根桿件的應變能，立刻可從其伸長算出（見方程式 11 － 34 a ），而該桁架的全部應變能 U，可將所有全部四根桿件的能，加在一起而獲得：

$$U = \frac{EA}{2L} D_1^2 + \frac{EA}{2L}\left(\frac{\sqrt{3}\,D_1 + D_2}{2}\right)^2 + \frac{EA}{2L}\left(\frac{D_1 + \sqrt{3}\,D_2}{2}\right)^2 + \frac{EA}{2L} D_2^2$$

或

$$U = \frac{EA}{2L}(2D_1^2 + \sqrt{3}\,D_1 D_2 + 2D_2^2) \tag{11-58}$$

注意。這個式子，是用應變能作為一個變位的二次函數而成立的。

應用卡氏第一定理，可得到下列的平衡方程式（見方程式 11 － 53)：

$$P_1 = \frac{2EA}{L} D_1 + \frac{\sqrt{3}\,EA}{2L} D_2 \tag{h}$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{3}\,EA}{2L} D_1 + \frac{2EA}{L} D_2 \tag{i}$$

由這兩個方程式可很容易解出接頭變位；其結果為：

$$D_1 = \frac{2L}{13EA}(4P_1 - \sqrt{3}\,P_2) \qquad D_2 = \frac{2L}{13EA}(-\sqrt{3}\,P_1 + 4P_2)$$

最後，在該桁架各桿件內的軸向力，均可計算得出。其程序是，首先將接頭的各變位 D_1 及 D_2 代入方程式(g)內以求各桿件的伸長並應用方程式 $N = EA\,\Delta/L$，從伸長量求出各桿件內的力，其結果如下：

$$N_{ae} = \frac{8P_1}{13} - \frac{2\sqrt{3}\,P_2}{13} \qquad N_{be} = \frac{3\sqrt{3}\,P_1}{13} + \frac{P_2}{13}$$

$$N_{ce} = \frac{P_1}{13} + \frac{3\sqrt{3}\,P_2}{13} \qquad N_{de} = -\frac{2\sqrt{3}\,P_1}{13} + \frac{8P_2}{13}$$

於是該桁架應用應變能方法完整的分析完成。

【例題】3 另外一個，將應變能法應用於一個直線型結構的實例。讓我們考慮圖 11 － 34 a 所示的平面構架 ABC。構材 AB 及 BC 每個均具長度 L 及撓曲剛度 EI 而在該結構上的載重，係由作用於接頭 B 上的力偶 M_0 所構成。本分析的目的，為計算接頭變位 D_1 及 D_2，二者分別為接頭 B 及

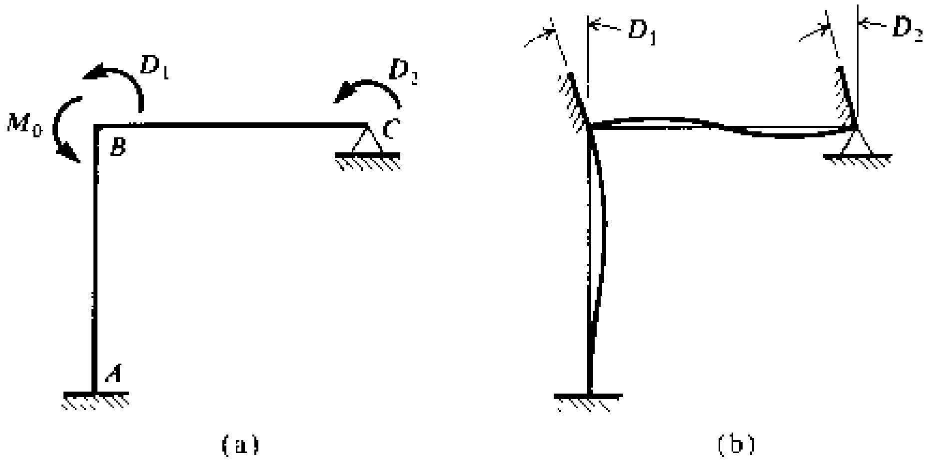


圖 11-34　例題 3　平面構架

C 上的旋轉角。

在分析工作中的一個重要步驟，以未知的變位 D_1 及 D_2 爲項，求出該結構的應變能，一如在以前兩個例題內爲各桁架所作的說明。爲完成這一個步驟，將未知的接頭變位，想像成由於加上相當於這些變位的鉗制力，而硬行派給該結構這些變位，有時頗有助益。於是該構架的每一構材，均將處於兩端有旋轉的固定端樑的狀況。因此，若能爲儲存於如此一根樑中的應變能獲得一個方程式，於是即可應用這個公式以獲得該平面構架的應變能。在圖 11 － 35 內所示，固定端樑的例題中，可利用圖 11 － 24 a 所示，屬於構材勁性的各個公式，並因此可以末端旋轉角 θ_1 及 θ_2 爲項，立刻寫出樑的兩端力矩 M_1 及 M_2 的式子爲：

$$M_1 = \frac{4EI}{L}\theta_1 + \frac{2EI}{L}\theta_2 \qquad M_2 = \frac{2EI}{L}\theta_1 + \frac{4EI}{L}\theta_2 \tag{11-59a,b}$$

儲存於這根樑內的應變能（見方程式 11 － 40 ）爲：

$$U = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 + \tfrac{1}{2}M_2\theta_2$$

或將以上關於 M_1 及 M_2 的式子代入後，得:

$$U = \frac{2EI}{L}(\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2) \tag{11-60}$$

這個方程式，將提供儲存於兩端具有已知旋轉角的樑（圖 11 － 35 ）內之應變能。設若該樑的行態爲直線型者。

現在我們已準備好，仍回到圖 11 － 34 內的平面構架，並將變位 D_1 及 D_2 爲項以決定其應變能。其程序是將每一根構材上應用方程式（ 11 － 60）寫出，並將其結果加在一起以求其和。關於構材 AB ，已有了 $\theta_1 =$

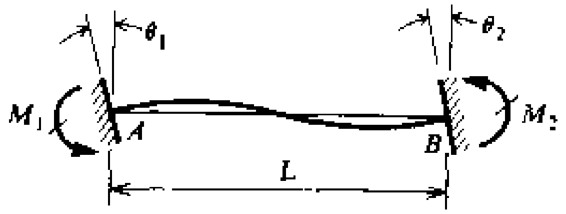


圖 11-35 兩端具有旋轉角 θ_1 及 θ_2 樑之應變能

0 及 $\theta_2 = D_1$，關於構材 BC，亦有了 $\theta_1 = D_1$ 及 $\theta_2 = D_2$，於是應變能式成爲：

$$U = \frac{2EI}{L}(D_1^2) + \frac{2EI}{L}(D_1^2 + D_1D_2 + D_2^2) = \frac{2EI}{L}(2D_1^2 + D_1D_2 + D_2^2)$$

從卡氏第一定理，可得下列兩個方程式：

$$M_0 = \frac{\partial U}{\partial D_1} = \frac{2EI}{L}(4D_1 + D_2)$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial D_2} = \frac{2EI}{L}(D_1 + 2D_2)$$

這兩個勁性法的平衡方程式，可用以求解接頭變位 D_1 及 D_2

$$D_1 = \frac{M_0 L}{7EI} \qquad D_2 = -\frac{M_0 L}{14EI}$$

亦即已爲其求得接頭的旋轉。其最後一個步驟，將每根構材兩端的力矩，用方程式(11 − 59)決定之。

這個例題，很合於應變能及卡氏第一定理的應用。因載重 M_0 相當於未知接頭變位中的一個。在該結構上，另有唯一可能的載重，將是一個相當於 D_2 的力偶。因此，作爲這種分析方法的一個必要條件，即爲每個載重必須相當於一個未知接頭變位。這個事實將產生，當在其他位置上另有若干載重時，將如何分析這個結構的問題。例如有一個集中載重作用在構材的中點。有一種可能，即將每一個載重點當作該結構的一個接頭，於是將引入若干相當於各載重另外增加的未知接頭變位。這一種辦法，其缺點爲要解的平衡方程式數目將增加得很多。另一種爲大多數結構分析者所歡喜使用的方法，是用一組作用在各個接頭上的靜力等效載重(statically equivalent loads)，以代替任何一個在接頭間起作用的載重。自然，一個等效載重系統的利用，只能在重疊原理下，是屬正確無誤時，始有此可能。決定該相等載重的技巧並不困難，但我們並不擬在此加以說明，爲欲獲得更進一步的細節，應讀參考書 *

*例如參考書 11 − 14。

11.10 位能法

位能（ potential energy ）概念，在結構力學中是非常重要。在下面的討論中，將敘述位能如何被應用在結構分析中，及其如何與應變能及變位法發生關係。此外，在下一節內將指出，當一個準確的分析不可能時，位能可用作結構的近似分析。

任何一個機械的或結構的系統，處於某種實際情況中的位能，被解釋爲，該系統從其實際的形狀，移至某一備供參考的形狀時，所有作用於其上的力系完成的功，即爲該系統的位能。爲了我們的目的，將永遠用未載重的結構形狀，當作參考的形狀。自然，實際的形狀，即爲受載重的結構。於是位能即爲，當結構從其載重形狀移至卸去載重後的位置時，由其作用的一切力所完成的功。

在該結構上作用的力，係由外在的載重及內在的力兩者所組成，結構爲樑、桁架或構架諸情形，在後面所提及的力即爲應力合力。內在各力的位能，很顯然即爲儲存在載重結構內的應變能 U ，因爲假設該結構從實際的形狀變位，迄卸除載重後的形狀，恢復原狀的功其量即等於應變能。在另一方面，外在各力的位能爲負值，因爲在結構上的載重，若從其最後位置被支持而回到原來位置，則在該結構上的每一載重，均將完成負功。於是載重的位能爲：

$$-\sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i$$

式中 P_i 代表一個在該結構上的載重， δ_i 爲與其相當的變位，而 n 爲載重的數目。有需特別加以注意的，即一個載重 P_i 的位能與該結構在載重期間所完成的功，並不相等。在載重過程內，力 P_i 的數量逐漸從零增加達最後值，而由這個載重所完成的功，係由方程式（ 11 － 31 ）得出。在另一方面，位能是，該力（以其最後值作用）自其最後位置移回至參考狀況時所完成的功。

在上面的討論，說明一個結構系統的總位能，係將該結構的變位能與各載重的位能合併一起而獲得的，於是成立

$$PE = U - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i \tag{11-61}$$

這個總位能式子，可應用於任何彈性結構上，不論該結構的行態爲直線型或非直線型。

爲了用位能法分析一座結構，必須自鑑別未知的接頭變位 D_1 D_2 ……D_n 等開始。其次，必須將應變能 U 用這些變位的一個函數來表示。在 11.9 節內爲應變能所敍述者。同樣，並假設所有一切在該結構上的載重，用 P_1、P_2、……P_n 代表者，均與這些未知的接頭變位相符合。在這些條件下，以上的總位能式卽變成：

$$PE = U - \sum_{i=1}^{n} P_i D_i \tag{11-62}$$

現在假設，對任何一個未知變位 D，取其位能的偏導數；於是得到下列的方程式：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i} = \frac{\partial U}{\partial D_i} - P_i \tag{a}$$

從卡氏第一定理，得知 $P_i = \partial U / \partial D_i$，因此可斷定

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i} = 0$$

這個方程式，可應用於未知的接頭變位 D_1、D_2、……D_n 中的每一個。因此而獲得 n 個聯立方程式：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1} = 0 \qquad \frac{\partial PE}{\partial D_2} = 0 \quad \cdots \quad \frac{\partial PE}{\partial D_n} = 0 \tag{11-63}$$

將這些方程式與方程式(a)及方程式（11－52）相比，可以看出，這些方程式就是變位法的平衡方程式。於是，位能的利用，將導出那些由應變能法所獲得的相同方程式。但從概念的觀點看來，方程式（11－63）具有特殊的意義。因爲這些方程式表示，當該結構的位能具有一個固定值時，此值可能爲最大、最小或中間值，則該結構的平衡條件已能滿足。因此方程式（11－63）可被當作是固定位能原理（principle of stationary potential energy）的一種數學說明。這個原理是說，假設一座彈性結構（直線型的或非直線型的）的位能，是以未知接頭變位的一個函數來表示。於是在這些變位值，能具有使總位能將取得一個固定值時，則該結構將呈平衡。通常該結構爲穩定的平衡，因此總位能爲一個最小值。在這些條件下，方程式（11－63）卽代表最小位能原理（principle of mi

nimum potential energy)。如為不穩定的結構，則位能或具有一個最大值，也可能具有一個中間值。若該結構的行態為直線型，則方程式（11－63）將成勁性法的平衡方程式，這個方法也可能被當作變位法的一個特殊情形 *。

為舉例說明一個非直線型，運動力學不定結構分析中的位能方法起見，讓我們就11.9節內的例題1，及繪於圖11－32的桁架。這座結構的應變能U，即用未知的接頭變位D_1及D_2來表示，可用方程式（11－56）得出。載重P對該結構卸去載重後形狀的位能為$-PD_2$。於是，總能為

$$PE=\frac{AB}{3\sqrt{L}}\left[2D_1^{3/2}+(D_2-D_1)^{3/2}\right]-PD_2$$

現在應用固定位能原理（方程式11－63）得

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1}=\frac{AB}{2\sqrt{L}}\left[2D_1^{1/2}-(D_2-D_1)^{1/2}\right]=0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial D_2}=\frac{AB}{2\sqrt{L}}(D_2-D_1)^{1/2}-P=0$$

從這兩個方程式，立刻可以獲得11.9節內例題1的結果。因此分析工作的剩餘部份，可按照該例題內敘述過的步驟繼續進行。如此，很顯然的看出固定位能原理，將直接導出平衡方程式，及用變位法的結構分析。

另外一個例題，可應用固定位能法，解出上節內的例題2。這個例題是一個四根桿件的桁架如圖11－33所示。這個桁架的行態為直線型；而其應變能可由方程式（11－58）得到。因為該載重的位能為$-P_1D_1-P_2D_2$，我們知道其總位能為：

$$PE=\frac{EA}{2L}(2D_1^2+\sqrt{3}\,D_1D_2+2D_2^2)-P_1D_1-P_2D_2$$

從固定位能原理，現在可得：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1}=\frac{EA}{2L}(4D_1+\sqrt{3}\,D_2)-P_1=0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial D_2}=\frac{EA}{2L}(\sqrt{3}\,D_1+4D_2)-P_2=0$$

---

*固定位能原理為應用力學的基本原理，在結構分析以外另有許多用途。有時被稱為克幾荷夫氏原理（Kirchhoff's principle），因首先由G.R. Kirchhoff 氏使用之故。（見參考書11－31與6－38）。

這兩個方程式爲勁性法的平衡方程式，與以前在11.9 節例題2內所獲得的(h)及(i)兩個方程式相同。於是這個桁架的分析工作 即可用已敍述過的步驟完成。

這兩個例證，說明位能法如何可以應用來分析一座直線型結構，或一座非直線型結構。應變能必須以未知的接頭變位爲項來表示；然後與各載重的位能合併一起而得總位能。固定位能原理的應用，導出多少個未知的接頭變位，便有多少個聯立方程式。這些方程式即爲變位法（若該結構的行態爲直線型，即成爲勁性法）的平衡方程式，並可用以求解未知的各變位。

在本節內，利用桁架結構作爲例題，頗爲方便。其理由不外桁架構材的整個長度內，具有固定不變的應力及應變，因此其計算大爲簡化，且不致使所討論的基本原理含糊不清。但應當認識清這個事實，即位能法在實際上曾被應用於各種不同的複雜結構上。此類結構的分析工作，通常頗爲複雜，因此不適宜在本教科書內提出。*

11.11 瑞萊—李滋二氏法

位能法的一種主要應用，爲結構近似分析。至於該結構分析的準確解法，有爲不可能者，或頗爲困難者。當應用這種位能法時，需將應變能 U 表示爲該結構接頭變位的一個函數，已在上一節曾加說明。如應變能式子，在桁架或簡單構架比較容易獲得，因爲未知接頭變位的數目很少。假如遇到一個結構的自由級次的數目很多，甚至可能爲無窮大，在這種情況下，可能用一個假設的撓曲變位後的形狀，作爲該結構眞實形狀的近似狀態。這個撓曲變位後的形狀，可以一個形狀函數（ shape function ） 的形式表示之。在形狀函數內，將包括一個或一個以上尙未確定的變位參數（ displacement parameter ）。然後位能可用這個假設的撓曲變位形狀爲根據而計算之。這個辦法，意指位能將被表示爲未知變位參數的一個函數。從固定位能原理，我們知道這些變位，必須具有如此的數量以便爲位能得到一個固定値。於是可對每一個變位參數取其位能的偏導數，並使之等於零。由這個程序，導得一組聯立方程式，其中包括若干變位參數作

---

*位能及應變能法的應用，在結構分析中頗爲普遍。若干教科書均曾討論過這幾個題目。例如：參考書11－32至11－34 對於作最初級的研究將特別有用。應變能及位能原理發展的沿革，曾徹底的由Oravas 及McLean 二氏用文件載明見參考書1－13及6－24 。

爲未知數量。有多少個未知參數，便有多少個方程式。因此解這些方程式求得各個參數。已知了變位參數，意即所假設的撓曲變位形狀已經建立。除在特殊的情形外，這個形狀將成爲眞正形狀的近似狀態。根據近似的形狀，求得各個反力及各個應力合力的近似值，至此便成爲可能的。通常這些數量，將比各變位的本身稍欠準確（比較的）。因爲這些數量是用自變位函數求微分得來的。由於變位函數並不準確，故其導數將會比較更不準確，因爲這些導數，係代表近似數量間的差數。並且因爲這些反力及應力合力，只是些近似值。故與在該結構上的實際載重，並不能處於靜力平衡狀態中。

從以上的敍述，可看出形狀函數能選擇適當，對於確保最後結果具有良好的準確性這一點頗爲重要。因此，在分析時應當選用一個函數，依判斷力認爲合理而接近眞實的撓曲變形的形狀。選用的形狀函數愈準確，則計算所得的結果將愈良好。自然，若所選擇的形狀函數適爲該正確的形狀函數，則最後結果將爲正確無誤。形狀函數應使其能滿足該結構的幾何限界條件（ geometric boundary conditions ）作爲最低的需要條件。亦即有關撓度及傾斜度的各條件，在以下各例題內將加說明。另外，在規定近似的情形，我們所用的變位參數愈多，則在多數情形下，近似的撓曲變位形狀將愈準確。自然，所用的參數愈多，所須解出的聯立方程式亦將愈多，亦爲實際的情形。

以上所述的方法，稱爲瑞萊－李滋二氏方法。因爲這個方法係由英國的瑞萊爵士（ Lord Rayleigh ）及瑞士的物理學家李滋二氏所發展成功的；瑞萊氏在 1877 年敍述此種方法在其名著“聲學理論”（The Theory of Sound）（見參考書 11 － 8）。而李滋氏（ Walther Ritz ）在 1908 年爲這個方法提供一個健全的數學根據。見（參考書 11 － 35），瑞萊－李滋二氏法，具非常功效，不僅應用於結構分析並被應用於振動理論、屈挫理論、及鈑與薄殼分析中。以上僅指少數諸例而言 *。此種方法且爲有限元體法（ finite-element method ）的基礎。在這個方法中，利用假設的變位函數，以代替微小但爲有限各元體的變位，元體則爲分析目的而將該結構分割後所得到者 **。

因爲是根據固定位能原理，故瑞萊－李滋法，可應用於直線型及非直線型結構。另外，在應用這個方法時，不需要在靜定及靜不定結構間分有差別。兩種型式的結構，可用同樣的程序加以分析。

【例題】1. 作爲瑞萊 - 李滋二氏法的第一個例證，分析單孔負荷一個集中載重P的簡支樑（見圖 11 － 36 ）。該樑爲直線型的彈性樑，且具撓曲剛度EI 。爲了用最簡單可能的樣式選取這個例題，以表示瑞萊 - 李滋二氏法的重要特色。

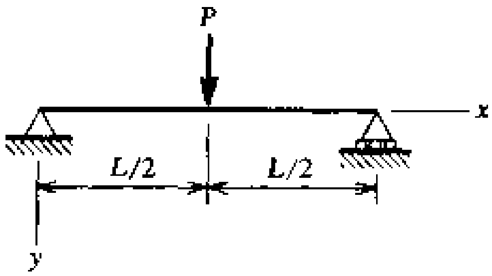


圖 11 . 36 例題 1 及 2 簡式樑用瑞 - 李法求撓度

對於形狀函數有許多可能選擇，用以大致代表這個樑的撓度曲線。已往經驗，顯示三角函數及多項式函數，通常最爲便別。因此選用一個具有單項正弦形式的形狀函數：

$$v = \delta \sin\frac{\pi x}{L} \qquad (0 \leq x \leq L) \tag{a}$$

式中v，爲樑的撓度，而δ爲變位參數。在這個情形內，等於該樑中點的撓度。在方程式(a)內所提出的正弦這一項，特別適用於簡支樑。因爲該項不僅能滿足幾何的限界條件（在$x = 0$及$x = L$時，$v = 0$），又能滿足曲度方面的限界條件（在$x = 0$及$x = L$時，$v'' = 0$）。

一根行態爲直線型的樑內，其應變能可從下列式子內獲得（見方程式 6 － 34 b）：

$$U = \frac{EI}{2}\int (v'')^2\,dx \tag{11-64}$$

若撓度v的正確式爲已知，即可將其代入以獲得正確的應變能。但在瑞萊 - 李滋法中，必須將假設的撓曲變位形狀函數代入，並爲應變能獲得一個近似値。於是將從方程式(a)得來的v値代入方程式（ 11 － 64 ）內得到：

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^L \frac{\pi^4\delta^2}{L^4}\sin^2\frac{\pi x}{L}\,dx$$

此式在求出其積分後，成爲：

$$U = \frac{\pi^4 EI\delta^2}{4L^3}$$

*關於瑞萊 - 李滋方法更多的資料，見參考書 11 － 33及11－34 。
**見參考書 11 － 37

如所預期，一個行態爲直線型的結構所能獲得者，其應變能爲該變位參數的一個二次函數。

載重 P 的位能爲 $-P\delta$ ，此負荷載重 P 樑之總位能爲：

$$PE = U - P\delta = \frac{\pi^4 EI\delta^2}{4L^3} - P\delta$$

這個式子以變位參數 δ 爲項，提供位能之值。而在分析的階段，變位參數 δ 則仍爲一個未知數。但從固定位能原理，知道該結構的變位必須具有此值，以便給予位能一個固定值。當我們爲該樑假設一個撓曲變位形狀時（方程式 a ），僅供給一個變位參數，並因這參數所具之值，必須爲一個能使位能爲固定者。因此，應用固定位能原理，得下列方程式：

$$\frac{dPE}{d\delta} = \frac{\pi^4 EI\delta}{2L^3} - P = 0$$

從上式，可解得變位參數爲：

$$\delta = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} = 0.02053\,\frac{PL^3}{EI} \tag{b}$$

這個結果，爲該樑中點正確撓度的近似值，且與正確式子相較頗爲接近：

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} = 0.02083\,\frac{PL^3}{EI} \tag{c}$$

近似結果及正確結果間的差別，小於百分之二。

撓度的近似解小於其正確解，係由下述的理由：假設只具有一個未確定的參數的形狀函數，將使一根原具無窮數目自由級次數樑，將降低爲一個只具一級次自由系統的效應。因此，實際的樑，將比虛構的樑更爲柔韌。虛構的樑，卽爲所假設撓曲變位的形狀。或從另外一個不同觀點來看，我們可以說，爲了該樑具有所假設的撓曲變位形狀，必須強行加上一個外在的鉗制力，強迫該樑成爲那種形狀。如此，在該樑上另加的鉗制力，只能使該樑變成一根更剛勁的樑。因此無論從那一個觀點看來，可斷定該具有假設形狀的樑，將比實際的樑更爲剛勁。因此其撓度通常將小於眞正的撓度。

現在繼續用圖 11 － 36內所示的簡支樑的近似分析，在下一步將獲取在樑內的彎力矩 M 。根據假設的撓曲變位形狀；這個力矩爲：

$$M = -EIv'' = -EI\left(-\frac{\pi^2\delta}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}\right)$$

將從方程式(b)得來的 δ 值代入，得到：

$$M = \frac{2PL}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

爲核對這個結果的正確度，讓我們比較在 $x=L/4$ 及 $x=L/2$ 兩點上的近似彎力矩及正確的彎力矩。在 $x=L/4$ 時，近似的力矩 M 爲 $0.143PL$ 而正確的力矩 M 爲 $0.125PL$。在 $x=L/2$ 時，近似的力矩 M 爲 $0.203PL$ 而正確的力矩 M 爲 $0.250PL$。於是在近似結果內的誤差，分別爲14%及19%。這些結果表示如與在樑中點的撓度作一比較，則在正確度方面有相當損失，因中點撓度只有2%的誤差。應注意近似的彎力矩，在前一種情形內失於太高，而在後一種情形又失之太低。就一般情形而論，究竟用瑞萊-李滋法所獲得的應力合力，將高於或低於正確的結果，實無法斷定。

【例題】2　爲了對於上例中的簡支樑作一個更爲準確的分析起見，假設一個比較更爲正確的形狀函數，或另外在該形狀函數內採用多於一項的式子。讓我們採用，由兩個正弦項所組成的形狀函數，表示樑的撓度，有如下式，作爲本例的說明。

$$v=\delta_1\sin\frac{\pi x}{L}+\delta_3\sin\frac{3\pi x}{L}\qquad(0\le x\le L)\tag{d}$$

式中的 δ_1 及 δ_3 爲未知的變位參數。我們寧可選用 $\delta_3\sin 3\pi x/L$ 這一項當作第二項，而不選用 $\delta_2\ \sin 2\pi x/L$，是因爲後一個函數所提供的撓度，對於樑的中點是不對稱的。而我們在事先已明瞭，將從固定位能原理獲得的 δ_2 爲零。在方程式(d)內所提供的兩個正弦項合併一起時，比在二者之中任何單獨一項的本身，對於正確的撓度曲線，將爲一個更好的近似值。

在兩個變位參數 δ_1 及 δ_3 中，沒有一個是代表樑中點的撓度。代替的情形，爲這兩個參數分別代表各自一項的振幅。自然在樑中點的撓度將直接與 δ_1 及 δ_3 有關聯。如將 $x=L/2$ 代入方程式(d)，即可看出。於是我

$$\delta=\delta_1\sin\frac{\pi}{2}+\delta_3\sin\frac{3\pi}{2}=\delta_1-\delta_3\tag{e}$$

由固定餘能原理，使我們能決定 δ_1 及 δ_3 值。然後從方程式(e)即可決定樑中點的近似撓度 δ。此外從方程式(d)，也可大致明瞭整個撓曲變位的形狀。

現在繼續進行分析工作的剩餘部份，讓我們將假設的撓曲變位形狀（方程式 d ）代入應變能方程式（方程式 11－64 ），而得：
們可得：

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^L\left(\frac{\pi^2\delta_1}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{9\pi^2\delta_3}{L^2}\sin\frac{3\pi x}{L}\right)^2dx$$

或

$$U=\frac{\pi^4EI}{2L^4}\left[\delta_1^2\int_0^L\sin^2\frac{\pi x}{L}\,dx+18\delta_1\delta_3\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}\,dx+81\delta_3^2\int_0^L\sin^2\frac{3\pi x}{L}\,dx\right]\tag{f}$$

要證明下列的定積分值並不困難：

$$\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{2} \tag{11-65a}$$

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0 \tag{11-65b}$$

式中的 m 及 n 爲整數。於是應變能方程式(f)簡化爲：

$$U = \frac{\pi^4 EI}{4L^3}(\delta_1^2 + 81\delta_3^2)$$

我們再度觀察到，應變能爲變位參數的二次函數。

載重 P 的位能爲 $-P\delta$，式中 δ 爲該樑中點的撓度。因 $\delta = \delta_1 - \delta_3$，如方程式(e)所示，故總位能成爲：

$$PE = \frac{\pi^4 EI}{4L^3}(\delta_1^2 + 81\delta_3^2) - P(\delta_1 - \delta_3)$$

現在可應用固定位能原理獲得兩個方程式：

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_1} = \frac{\pi^4 EI\delta_1}{2L^3} - P = 0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_3} = \frac{81\pi^4 EI\delta_3}{2L^3} + P = 0$$

解以上兩個方程式，求得變位參數 δ_1 與 δ_3：

$$\delta_1 = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \qquad \delta_3 = -\frac{2PL^3}{81\pi^4 EI}$$

最後將這些結果代入方程式(d)內，得近似撓度曲線：

$$v = \frac{2PL^3}{81\pi^4 EI}\left(81 \sin \frac{\pi x}{L} - \sin \frac{3\pi x}{L}\right) \tag{g}$$

爲了確定以上撓度式的正確性，讓我們考慮在樑中點的撓度 δ。代入 $x = L/2$ 由方程式(g)，得：

$$\delta = \frac{2PL^3}{81\pi^4 EI}(81 + 1) = \frac{164PL^3}{81\pi^4 EI} = 0.02078 \frac{PL^3}{EI}$$

這個結果，對例題1用單獨一項的解法（見方程式 b）而言；是一種進步，且與正確的撓度（方程式 c）非常接近。

在樑內彎力矩的近似值爲：

$$M = -EIv'' = \frac{2PL}{9\pi^2}\left(9 \sin \frac{\pi x}{L} - \sin \frac{3\pi x}{L}\right)$$

當 $x = L/4$ 時，從這個方程式得到的彎力矩近似值爲 $0.127PL$，與正確的力矩 $0.125PL$ 相較頗爲接近。在 $x = L/2$ 時，彎力矩的近似值爲 $0.225PL$，而正確的力矩爲 $0.250PL$。這些近似結果，比在〔例題〕1 內所提供的單獨一項解法所獲得者，已正確頗多。

若在爲撓度 v 所假設的式子中，採用另外增加的正弦項數，甚至可獲得更爲準確的結果。例如在方程式(d)內增加 $\delta_5 \sin 5\pi x/L$ 一項，即可得到一個三項式。自然每增加一項，便將另外引進一個彎曲參數，並因此多出一個必須解出的聯立方程式。在理論上，若採用一個完整項數的無窮級數，即可獲得正確的結果。*

【例題】3　試爲圖 11 − 37 內所示具有固定端的非等截面樑，決定其中點撓度的近似值。應注意的，這根樑的正確分析頗爲冗長，因該樑爲二

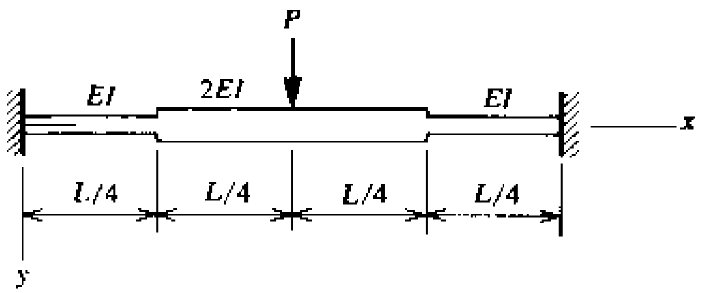


圖 11-37　例題 3　非等截面固定端樑用瑞 - 李二氏法求撓度

次靜不定，並因其具有兩種不同的慣性矩之故。

在這個例題中，假設一個多項式作爲形狀函數，代替以前兩個例題中的三角函數。我們可能考慮的最簡單多項式爲一個具有普通形式的二次函數如下：

$$v = A_1x^2 + A_2x + A_3 \tag{h}$$

式中的 A_1、A_2 及 A_3 爲常數。但我們不能利用這個式子，因爲方程式不可能滿足該樑的幾何的限界條件（在兩端的撓度及傾斜度均等於零）。若欲確定 A_1、A_2 及 A_3 各個常數值，使方程式(h)可滿足該樑的限界條件，則將得到下列的結果：從 $v = 0$ 這個條件，得到 $A_3 = 0$；(2)從 $x = 0$ 時，$v' = 0$ 這個條件，得到 $A_2 = 0$；及(3)從 $x = L$ 時，$v = 0$ 這個條件，得到 $A_1 = 0$。因此，我們可看出，將一個二次多項式當作一根固定樑的形狀函數，其結果將不能滿足。雖然二次多項式若當作一根簡支樑的形狀函數，其結果可能滿足。

另外的可能性，爲一個具有普通形式的三次式：

$$v = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 \qquad (0 \le x \le L/2) \tag{i}$$

*見參考書 11 − 33。

爲這個式子所表示的限界，係屬必要因爲一個三次式所提供的撓度曲線，對樑的中點是不對稱的。因此不能指望用這個曲線式(i)來代替整個撓度曲線。因爲這個撓度曲線，對樑的中點必成對稱。但是，用一個三次多項式以代表撓度曲線的左側一半，對於我們的目的已充分夠用。因爲我們可決定該樑那一半的應變能，然後將結果加倍。

爲了決定出現在方程式(i)內的 A_1、A_2、A_3 及 A_4 各個常數，我們可利用屬於該樑左側一半撓度及傾斜度的下列諸條件：(1)在 $x=0$ 時，$v=0$；(2)在 $x=0$ 時，$v'=0$；(3)在 $x=L/2$ 時，$v'=0$；及(4)在 $x=L/2$ 時，$v=\delta$，式中的 δ 爲在該樑中點的撓度。由這些條件內的前兩項，得 $A_3=A_4=0$，由第三個條件得 $A_2=-3A_1L/4$，而由最後一個條件則得 $A_1=-16\delta/L^3$。將所有這些結果代入方程式(i)，最後獲得所要的形狀函數：

$$v=\frac{4\delta x^2}{L^3}(3L-4x) \qquad (0\le x\le L/2) \tag{j}$$

在式中的 δ，爲一個尚未決定的變位參數。

現在可進行，從方程式（11－64），依前例可求得應變能爲：

$$U=2\left(\frac{EI}{2}\right)\int_0^{L/4}(v'')^2\,dx+2\left(\frac{2EI}{2}\right)\int_{L/4}^{L/2}(v'')^2\,dx$$

從方程式(j)所得之值，代入這個 U 方程式，然後求其積分得：

$$U=\frac{144EI\delta^2}{L^3}$$

於是其位能爲：

$$PE=U-P\delta=\frac{144EI\delta^2}{L^3}-P\delta$$

依照固定位能原理，可得：

$$\frac{dPE}{d\delta}=\frac{288EI\delta}{L^3}-P=0$$

從上式得

$$\delta=\frac{PL^3}{288EI}=0.00347\frac{PL^3}{EI}$$

這個結果，比正確結果小 3 %，正確結果爲

$$\delta=\frac{11PL^3}{3072EI}=0.00358\frac{PL^3}{EI}$$

這個正確結果，可用在第六章及第七章內敘述過的方法決定之。[illegible]的結果容易計算，且對許多目的已足夠正確。

【例題】4　在這個例題內，將證明瑞－李法如何可應用來找出一根理想立柱的臨界屈挫載重。讓我們考慮圖11－38 a所示一個具有固定底端的等截面立柱。立柱屈挫後的形狀，繪於該圖的(b)內，可很便利的用一個三角函數或用一個多項式函數代表之。利用適當的三角函數，將導致臨界載重的正確結果。因爲我們知道眞實的撓曲變位曲線爲一個三角函數〔見10.2 節方程式(d)及(f)〕。此正確解，將在習題11-11－5　內舉例說明。但在這個例題內，則應用多項式的近似形狀函數，將更爲有益。

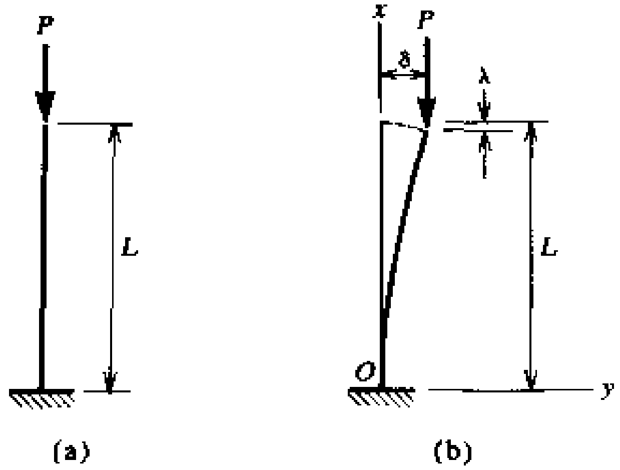


圖 11・38　例題 4　立柱用瑞－李二氏法求臨界屈挫載重

最簡單的多項式，爲一個二次函數，如由方程式(h)所提供者。若我們決定常數A_1、A_2及A_3諸值，以便滿足幾何的各個限界條件。（在$x=0$時，$v=0$；在$x=0$時，$v'=0$；及在$x=L$時，$v=\delta$），於是該二次的形狀函數將化爲：

$$v=\frac{\delta x^2}{L^2} \tag{m}$$

式中的L爲立柱的長度，δ爲其自由端的撓度。雖然這個形狀函數可滿足幾何的限界條件，但這個形狀函數，仍然是一個撓度曲線的不良代表，因爲這個函數，將在該立柱整個長度上，均爲固定不變的曲度（即v''）。但實際上，在立柱自由端的曲度爲零，而在其底部爲最大值。但我們將利用方程式(m)繼續進行下去，並從方程式（11－64）內算出其應變能，有如下式：

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^L\left(\frac{2\delta}{L^2}\right)^2dx=\frac{2EI\delta^2}{L^3}$$

載重P的位能，等於$-P\lambda$，式中的λ，爲該立柱上端的向下垂直變位，是由於在屈挫期間所發生的立柱彎曲所引起；亦即λ是發生於該立柱上端的垂直變位，在圖11－38 a所示爲未起撓曲變位的位置，圖11－38 b

所示爲撓曲變位後的位置。變位可由方程式（7－34）求得，將該方程式重寫於下：

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^L (v')^2\,dx \tag{11-66}$$

將 v' 值代入這個方程式並求其積分，可得：

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{2\delta x}{L^2}\right)^2 dx = \frac{2\delta^2}{3L}$$

於是總位能爲：

$$PE = U - P\lambda = \frac{2EI\delta^2}{L^3} - \frac{2P\delta^2}{3L}$$

至此，由固定位能原理，將得下式：

$$\frac{dPE}{d\delta} = \frac{4EI\delta}{L^3} - \frac{4P\delta}{3L} = 0$$

或

$$\delta\left(\frac{3EI}{L^2} - P\right) = 0$$

若 $\delta = 0$，這個方程式已能滿足。如此，該立柱將仍保持直立並沒有屈挫。作爲該方程式的一個不平常的解法，在括號內的各項必須等於零，如此得成立

$$P = P_{cr} = \frac{3EI}{L^2}$$

這個臨界載重的近似結果，約高出正確值22％，但正確值爲 $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$。近似的屈挫載重過高，這個事實正如所預料者。因爲我們業已表示過，該近似的撓曲變位形狀，係代表一座比實在結構更爲剛勁的結構

由於假設一個三次多項式形狀函數，可獲得比較更爲正確的結果：

$$v = \frac{\delta}{2L^3}(3Lx^2 - x^3) \tag{n}$$

這個形狀函數，不但能滿足一切幾何的限界條件，而且能滿足立柱自由端的曲度等於零的條件。繼續進行如前，可得：

$$U = \frac{3EI\delta^2}{2L^3} \qquad \lambda = \frac{3\delta^2}{5L}$$

而臨界載重的最後結果爲：

$$P_{cr} = \frac{5EI}{2L^2}$$

此值僅高於正確的臨界載重1.3％，比用二次形狀函數所獲得的結果有相當的改進。

由於採用包含兩個而非一個變位參數的形狀函數，可獲得比較更爲正確的結果。例如，我們可採用一個二次項及一個三次項之和作爲形狀函數如下式

$$v = \frac{\delta_1 x^2}{L^2} + \frac{\delta_2}{2L^3}(3Lx^2 - x^3) \tag{o}$$

式中的 δ_1 及 δ_2 爲尙未確定的參數。每一單獨的函數，均適合幾何的限界條件（與方程式m及n比較），並將依固定位能原理決定 δ_1 及 δ_2 值而加以適當的調整。因此可獲得一個合成函數，比單獨的二次或三次函數更爲正確。再運用標準程序，可得下列的結果：

$$U = \frac{EI}{2L^3}(4\delta_1^2 + 6\delta_1\delta_2 + 3\delta_2^2) \qquad \lambda = \frac{1}{60L}(40\delta_1^2 + 75\delta_1\delta_2 + 36\delta_2^2)$$

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_1} = \frac{EI}{L^3}(4\delta_1 + 3\delta_2) - \frac{P}{12L}(16\delta_1 + 15\delta_2) = 0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_2} = \frac{3EI}{L^3}(\delta_1 + \delta_2) - \frac{P}{20L}(25\delta_1 + 24\delta_2) = 0$$

將最後的兩個方程式重行排列，得：

$$\left(\frac{4EI}{L^2} - \frac{4P}{3}\right)\delta_1 + \left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{5P}{4}\right)\delta_2 = 0$$

$$\left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{5P}{4}\right)\delta_1 + \left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{6P}{5}\right)\delta_2 = 0$$

這兩個方程式爲齊次式，並且只在變位參數 δ_1 及 δ_2 的係數行列式等於零時，始具有一個不平常的解，因此

$$\left(\frac{4EI}{L^2} - \frac{4P}{3}\right)\left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{6P}{5}\right) - \left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{5P}{4}\right)^2 = 0$$

或

$$3P^2 - 104\left(\frac{EI}{L^2}\right)P + 240\left(\frac{EI}{L^2}\right)^2 = 0$$

這個二次式的低值根，對於最低臨界屈挫載重得一近似值爲：

$$P_{cr} = 2.486\,\frac{EI}{L^2}$$

此值已接近正確值（高於正確值0.8％）。

【例題】5　最後一個例題，是說明瑞－李法，如何應用於一個非直線型問題。該結構爲一個矩形截面的懸臂樑，在其自由端負荷一個集中載重 P（見圖11－31及11.8節內的例題3）。樑用材料，具有一個非直線型應力－應變曲線，而依方程式 $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$ 之規定。決定在該樑自由端的撓度 δ。

讓我們在該樑的左端末撓曲變位的位置上，取作座標的原點（圖11－31 a）。於是在下面的三次多項式，將爲該樑撓度曲線的適當代表式。

$$v = \frac{\delta}{2L^3}(x^3 - 3L^2x + 2L^3) \qquad \text{(p)}$$

式中的 v 爲該樑向下的撓度。這個三次式對於 v 及 v' 均可滿足幾何的末端條件。此外，該式將對微小撓度的曲度提出下列的式子：

$$\kappa = v'' = \frac{3\delta x}{L^3}$$

依照這個式子，在該樑的自由端曲度爲零，而在固定端的曲度爲最大值。此種情形與該樑的實際情形相符。在樑內距中性軸的距離爲 y 處的一點上，其應變 ϵ_1（見圖11－31 b）大致爲：

$$\epsilon_1 = \kappa y = \frac{3\delta xy}{L^3}$$

利用這個式子，可計算在該樑內同一位置上，每個單位體積的應變能的近似值：

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma\, d\epsilon = \int_0^{\epsilon_1} B\sqrt{\epsilon}\, d\epsilon = 2\sqrt{3}\, B\left(\frac{\delta xy}{L^3}\right)^{3/2}$$

總應變能 U，可由求整個樑的上半部份（$y = 0$ 至 $y = h/2$）每個單位體積應變能的積分，然後將其結果加倍而得：

$$U = \int u\, dV = 2\int_0^L \left[\int_0^{h/2} ub\, dy\right] dx = \frac{2\sqrt{6}\ Bbh^{5/2}\delta^{3/2}}{25L^2}$$

已知應變能，即可從 $PE = U - P\delta$ 式得到位能。可據這個式子，從固定位能原理可得：

$$\frac{dPE}{d\delta} = \frac{3\sqrt{6}\ Bbh^{5/2}\delta^{1/2}}{25L^2} - P = 0$$

由此可得：

$$\delta = \frac{625P^2L^4}{54B^2b^2h^5}$$

這個撓度的近似值大約低於正確值7％（這個非直線型彈性樑的正確撓度，可用餘能獲得，將在下一節敍述之，見11－68式）。

11.12 餘能原理

在前幾節內，我們已處理過幾個屬於應變能的重要原理。現在，將轉向另一種考慮，是與餘能有關的若干同樣重要的原理。在以前的討論中，曾經指出應變能通常係用一個變位的函數來表示，而餘能則常用以力為項來表示。因此應變能定理與變位及勁性分析方法有關，有如11.9 節內曾加解說者。至於餘能原理，則與力法及韌性法有關，此事將在本節及下一節內加以討論。

為導出一個與餘能（ complementary energy ）有關的最基本的定理起見，讓我們再考慮一個非直線型結構，承受 n 個載重 P_1、P_2、……P_n，並產生相當的變位 δ_1、δ_2、……δ_n。一如在以前所討論的，早已了解。在一般性的觀念中，P 及 δ 係代表力及其相當的變位。該結構的餘能 U^*，可用方程式（ 11 － 39b ）求得。結果為 U^* 得到的式子，將為載重 P_1、P_2、……P_n 的一個函數。於是，假如想像有一個載重 P_i，若給予一個很微小的增量 dP_i，同時其他各個載重均一律不改變，則餘能將增加一個很微小量 dU^*，即：

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i$$

這個方程式，只是以數學的形式說明在餘能 U^* 內的增加量，等於 U^* 對 P_i 的改變率，乘在 P_i 內的增加量。

另外一個為 dU^* 獲得一個式子的方法，是考慮當力 P_i 增加 dP_i 時，各載重所完成的餘功。這項餘功與在該結構的餘能內所增加的 dU^* 相同（見方程式 11 － 36 ）。惟一完成任何餘功的載重，即為該載重的本身。因為其餘各力均未改變之故。於是餘能的增加，即為變位 δ_i 及該載重增加量 dP_i 的乘積：

$$dU^* = \delta_i dP_i$$

此項餘能的增加量，係由圖 11 － 28c 所示的載重 - 撓度圖內畫水平窄條的面積來代表。將以上兩個 dU^* 式使之相等，獲得：*

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \tag{11-67}$$

這個方程式說明，倘若餘能是用各載重的一個函數來表示，餘能對任何一個載重 P_i 的偏導數，即等於與其相當的變位 δ_i。這個方程式稱為克羅

梯－安蓋瑟定理（Crotti－Engesser theorem）。簡稱為克－安定理，意大利Francesco Crotti於1878年首先導出這個方程式。（見參考書11－38與11－39）另由德國工程師Friedrich,Engesser 於1889年獨自獲得該式。（見參考書11－40）。

克－安定理與卡氏第一定理之間，顯示出異常的類似性，從比較兩個定理的方程式，即可了然（方程式11－67及11－51）。在克－安定理的情形中，將餘能表示若干載重的一個函數，然後對各個載重取偏導數，以獲得相當的變位。至於在卡氏第一定理的情形，將應變能表示若干變位的一個函數，然後對各該變位取偏導數以獲得與其相當的載重。兩個定理均頗通行，且可應用於行態為非直線型的結構上*。

【例題】1　一根受一個集中載重P作用在自由端的懸臂樑，已在11-8節的例題3內敘述，並繪入圖11－31內。此項材料的應力－應變圖為非直線型，如圖11－31c內所示的情形。求該樑末端的撓度δ。

該樑的餘能為：

$$U^{\star}=\frac{25P^{3}L^{4}}{6B^{2}b^{2}h^{5}}$$

如由方程式（11－50）所提供，已知餘能，可應用克－安定理很容易求出與載重P相當的撓度δ：

$$\delta=\frac{\partial U^{\star}}{\partial P}=\frac{25P^{2}L^{4}}{2B^{2}b^{2}h^{5}} \tag{11-68}$$

【例題】2　試決定圖11－32a內所示的桁架接頭B的垂直撓度。桁架用材料在拉力與壓力兩方面所具的應力－應變關係，均可由方程式$\sigma=B\sqrt{\epsilon}$來表示。式中的B為常數。（見圖11－32b）。

用克－安定理以求撓度的第一個步驟，為獲得該結構的餘能。總餘能U^{*}為兩根桿件餘能之和，亦即：

$$U^{\star}=U^{\star}_{ab}+U^{\star}_{bc} \tag{a}$$

同理，每根桿件的餘能也可以桿件的體積乘每個單位體積的餘能求出，只要在每根桿件全部的應力及應變均保持固定不變。因此可得下列兩式：

$$U^{\star}_{ab}=u^{\star}_{ab}AL \qquad U^{\star}_{bc}=u^{\star}_{bc}AL\sqrt{2} \tag{b}$$

---

*在一個行態為直線型的特殊情形中，餘能等於應變能，於是克－安定理即化為卡氏第二定理（見第11－14節）。

式中的A爲每根桿件的截面面積。在每根桿件每個單位體積上的餘能，可用方程式（11－37）求得如下：

$$u^{\star}_{ab}=\int_0^{\sigma_{ab}}\epsilon\,d\sigma=\int_0^{\sigma_{ab}}\frac{\sigma^2}{B^2}\,d\sigma=\frac{\sigma^3_{ab}}{3B^2} \tag{c}$$

$$u^{\star}_{bc}=\int_0^{\sigma_{bc}}\epsilon\,d\sigma=\int_0^{\sigma_{bc}}\frac{\sigma^2}{B^2}\,d\sigma=\frac{\sigma^3_{bc}}{3B^2} \tag{d}$$

式中σ_{ab}及σ_{bc}爲在桿件內的應力。現在可將方程式(b)、(c)及(d)代入方程式(a)內，獲得該桁架的總餘能公式：

$$U^{\star}=\frac{AL}{3B^2}(\sigma^3_{ab}+\sqrt{2}\,\sigma^3_{bc}) \tag{e}$$

作用於桁架上的載重P（圖11－32a）在桿件內產生的應力，可很容易從靜力學求得：

$$\sigma_{ab}=\frac{P}{A}\qquad\sigma_{bc}=\frac{\sqrt{2}\,P}{A}$$

在以上兩個式子內，只考慮應力的絕對值。於是該桁架的餘能（從方程式e）得：

$$U^{\star}=\frac{5P^3L}{3A^2B^2}$$

此一方程式，將餘能表示成載重P的一個函數，因此可應用克－安定理以獲得與載重P相當的變位如下式：

$$\delta_V=\frac{\partial U^{\star}}{\partial P}=\frac{5P^2L}{A^2B^2}$$

此方程式可得該桁架接頭B的垂直撓度δ_V。

假設要求接頭B的水平撓度δ_H，便需加上一個假想的載重Q與那個撓度相當。然後可重作一切爲求δ_V所需的各種程序，主要的差別是，現在有兩個載重在該桁架上而不是一個。水平撓度δ_H的最後結果，將爲一個包含P及Q二者的式子。使在該式內的Q等於零，將求得由於載重P單獨作用所引起的水平撓度（見習題11．12－4）。

單位載重方法

直接應用克－安定理求結構的變位，一如在上例所說明者，需先將該結

構的餘能決定爲載重的一個函數。然後將餘能的導數算出以獲得所需的變位。因爲這個程序可能很長，故此種方法並不是一種實際可用的求變位方法。另外有一種更適用方法，加以說明。

爲了用最簡單的方式導出這個方法，將討論到一個桁架結構中的僅有各應力合力，爲各軸向力 N。讓我們考慮該桁架的一個單獨構材，並假定該構材具有長度 L，截面積 A 並受到一個軸向力 N_1。於是該結構的餘能 U^* 爲

$$U^* = \int_0^{N_1} \epsilon L\, dN \tag{f}$$

如方程式（11－36）及 $\delta = \epsilon L$ 所獲得者。式中的 ϵ 爲該桿件內，由於軸向力 N 所引起的均佈應變。我們可注意到，當軸向力 N 自其最初的零值增加至最大的 N_1 值時，則應變 ϵ 將從零增至最大值 ϵ_1。與此相似，在桿件內的應力 σ，則自零增至一個最大值 σ_1。並假設應力 σ 與應變 ϵ 的關係，如圖 11－28b）所示的非直線型應力－應變圖代表之。

規定一個函數 F，用以代表該桿件每個單位長度的餘能，將甚方便。因此，用長度 L 除方程式(f)，可得：

$$F = \int_0^{N_1} \epsilon\, dN \tag{g}$$

由該方程式所表示的數量 F，爲軸向力 N_1 的一個函數，並可借助應力－應變曲線算得。（注意，應力－應變曲線將提供 ϵ 及 σ 間的關係，但因 $N = \sigma A$，我們也可以明瞭 ϵ 與 N 間的關係。因此 ϵ 爲 N 的一個已知函數。因此，在方程式(g)內的積分可以算得）。

我們現在準備考慮由許多構材構成的一個桁架結構。該結構承受若干載重 P_1、P_2、……P_n 並產生與彼等相當的變位 δ_1、δ_2、……δ_n。在該桁架的各個不同構材內的軸向力，沿着各構材的軸線繼續量得的距離 x 而變化。於是讓我們取出一個位在兩個截面間，其長度爲 dx 的典型元體（見圖 11－3a）。作用於這個元體上的軸向力爲 N_1，與其相當的伸長爲 $d\delta$（等於 $\epsilon_1\, dx$）。見方程式(g)。我們明瞭該元體的餘能，可以 $dU^* = F\,dx$ 的形式來表示。因此全部結構的餘能爲：

$$U^* = \int F\, dx \tag{h}$$

由上式，可了解，該積分將沿該結構一切構材的軸線而延伸。

為求相當於載重P_i的變位δ_i起見，可應用克－安定理，由方程式(h)獲得：

$$\delta_i=\frac{\partial U^*}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial P_i}\left[\int F\,dx\right]$$

求在積分符號下的微分得

$$\delta_i=\int\frac{\partial F}{\delta P_i}\,dx$$

現在，所考慮的導數$\partial F/\partial P_i$出現在這個方程式內。數量F為軸向力N_1的一個函數，一如在方程式(g)有關聯時所解釋過的，而軸向力N_1則為施加載重P_1、P_2、……P_n等的一個函數。因此，數量F為經由中間的變數N_1的P_i的一個函數。重寫以上的方程式得下列的形式：

$$\delta_i=\int\frac{\partial F}{\partial N_1}\frac{\partial N_1}{\partial P_i}\,dx \tag{i}$$

在這個式子裏的每一個導數，均具有一個簡單的物質的解釋。導數$\partial F/\partial N_1$是等於ϵ_1〔見方程式(g)〕* 。導數$\partial N_1/\partial P_i$是代表由載重$P_i$的一個單位值所引起的軸向力$N_1$值。像這樣，若用單位載重方法（11.3節）的符號，這個導數是等於N_U，這符號的定義，是由於相當於變位δ_i的單位載重所引起的軸向力。將在方程式(i)的兩個導數，分別用ϵ_1及N_U代替之，如是可得：

$$\delta_i=\int\epsilon_1 N_U\,dx=\int N_U\,d\delta \tag{j}$$

式中的$d\delta$等於$\epsilon_1 dx$為一個元體的伸長量（見圖11－3a）。上列的方程式是在只考慮軸向變形情形下，單位載重法的基本方程式。

若在一根樑或平面構架受到撓曲變形的情形，則可作同樣的誘導。假設長度為L的樑，在力偶M作用下受純彎曲開始。這個力偶將在樑的兩端之間引起一個相對的旋轉θ。樑的餘能，由於分別以M及θ代替P及δ，可從方程式（11－36）獲得下式：

$$U^*=\int_0^{M_1}\theta\,dM \tag{k}$$

---

*從微積分可知$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^a f(x)\,dx=f(a)$，應用此種關係，由方程式(g)得到$a=N_1$，$f(x)=\epsilon$，$dx=dN$及$f(a)=\epsilon_1$。

式中的M_1，爲力偶M的最大值。當施加的力偶M自零增至M_1時，在樑的兩端間的θ角，將從零增至最大值θ_1。同樣，樑的曲度k等於θ / L將從零變化至其最大值$k_1 = \theta_1 / L$。以kL代替方程式內的θ角，可得

$$U^* = \int_0^{M_1} \kappa L\, dM$$

現在爲一個新函數G下一定義。G爲代表該樑每個單位長度的餘能，即

$$G = \int_0^{M_1} \kappa\, dM \tag{l}$$

這個數量是彎力矩M_1的一個函數，借助應力－應變圖，對任何各種樑均可計算求得。

設一根樑或一個平面構架承受載重P_1、P_2、……P_n因而產生相當變位δ_1、δ_2、……δ_n。這個結構的一個典型元體（見圖11－3b），受到一個彎力矩M_1，並經過一種撓曲變形$d\theta$（等於$k_1 dx$）。根據方程式(l)獲得這個元體的餘能爲$dU^* = G\,dx$；於是整個結構的餘能爲：

$$U^* = \int G\, dx$$

式中的積分，包括該結構所有一切的元體。下一步從克－安定理得到該結構的變位δ_i。

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left[\int G\, dx\right] = \int \frac{\partial G}{\partial P_i}\, dx$$

在這個式子內的最後一個導數，我們注意到，數量G是彎力矩M_1的一個函數，（見方程式 l ）而M_1又是各載重的一個函數。因此在上式可重寫成下列的式子：

$$\delta_i = \int \frac{\partial G}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial P_i}\, dx \tag{m}$$

在這個方程式內，偏導數$\partial G / \partial M_1$等於曲度$k_1$（見方程式(l)及上頁的一個附註）；偏導數$\partial M_1 / \partial P_i$，則爲在樑內由於載重$P_i$的一個單位值所引起的彎力矩。於是方程式（m）化爲：

$$\delta_i = \int \kappa_1 M_U\, dx = \int M_U\, d\theta \tag{n}$$

在該式中，曾經採用過$d\theta = k_1\, dx$的關係。數量M_U是由於與變位δ_i相當的一個單位所引起載重在該結構內的彎力矩。因此，當只考慮撓曲變形

時，方程式(n)即與單位－載重法的基本方程式相同。

對於結構考慮其受剪力及扭曲變形的影響時，可作同樣的誘導。因此，我們最後斷定，採用餘能及克－安定理，將直接導得單位－載重法的基本方程式。這個方程式，供給一個對於決定變位最為有效的方法，且對於其行態為直線型的結構為一正當的方法 *。

【例題】3. 試用單位－載重法決定圖 11－31 所示的懸臂樑，在其自由端上的撓度 δ。該樑所用材料的應力－應變曲線為非直線型，如圖 11－31c 所示形狀。

因為，該樑認為僅有撓曲變形為重要，故只採用在單位－載重方程式（方程式 11－3）內的第二項。彎力矩 M_U 等於 $1 \cdot x$，式中的 x 為該樑的自由端起量得的距離。變形 $d\theta$ 等於 $k\,dx$，式中之 k 為曲度。關於討論中的樑的曲度，係由 11．8 節內的方程式(f)求得。於是，變形 $d\theta$ 為：

$$d\theta = \frac{50P^2x^2}{B^2b^2h^5}\,dx$$

代入單位－載重方程式，獲得下列撓度式：

$$\delta = \int_0^L 1(x)\left(\frac{50P^2x^2}{B^2b^2h^5}\right)dx = \frac{25P^2L^4}{2B^2b^2h^5}$$

結果與例題 1（見方程式 11－68）內所求得的撓度相符。但單位－載重法比以前的例題提供一個比較容易的解法，因其不必經由計算求出餘能的冗長程序。（見方程式 11－50 之誘導）。

【例題】4. 在這個例題內，將採用單位－載重法，以決定圖 11－3 內所示的桁架，在其接頭 B 處的垂直撓度。該項材料的非直線型應力－應變曲線，如圖 11－32b 所示。

撓度，可從方程式（11－3），只考慮其第一項即可求得。相當於該撓度的單位載重，是在接頭 B 處的一個垂直載重。在該桁架兩個構材內與其相當的軸向力 N_U 為下列二式：

$$(N_U)_{ab} = 1 \qquad (N_U)_{bc} = -\sqrt{2}$$

在兩根構材內，因載重 P 而產生的應變，具有下列諸值：

$$\epsilon_{ab} = \frac{\sigma_{ab}^2}{B^2} \qquad \epsilon_{bc} = -\frac{\sigma_{bc}^2}{B^2}$$

---

*直線型結構之情形，將在 11．14 節內討論。

在以上兩式中的應力，分別爲 $\sigma_{ab}=P/A$ 及 $\sigma_{bc}=-\sqrt{2}\,P/A$。將這兩個應力值代入應變式內，可得

$$\epsilon_{ab}=\frac{P^2}{A^2B^2}\qquad \epsilon_{bc}\quad -\frac{2P^2}{A^2B^2}$$

最後，可將 N_U 及 $d\delta$（等於 ϵdx）值代入單位－載重方程式內，可獲得撓度 δ 式：

$$\delta\cdot\int N_U\,d\delta=\int_0^L(1)\left(\frac{P^2}{A^2B^2}\right)dx+\int_0^{\sqrt{2}L}(\cdot\sqrt{2})\left(-\frac{2P^2}{A^2B^2}\right)dx=\frac{5P^2L}{A^2B^2}$$

這個撓度，與以前在例題 2 內所獲得的相同。但是，我們可再度觀察到，用單位－載重法時，其解法簡單。若所擬計算的撓度與該結構上的實際載重中的一個不相符時，則單位載重法的優點將更爲顯著。

11·13 力　　法

利用餘能及克－安定理，可導得一種分析結構的重要方法。這個方法係根據靜力學的靜不定性概念，及利用靜贅力作爲分析中的未知數量。力的數量（應力合力及反力）是未知數量。這個事實，與餘能必須表示若干力系的一個函數，使與應用克－安定理所需要條件正相符合。

讓我們考慮一個非直線型具 n 次靜不定性結構。在選用贅力數量 X_1、X_2、……X_n 後，在該結構上作成若干適宜的放鬆手段，來放鬆這些贅力。例如，若贅力是一個反力，則可移去一個支承，若贅力爲一個彎力矩，則可插入一個梢釘。結果，被放鬆的結構，必須爲靜定且爲不能移動者，如以前在韌性法討論中所解釋者（11.6 節）。下一步，將已放鬆的結構，想像爲不僅承受實際的載重，並且是承受那些贅力本身的結構。換一句說，贅力的作用必須當作在放鬆結構上起作用的載重來處理。然後這座放鬆結構的餘能 U^*，始可用通常的樣式算得。惟一的新特色是，在這個事實上，放鬆結構的餘能，是載重及贅力二者之一的函數。依照克－安定理，我們可就這些贅力取餘能的偏導數，而獲得該放鬆結構的相當於這些贅力的各變位。設以 D_1、D_2、……D_n 各個符號，代表在原結構上分別符合其贅力 X_1、X_2、……X_n 的各變位 *。於是克－安定理（方程式 11－

67 ）將產生 n 個聯立方程式如下：

$$D_1=\frac{\partial U^*}{\partial X_1}\qquad D_2=\frac{\partial U^*}{\partial X_2}\quad\cdots\quad D_n=\frac{\partial U^*}{\partial X_n}\tag{11-69}$$

這些方程式中的每一個，均具有相同的一般性形式。若檢討第 i 個方程式，將發現該方程式的右側，係由若干包含靜力的贅力及載重二者的若干項，具以贅力為未知數量。這些項一直加到原結構的眞正變位 D_i， 無論何時，在相當的贅力 X_i 為一個應力合力或為一個支承反力並未經過任何變位者，則 D_i 將為零。因此可以看出，方程式（ 11 － 69 ）實際是代表相當於贅力各變位的形變適合條件的。這些方程式可同時解出，以載重為項的各贅力，並在以後，可用靜力學來決定其餘的各個反力及各個應力合力。

在上段內所敍述的餘能分析法，係利用靜力的贅力為未知數量，並需解出形變適合性方程式。因此餘能分析法卽為力的分析法，此法曾為直線型結構作韌性法敍述過（見第 11.6 節）。但力的方法簡稱力法（ force method ）及韌性法，在原則上是相同的方法，但韌性法只限於直線型分析用。因此無論何時，當非直線型結構有被考慮可能時，就宜使用“力法”一詞，並在僅需考慮直線型結構時，才使用“韌性法”一詞。**

方程式（ 11 － 69 ）所代表的方法，與方程式（ 11－ 52 ）所代表之變位法是相類似的。在力法中，將餘能表示為靜力的贅力的一個函數，然後用克-安定理獲得形變適合方程式，這些方程式可解出贅力。在變位法中，將應變能表示為未知接頭變位的一個函數，然後用卡氏第一定理獲得平衡方程式，這些方程式可解出變位。兩種方法一律可應用於結構的行態為非直線型者。

現在讓我們考慮力法的個別情形，在此種情形下，原結構並沒有相當於靜力的贅力之變位有如前述。若贅力或是應力合力，或是不移動位置的反力，則此種情勢便將存在。在這種條件下，形變適合方程式內的變位 D_1、D_2、…… D_n 等將化為零。

於是這些方程式將簡化成下列各式：

---

*相同的符號曾在討論韌性法時應用過。（見方程式 11 － 25 ）

**韌性法的更進一步討論見 11.15 節。

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1}=0 \qquad \frac{\partial U^*}{\partial X_2}=0 \quad \cdots \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_n}=0 \tag{11-70}$$

這些方程式代表餘能的一個固定值的條件。如爲一個處於穩定平衡的結構，則該固定值，實際是一個最低值。因此方程式（11－70）即代表最低餘能原理（principle of minimum complementary energy）。這個原理說明一個穩定結構的靜力的贅力 X_1，X_2 …… X_n，將具有使餘能成爲一個最低值，假設在原結構上，並沒有相當於各贅力的變位。**

【例題】 圖 11－39 a 所示的桁架，係用一種材料所構成，其所具的應力－應變關係，將由方程式 $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$ 提供。式中的 B 爲一常數。試用餘能及力法求出三根桿件內的軸向力。

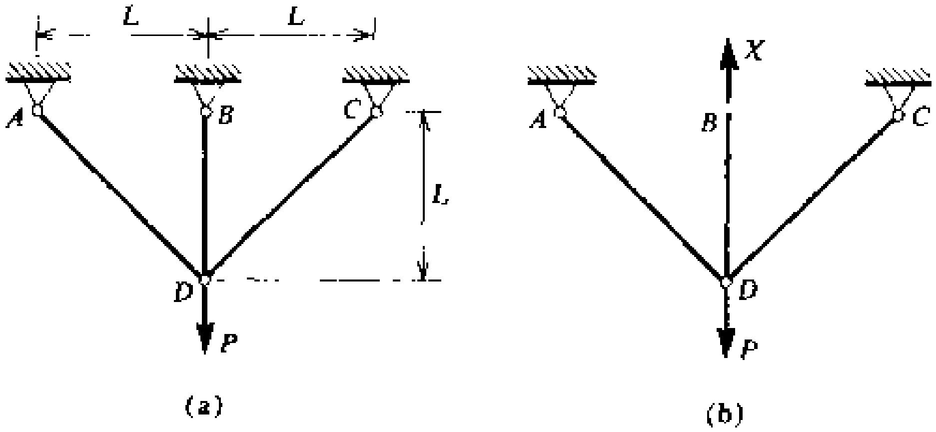


圖 11-39 例題 方法

假設在接頭 B 處的反力爲靜力的贅力 X，我們獲得的放鬆結構，將如圖 11－39 b 所示的情形。在放鬆結構內各桿件的軸向力，由靜力學得：

$$N_{ad} = N_{cd} = \frac{P - X}{\sqrt{2}} \qquad N_{bd} = X \tag{a}$$

**最小餘能原理，首由克羅梯氏（Crotti）創立（見參考書 11－38 與 11－39），繼由安蓋瑟（Engesser）氏作有系統的敘述（見參考書 11－40）。若該結構的行態爲直線型時，即餘能與應變能相等，於是最小餘能原理即爲最小應變能原理。（見第 11.15 節）。

餘能法在結構力學中提供重要進步的基礎，讀者對於這兩種方法具有格外興趣者，可參考其他書籍。諸如參考書 11－32，11－33，11－34，11－41，及 11－42 等。關於應變能原理的現代論述，用矩陣形式寫出者，計有參考書 11－43 與 11－44。在參考書 11－45 至 11－49 中更有其他方面應用的敘述。補能法的歷史由 Oravas 及 McLean 寫出（見參考書 1－13），Westergaard 亦曾提供若干歷史進展（見參考書 11－41，11－50 與 11－51 等。

相當的應力爲

$$\sigma_{ad} = \sigma_{cd} = \frac{P - X}{\sqrt{2}A} \qquad \sigma_{bd} = \frac{X}{A}$$

式中之 A，爲每根桿件的截面積。

在 BD 桿件內每個單位體積的餘能，其式爲（見方程式 11 － 37）：

$$u_{bd}^* = \int_0^{\sigma_{bd}} \epsilon \, d\sigma = \int_0^{\sigma_{bd}} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma_{bd}^3}{3B^2} = \frac{1}{3B^2}\left(\frac{X}{A}\right)^3$$

在 AB 及 CD 兩桿件內，每個單位體積的餘能，可同樣獲得；其結果爲：

$$u_{ad}^* = u_{cd}^* = \frac{1}{3B^2}\left(\frac{P - X}{\sqrt{2}A}\right)^3$$

最後，用桿件的體積乘每根桿件單位體積的餘能，再將其結果加在一起，以獲得放鬆結構的總餘能：

$$U^* = \frac{L}{3A^2B^2}[(P - X)^3 + X^3]$$

這個 U^* 式爲載重 P 及贅力 X 的一個非直線型函數。

在原結構內相當於贅餘力 X 的變位爲零，因爲沒有支承 B 的變位。於是將克－安定理應用於贅力 X 時，可得下列方程式（見方程式 11 － 70）:

$$\frac{dU^*}{dX} = \frac{L}{3A^2B^2}[3(P - X)^2(-1) + 3X^2] = 0$$

從上式可得 $X = P/2$，將這個 X 值代入方程式(a)內，將產生：

$$N_{ad} = N_{cd} = \frac{P}{2\sqrt{2}} \qquad N_{bd} = \frac{P}{2}$$

如是，此靜不定非直線型桁架的各桿件內的軸向力，已用力法求得。

11·14 卡氏第二定理

在以上兩節，已討論如何利用餘能以求變位，並作結構分析。在這兩節中，我們着重這些概念，應用於其行態爲非直線型的結構上。在這一節將我們的注意力局限於那些結構的行態爲直線型，且可應用重疊原理者。在這些條件下，該結構的餘能 U^* 及應變能 U 爲相等的（見方程式 11 －

40）。此外；兩種數量均一律可用載重的二次函數表示（見方程式11－44）。

現在假設有一個直線型結構，承受載重P_1、P_2、……P_n，這些載重將產生相當的變位δ_1、δ_2、……δ_n等於是在克－安定理（方程式11－67）中，可以U代替U^*並得：

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \tag{11-71}$$

這個方程式，稱爲卡氏第二定理（Castigliano s second theorem）*，並可作如下的陳述：如爲一個非線型的結構，倘若應變能係表示各載重的一個函數，則應變能對於任何一個載重的偏導數，均等於其相當的變位δ_i。

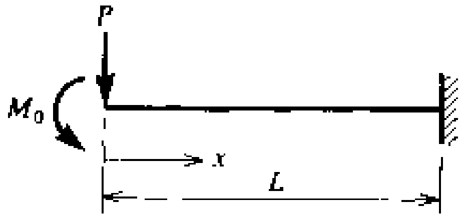


圖11．40　卡氏第二定理之示例

卡氏第二定理的應用，讓我們取一根懸臂樑承受一個載重P及一個力偶M同時作用在其自由端上（圖11－40）。該樑的行態爲直線型，且具有一個固定不變的撓曲剛度EI。該樑的應變能，可從方程式（6－34a）求得。現將該式重行寫出

$$U = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} \tag{11-72}$$

在該方程式內，M代表任何一個截面上的彎力矩。關於圖11－40所示之樑。距離自由端x處的彎力矩爲$M = -Px - M_0$。將這個代表M的式子代入方程式（11－72）內，可得到

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-Px - M_0)^2\,dx = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{PM_0L^2}{2EI} + \frac{M_0^2L}{2EI} \tag{a}$$

這個方程式表示應變能爲載重P及M_0的二次函數。

爲獲得該樑自由端的垂直撓度δ，可應用卡氏第二定理，並對載重P求取U的偏導數；於是得

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{M_0L^2}{2EI}$$

*見參考書11－25至11－29。

以相似的方式，對力偶M_0求取U的偏導數，得該樑自由端的旋轉角θ。

$$\theta=\frac{\partial U}{\partial M_0}=\frac{PL^2}{2EI}+\frac{M_0L}{EI}$$

在這兩個式子內的正號，意指δ及θ分別與載重P及M_0具有相同的方向（或動向）。如所預料，δ及θ均爲各載重的一個直線函數。

很明顯的卡氏第二定理只可應用以求各變位的相當於作用在該結構上的各個載重，亦爲應用克－安定理的情形。若想求在某一位置上的變位，但在該處並無載重，我們必須安置一個假想的載重在該結構上；使相當於所要的變位。然後我們可應用卡氏第二定理繼續進行計算變位工作，其結果是，變位將以實際載重及該假想載重爲項以表示出來。由於在最後的式子內，使假想的載重等於零，於是因實際載重所引起的要求變位，即可獲得（見習題11－14.1）。

<u>單位載重方法</u>

直接應用卡氏第二定理以求變位，若結構有兩個以上的載重作用時，則其程序頗爲冗長。這種結論的理由是，計算得到應變能的程序，可能成爲糾纏不清者。例如，假設有四個載重不是僅有兩個載重，在如圖11－40所示的懸臂樑上作用。於是算得的應變能方程式，即與方程式(a)相類似，便需將一個四項式自乘，而在U的最後結果內將包括十項。

在求取彎力矩式的積分以前，先應用卡氏第二定理，在求各變位時獲得相當的簡化。如爲一根樑或一個平面構架，其中只有撓曲變形認爲重要，則其應變能將由方程式（11－72）定出。爲獲得相當於載重P_i的撓度δ_i，必須求取與P_i有關的U的偏導數；於是求取積分符號後的微分，可得：

$$\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial P_i}\int\frac{M^2\,dx}{2EI}=\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_i}\,dx \tag{b}$$

偏導數$\partial M/\partial P_i$，係代表由載重P_i一個單位值所引起的彎力矩值。於是這個偏導數，即等於M_U，而M_U，則爲該結構內的彎力矩，而由一個單位載重與相當於所想要的變位所引起者。在方程式(b)的積分符號後面，出現的力矩M，是由於該結構上的各個實際載重所引起的彎力矩；用M_L來

表示這個力矩。採用這種符號，我們可看出方程式(b)將化為

$$\delta_i = \int \frac{M_U M_L\, dx}{EI}$$

這個方程式是代表，只考慮撓曲變形時的單位載重法。

對於軸向力、剪力及扭曲各種變形的影響，可作同樣的誘導。因此我們斷定，將單位－載重法應用到直線型結構時（方程式 11 － 4），即可直接從卡氏定理誘導得出。此項結論並不覺得意外，因我們早已證明單位－載重法更為普遍應用的方程式（方程式 11 － 3），可應用於非直線型的結構，而從克－安定理誘導得出。如在以前所指出，單位載重法為一種決定多種型式結構的變位之最有效辦法。

11・15　應變能與韌性法

在 11.13 節內，已經討過餘能及應用克－安定理導致結構分析用的力法。當該結構具有直線型態時，即出現一種力法的特殊情形。在如此條件下，放鬆結構的應變能，即等於餘能；可以載重及靜力的贅力 X_1、X_2、… X_n 等來表示的一個二次函數。於是應用卡氏第二定理，將導出下列聯立方程式：

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} \qquad D_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} \quad \cdots \quad D_n = \frac{\partial U}{\partial X_n} \tag{11-73}$$

在以上各式中的 D_1、D_2、……D_n 代表在原結構內與贅力相當的各個變位。在這些方程式內，每一個的一般性形式均屬相同。其右側係由與各贅力的變位相當的若干代表項所組成。若干變位則係由那些贅力的本身所引起的，而其餘的若干變位，則由該結構上的實際載重所引起。無論何時，若相當的贅力，或為應力合力或為反力之未經任何變位者，這些項加到原結構的真實載重上，即將等於零。於是可以繼定，方程式（11 － 73）為韌性法中的形變適合性方程式（見方程式 11 － 25）。另外，方程式（11 － 69）則為在力法中的形變適合性方程式；而屬於直線型結構的一種特殊情形。

為詳細證明方程式（11 － 73）之一般形式起見，讓我們用一個特殊例來作說明。假設有一結構為二次靜不定的，並支承兩個載重 P_1 及 P_2。

於是該放鬆結構的應變能，即爲兩個贅餘力X_1及X_2與兩個載重P_1及P_2 ..次函數，並具有下列的一般形式（見方程式 11 − 44）：

$$U=a_{11}X_1^2+a_{12}X_1X_2+a_{13}X_1P_1+a_{14}X_1P_2$$
$$+a_{21}X_2X_1+a_{22}X_2^2+a_{23}X_2P_1+a_{24}X_2P_2$$
$$+a_{31}P_1X_1+a_{32}P_1X_2+a_{33}P_1^2+a_{34}P_1P_2$$
$$+a_{41}P_2X_1+a_{42}P_2X_2+a_{43}P_2P_1+a_{44}P_2^2$$

以上各式中的係數a_{11}、a_{12}、……a_{44} 均爲常數，且爲僅依該結構的性質而確定的。應用卡氏第二定理，在上面的U式，將提供下列的形變適合性方程式（見方程式 11 − 73）：

$$D_1=\frac{\partial U}{\partial X_1}=F_{11}X_1+F_{12}X_2+D_{1P}$$

$$D_2=\frac{\partial U}{\partial X_2}=F_{21}X_1+F_{22}X_2+D_{2P}$$

在以上兩式中，係數F_{11}、F_{12}、F_{21}及F_{22} 爲新的常數，係從前述的若干a係數得來的，仍依該結構的性質而定。此外，因爲這些常數爲各個未知贅力的係數，我們認爲，這些係數是放鬆結構的韌性係數。同樣，我們發現D_{1P}及D_{2P}這兩項，僅依載重P_1及P_2與該結構的性質而定。因此我們認爲，這幾項是該放鬆結構與各個贅力相當的變位，與各個載重所起的。於是頗爲明顯，應變能及卡氏第二定理的採用，將產生與韌性法形變適合性方程式相同的方程式（方程式 11 − 25）。自然，這個結論可適於任何型式的結構（桁架、樑、或剛構架）之具有任何數目的贅力者。

假如現在再取以上各個方程式的若干另外的偏導數，有如下列各式：

$$\frac{\partial D_1}{\partial X_1}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2}=F_{11}\qquad \frac{\partial D_1}{\partial X_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_2\partial X_1}=F_{12}$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial X_1}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_1\partial X_2}=F_{21}\qquad \frac{\partial D_2}{\partial X_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2}=F_{22}$$

從這些關係，可很容易看出下列韌性的一般方程式：

$$F_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_j\partial X_i}\tag{11-74}$$

這個方程式表示，放鬆結構的韌性，無論在何時，若應變能係表示靜力的贅力X_1、X_2、……X_n 等的一個二次函數，即可用微分的程序而獲得。

同樣，因爲求微分的先後次序並不重要，我們便能寫出：

$$F_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_j\,\partial X_i}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_i\,\partial X_j}=F_{ji} \tag{11-75}$$

如此，將韌性的互換定理從應變能的考慮中建立起來。

無論何時，當各個贅力，或是應力合力或是反力之未經變位者，即發生一個頗具興趣的情況。在所有一切如此的情形，在原來的結構內，與各該贅力相當的各個變位均爲零，因此韌性方法的形變適合性方程式（方程式11 － 73 ）變成：

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0 \qquad \frac{\partial U}{\partial X_2}=0 \quad \cdots \quad \frac{\partial U}{\partial X_n}=0 \tag{11-76}$$

這些方程式，代表應變能爲固定值的各種情況，且在一座結構處於穩定平衡的情況中該固定值實際爲一最小值。因此，已獲得最小應變能原理(principle of minimum strain energy ）。這個原理陳述：若在原結構內並沒有與各該贅力相當的變位，而爲一直線型結構，其贅餘數量X_1、X_2 、……X_n 等便具有如此的數值，使應變能成爲一最小者。最小應變能原理，乃爲更普遍的最小餘能原理關於直線型結構的一種特殊情形（參閱方程式 11 － 70 ）。自然，從最小應變能原理所獲得的各種方程式，與那些在以前用韌性法所獲得者相同 *。

11·16 其他各種結構分法

在本章內，曾敍述過若干種結構分析的基本方法，包括韌性法、勁性法及根據應變能及餘能的各種方法。自然尙有其他與結構分析有關的題目對於工程師們頗爲重要。例如，結構分析用的矩陣法（ matrix methods ）已在普遍使用。矩陣法係由韌性法及勁性法所組成，且因所有一切方程式均以矩陣形式提出，而所有一切誘導及計算，均借助矩陣代數完成，故更具綿密性。採用矩陣，使這種分析方法更有系統，提供表現的簡潔性，並適用於電子計算機的程式處理最爲理想。矩陣方法常在結構學教科書內敍述。假如參考書11-14 ，11 － 17 及 11 － 19 等。

*通常將方程式（ 11 － 76 ）稱爲最小功原理（ principle of least work ）。此一名詞係由 L . F . Menabrea 氏所用，氏首先在 1858 年提及此原理。雖然在當時並無可以令人滿意的證明。直到 1873 年。才由 Costigliano 始證明之。見參考書 11 － 25 至 11 － 29 與 11 － 52 ）

一種更爲特殊化的方法，廣被採用於分析靜不定樑及平面構架者，爲力矩分配方法（moment distribution）（見參考書 11－20）。這個方法可使具有若干次靜不定結構的分析成爲可能，且無需解數目很多的聯立方程式。這個方法包括若干連續的近似計算，而此項計算的完成頗爲簡單易行。其他求解與樑及構架有關的方法，如偏角撓度法（slope deflection method）法，共軛樑法（conjugate beam method），及彈性中心法（elastic centre method）等。均在結構學教科書內敘述。如參考書 11－15，11－16及11－18等。

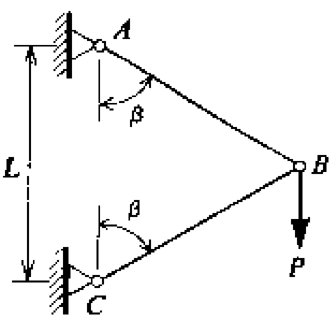
只有等截面構材所構成的結構，曾在本章內加以考慮。但若韌性、勁性及固定端力矩爲已知，則處理各種非等截面構材將不困難。處理非等截面構材的細節，可在以上所列的各種結構學教科書中找到。同樣的說明，應用於溫度變化、支承沉落、剪力變形以及其他次要事項的影響。

除對於結構分析及能方法予以介紹外，希望本書能對讀者提供關於應用力學深入研究的充分根基。本書研究的主題，將有第二册“高等材料力學”的出版以擴增其範圍。

習　題

11.3 節的習題，應用單位－載重法解出。

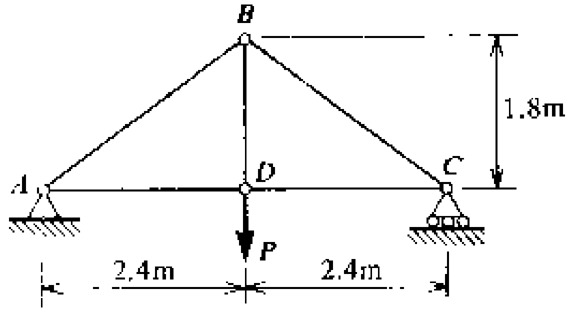
11.3－1 一個兩根桿件桁架 ABC，支承一個垂直載重 P 如附圖。兩根桿件均具有軸向剛度 EA。假設 $\beta = 60°$，試求接頭 B 的垂直撓度 δ_V，接頭 B 的水平撓度 δ_H，及構材 AB 的旋轉角 θ_{ab}。



習題圖 11.3-1 與 11.3-2

11.3－2 試就 AB 桿件受均佈溫度增加 ΔT 的情況，解上題。（取 α 爲熱膨脹係數）。

11.3－3　試為習題圖 11.3－3 內的桁架決定其接頭 D 的垂直撓度 δ_V 及接頭 C 的水平撓度 δ_H。若 $P = 9\,\text{kN}$，壓力構材的截面積為 $3000\,\text{mm}^2$，及拉力構材的截面面積為 $1200\,\text{mm}^2$，（假設 $E = 200\,\text{kN/mm}^2$）。

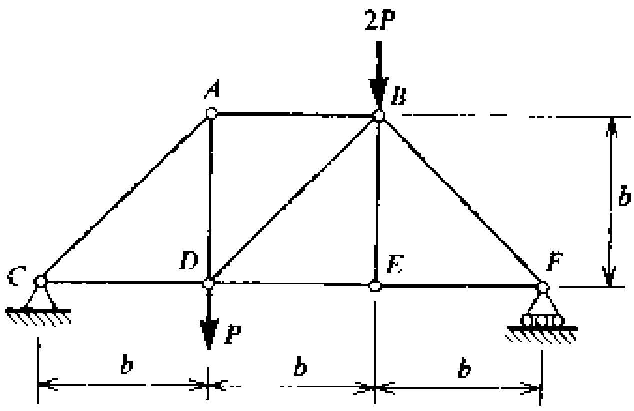


習題圖 11.3-3 與 11.3-4

11.3－4　參照上述的桁架，並假設載重 P 等於零。為使接頭 D 提高 5 in（或加拱度 12mm）構材 AB 及 BC 的長度應增加若干（與彼等的理論長度 3m 作比較）？

11.3－5　試求出習題圖 11.3－5 內的桁架接頭 A 的垂直撓度 δ_V，假設所有各構材的 EA 均爲相同。

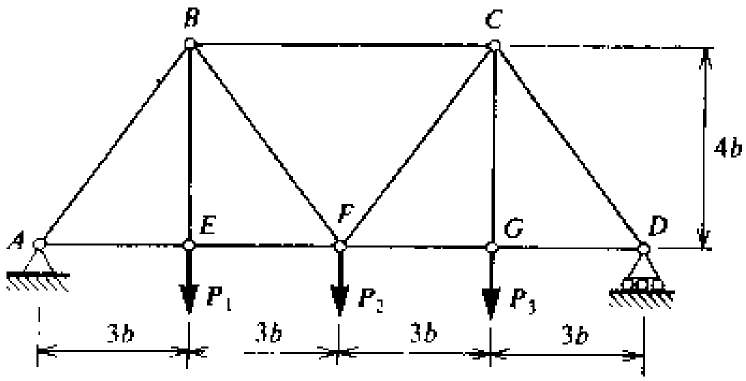
11.3－6　當各載重加在上題內桁架之後，問在 A、E 兩個接頭間的距離將增加若干？



習題圖 11.3-5 及 11.3-6

11.3－7　一架樞接鋼桁架（$E = 200\,\text{kN/mm}^2$）支承三個載重 P_1、P_2 及 P_3 如習題圖 11.3－7 所示。各構材的截面積如下：構材 BE、EF、CF 及 CG 爲 $1200\,\text{mm}^2$ 構材 AE、EF、FG 及 GD 爲 $1800\,\text{mm}^2$，構材 BC 爲 $2400\,\text{mm}^2$；構材 AB、CD 爲 $3600\,\text{mm}^2$ 假設距離 b 等於 1.2m，且 $P_1 = P_2 = 36\,\text{kN}$，$P_3 = 18\,\text{kN}$ 試求該桁架下列各個變位：(a)接頭 F 的垂直變位 δ_V，(b)接頭 F 的水平變位 δ_H，及(c)構材 BC 的旋轉角 θ_{bc}。

11.3－8 參照上題的桁架，試計算由於載重P_1、P_2及P_3作用於該桁架上，在接頭B及G間距離之縮短（採用所有在習題11.3－7內提及的數據）。



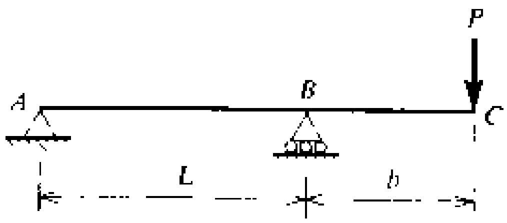
習題圖 11・3-7 及 11・3-8

11.3－9 一個長度爲L撓曲剛度爲EI的懸臂樑，全長承荷強度爲q的均佈載重。試誘導出該樑自由端撓度δ及旋轉角θ的各個公式。

11.3－10 一根長度爲L的簡支樑，在其中點負荷一個集中載重P。試求在載重下的撓度δ及各支承處的旋轉角θ。

11.3－11 一根懸臂樑支承兩個集中載重P，如習題圖6.5－3所示。假設這兩個載重係設在該樑相等間隔距離（即$a=b=c=L/3$）。試求該樑自由端的撓度δ及旋轉角θ。

11.3－12 一根簡支樑具一段懸出部份（見習題圖11.3－12），在其自由端承受一個集中載重P。試決定在其載重點上的撓度δ_c及旋轉角θ_c。



習題圖 11・3-12 及 11・3-13

11.3－13 試爲在上題之樑，求AB孔中點的向上撓度δ，及在支承A處的旋轉角θ。

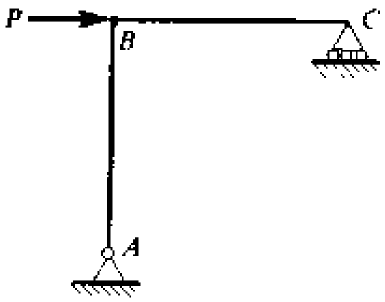
11.3－14 參照例題5及圖11－7，求該樑自由端C處因溫度差所引起的旋轉角θ。

11.3－15 試用單位－載重法解習題6.3－6（一根懸臂樑在其長度的一半負有均佈載重。）

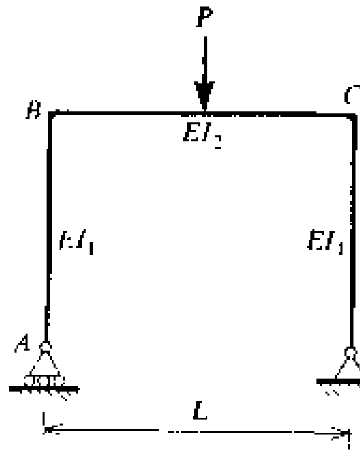
11.3－16 試用單位－載重法解習題6.4－6（一根簡支樑支承兩個集中載重）。

11·3 － 17 試求一根簡支樑負三角形分佈的載重時，在其兩端的旋轉角 θ_a 及 θ_b 。（參閱習題圖 6.2 － 9 ）。

11·3 － 18 若在示於習題圖（ 11.3 － 18 ）內平面構架的 AB 及 BC 兩根構材，同具長度 L 及撓曲剛度 EI 。試求出在 C 點處的水平撓度 δ 。（注意該構架的 A 點為一個樞接支承，在 C 點為一個輥軸支承）。



習題圖 11 · 3 - 18

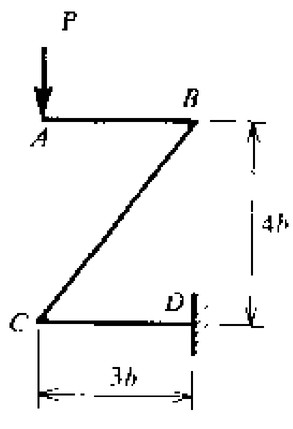


習題圖 11 · 3 - 19 及 11 · 3 - 20

11.3 － 19 一平面構架 $ABCD$ ，A 點為一輥軸支承，D 點為一樞接支承。（見習題圖 11 · 3 － 20 ）。在構架上的載重，係由一個在構材 BC 中點作用的力 P 所組成。垂直構材的撓曲剛度為 EI_2 ，水平構材的撓曲剛度為 EI_1 。試決定在 A 點的水平撓度 δ_H 及旋轉角 θ 。

11.3 － 20 若代替載重 P 的是一個在 A 點向左作用的水平力 Q ，試解上題。

11.3 － 21 示於習題圖 11.3 － 21 內的平面構架 $ABCD$，固定於 D 點，，並可自由活動於 A 點。試求由於垂直載重 P 而引起在 A 點的旋轉角 θ 。

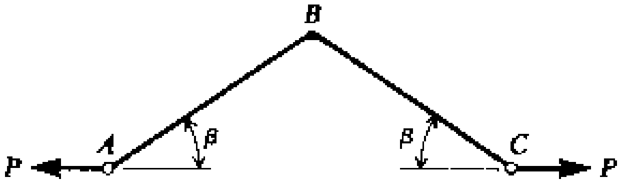


習題圖 11 · 3 - 21

假設所有一切構材均具有相同的撓曲剛度 EI 。

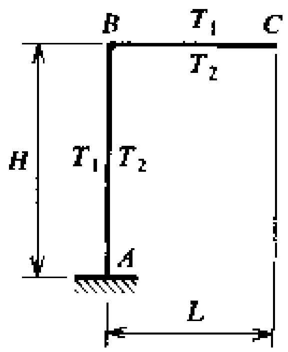
11.3 － 22 試為承受兩個載重 P 的平面構架 ABC （見習題圖 11.3 － 22 ），求出介於 A ，C 兩點間距離的增加量 Δ 。構材 AB 及 BC，在長度

L，撓曲剛度 EI 及軸向剛度 EA 各項均完全一樣。(在構材內的撓曲變形及軸向變形二者的影響應一律加以考慮)。



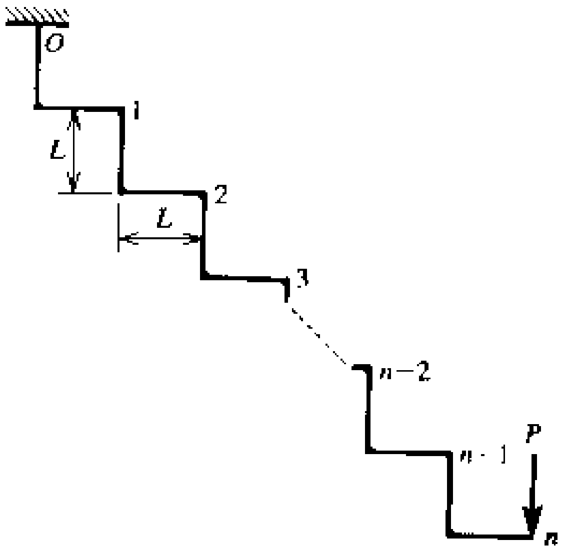
習題圖 11・3－22

11·3－23 示於習題圖 11·3－23 內的平面構架 ABC，在其左側面及頂上的溫度爲 T_1，在其他各側面的溫度爲 T_2。試決定在 C 點的水平撓度 δ_H，垂直撓度 δ_V，及旋轉角 θ。假設該構架的兩個構材均具相同的截面(截面高度爲 h)及相同的材料(熱膨脹係數等於 α)。



習題圖 11・3－23

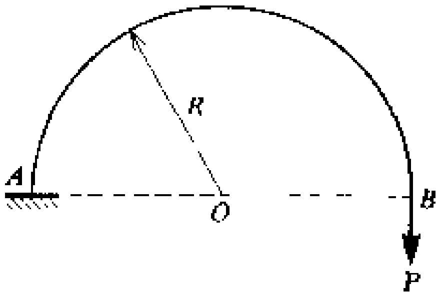
11·3－24 一個樓梯的平面構架，在其上端爲一固定支承，在其下端爲一自由端。有一載重 P 作用於其自由端。假設一共有 n 個梯級，試求其自由端的垂直撓度 δ 導出一個公式。(該構架的每一構材均具有長度 L 及撓曲剛度 EI)。



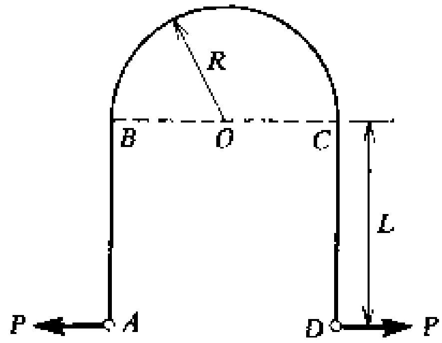
習題圖 11・3－24

11.3－25 試爲圖 11－9a內所示之彎曲桿件，獲得在接頭 B 處的垂直撓度 δ_V 及旋轉角 θ 的式子。

11.3－26 試爲薄彎曲桿 AB 其半圓形中心線的半徑爲 R，決定在 B 端的垂直撓度 δ_V（見習題圖 11.3－26）。



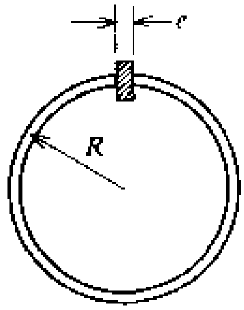
習題圖 11・3－26



習題圖 11・3－27

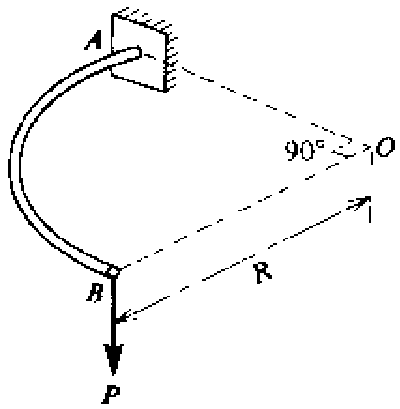
11.3－27 試爲一個由半徑 R 的半圓形部份 BC 及兩個長度各爲 L 的筆直部份所構成的一個薄桿，（見習題圖 11.3－27）求出由於這兩個載重 P 在 A、D 兩點間的距離上所引起的增加 Δ。

11.3－28 一個平均半徑爲 R 的圓環，在某一點上被切開，並在其切口處放一小塊使環張開（見習題圖 11.3－28）。假設小塊的寬度爲 e，試求該環內的最大彎力矩。



習題圖 11・3－28

11.3－29 一個細長的彎曲桿件 AB，放在一水平面內，其中心線形成一半徑爲 R 四分之一圓弧，並在其自由端負垂直載重 P 如習題圖 11.3－

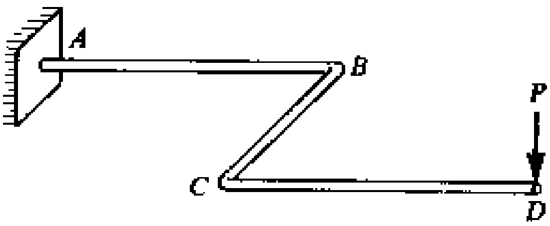


習題圖 11・3－29 及 11・3－30

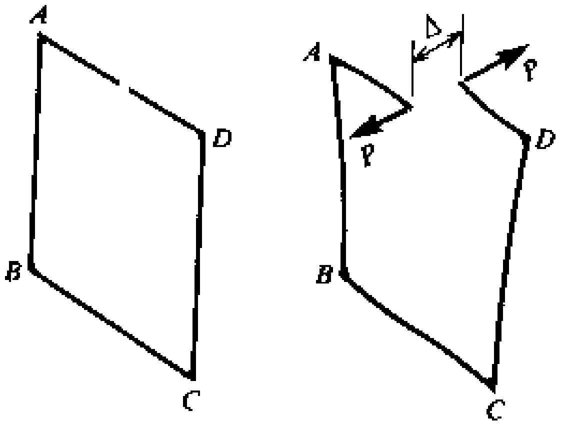
29所示。試爲在載重下的垂直撓度 δ_V 得一公式。（假設該桿件具有撓曲剛度 EI 及扭曲剛度 GJ ）。

11.3－30 在上題內的彎曲桿件，求 B 端的扭曲角 ϕ 式。

11.3－31 一個水平托架 $ABCD$ （見習題圖 11.3－31），固定在 A 端，在 D 端是自由活動。構材 AB 及 CD 的長度均爲 1.5m，構材 BC 與 AB 及 CD 成直角，其長度爲 1.2 m。該托架係由直徑 100mm 的管子造成，其慣性矩爲 $I = 3\times10^6\ mm^4$ 極慣性矩爲 $J = 6\times10^6\ mm^4$ 。試求出由於垂直載重 $P = 2kN$ 使該托架自由端上所起垂直撓度 δ 及扭曲角 ϕ （假設 $E = 200\ kN/mm^2$ $G = 80\ kN/mm^2$ ）。



習題圖 11.3-31



習題圖 11.3-32

11.3－32 一個正方形平面構架 $ABCD$ ，在 AD 邊上的中點，有一個切口（見習題圖 11.3－32），末端處負有相等但方向相反的兩個力 P ，其作用方向係與構架的平面成垂直。假設所有一切構材均具撓曲剛度 EI ，扭曲剛度 GJ ，正方形每邊的長度均爲 L 。試求出在該構架切口處兩端間的距離 Δ 。

11.5－1 試參照圖 11－12a 及 b，應用單位－載重法求得變位，並導出互換變位原理（ $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ ）。

11.5－2 試以圖 11－12a 及 b 的簡支樑，證明互換變位原理（ $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ ）。若該樑的長度爲 L ， A 點位於樑之中點，而 B 點係位於距右側支承 $L/4$ 處。

11.5－3 試證明互換變位原理，可用圖 11.13 的簡支樑滿足其條件。若樑之長度爲 L ， A 點位於左側支承之距離爲 $L/3$ 及 B 點位於右側支承之距離爲 $L/4$ 處。

11.5－4 試證明互換變位原理（ $\theta_{ab} = \theta_{ba}$ ）可用圖 11－14 的簡支樑滿足其條件。若樑之長度爲 L ， A 點位於樑之中點， B 點位於距右側支承之距離爲 $L/3$ 處。

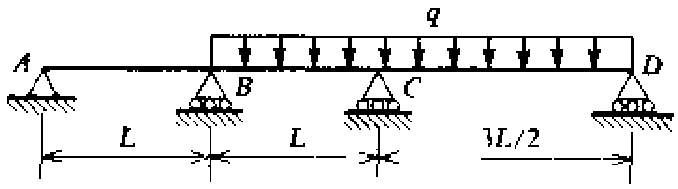
11.5－5 一根長度爲L的懸臂樑，其左端爲固定，另一端爲自由。該樑受到兩種載重情況。第一種載重情況是，一個集中載重P_1 在樑之中點向下作用，並有一個順時針走向的力偶M_1 在自由端作用。第二種載重情況是，一個力P_2在樑中點向下作用，另一個力P_3在自由端向下作用。試爲這兩種載重情況，由計算，在方程式（11－21）兩側含有功的各項以證明互換功原理。

11.5－6 一根長度爲L的簡支樑，受到兩種載重情況。第一種載重情況是，一個載重P_1在距樑左支承距離爲$L/3$處向下作用。第二個載重情況是，兩個相等的順時針走向的力偶M_0 作用在該樑上，一個是在樑的左端，另一個是在樑的中點。試由計算得出，在方程式（11－21）兩側含有功的各項，取這兩種載重情況以證明互換功原理。

11.5－7 一根簡支樑受到兩種載重情況。第一種載重情況是由強度q的均佈載重作用在該樑的全長所組成。第二種載重情況是由一個集中載重P作用在樑的中點上。試由計算得出，在方程式（11－21）兩側含有功的各項，取這種載重情況證明互換功原理。（提示：在均佈載重情況，將載重的一個元體qdx當作一個集中載重加以處理再求其積分）。

第11－6節的各習題，應用韌性法解出。

11.6－1 試用圖11－16c內所示的放鬆結構，求出圖11－16a內所示兩孔樑的贅餘力。假設各種載重爲$P_1=P$、$M_1=0$、$P_2=P$及$P_3=P$。以支承A處反時針走向的反力矩爲贅餘力X_1，並以B點的向上反力爲贅餘力X_2。

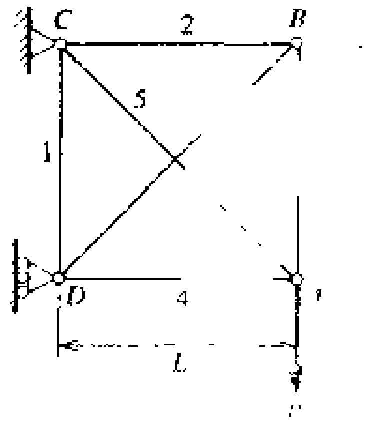


習題圖11.6-2

11.6－2 試決定示於習題圖11.6－2內的連續樑B及C兩個支承處的彎力矩，分別利用這兩個力矩作爲贅餘力X_1及X_2。假設，當贅餘力產生於樑頂爲壓力時作爲正號，該樑的撓曲剛度EI爲一個常數。

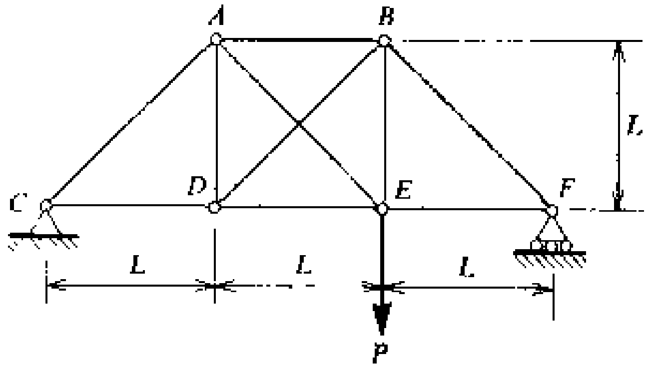
11.6－3 若在中間一孔的載重取消，在右側一孔上的載重P等於qL。試求圖11－19內所示連續樑的贅餘力X_1及X_2。

11.6－4 示於習題圖11.6－4內的平面桁架，支承一個載重P於接頭A上。全樑各構材的軸向剛度EA一律相同。試求在各構材內的軸向力N_1、N_2、……N_n等。



習題圖 11・6－4

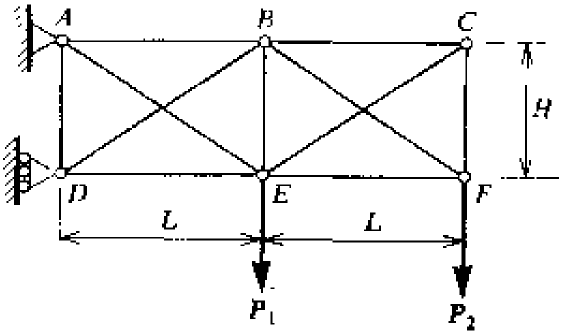
11.6－5　若 $P = 15$ kN，試求在習題圖 11.6－5 內平面桁架桿件 AB 的軸向力。假設 $L = 6$ m，所有構材的 E 均為相同，CA、AB 及 BF 各構材的截面積為 2600 mm^2，其他各構材的截面積為 1300 mm^2。



習題圖 11・6－5

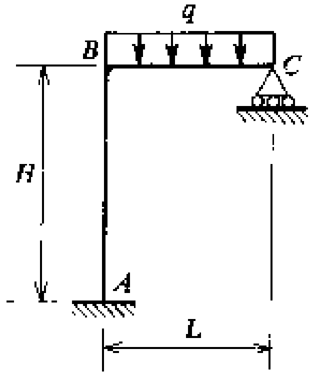
11.6－6　參照圖 11－20 內所示平面桁架，再解同一例題，但此次將分別將桿件 AB 及 BC 內的軸向力當作贅餘力 X_1 及 X_2。各水平及垂直構材的軸向剛度均為 EA，而斜向構材的軸向剛度為 $2EA$。

11.6－7　試計算在習題圖 11.6－7 中的桁架，AB 及 BC 兩桿件內的力。分別採用這兩根桿件內的力為贅餘力 X_1 及 X_2。並採用下列的數據：$L = 1$ m，$H = 0.75$ m，$P_1 = 1$ kN，$P_2 = 0.6$ kN，$E = 80$ kN/mm^2，及各構材的截面積一律為 $A = 1000$ mm^2。



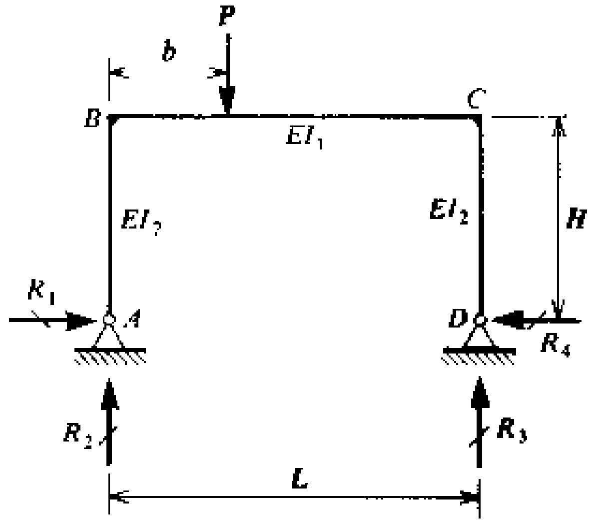
習題圖 11・6－7

11.6－8　一架平面構架 ABC，在支承 A 處為一固定支承，而在支承 C 處為一輥軸支承，如習題圖 11.6－8 所示。構材 AB 及 BC 均一律具有相同的撓曲剛度 EI。僅考慮撓曲變形的影響，試求在 C 點的垂直反力。



習題圖 11.6－8

11.6－9　一個平面構架 $ABCD$，在支承 A、D 兩點具有樞接（見習題圖 11.6－9）水平構材具有長度 L 及撓曲剛度 EI_1；垂直構材具有長度



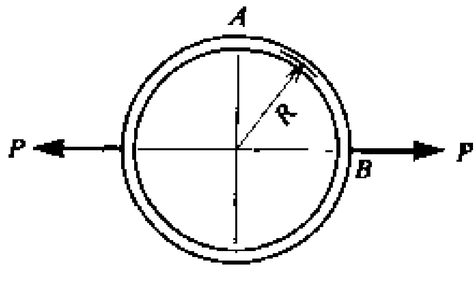
習題圖 11.6－9

H 及撓曲剛度 EI_2。試求由該載重 P 所引起的反力 R_1、R_2、R_3 及 R_4。僅考慮撓曲變形的影響，並取反力 R_4 作贅餘力。

11.6－10　一個平面構架 $ABCD$，在 A 與 D 兩點為固定支承如習題圖 11.6－10 所示。假設 $P_1 = P$、$P_2 = 0$、$b = L/2$、$H = L$ 及 $I_1 = I_2$。試求在各支承上的反力。僅考慮撓曲變形的影響。

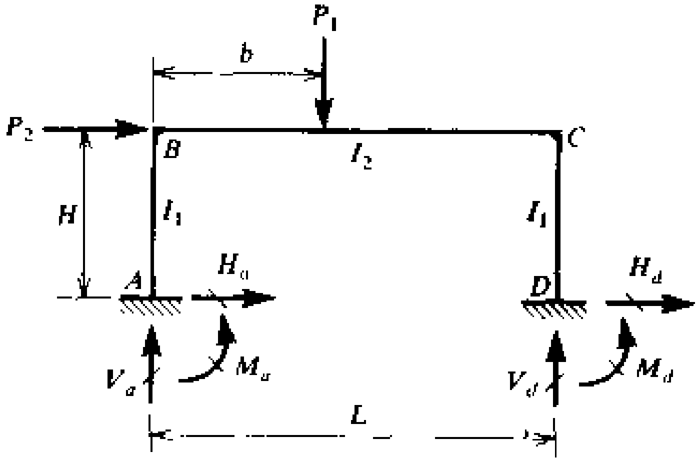
11.6－11　若 $P_2 = P$、$P_1 = 0$，$H = L/2$ 及 $I_2 = 2I_1$ 試重解上題。

11.6－12　一個半徑為 R 的圓環，受兩個同量但方向相反的力 P，沿環的直徑作用於環上如習題圖 11.6－12 所示。試求，在環上 A 與 B 兩點的彎力矩，若僅考慮撓曲變形的影響。



習題圖 11・6-12

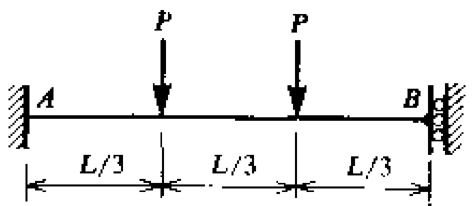
11.6－13 試求示於習題圖 11.6－13內的平面構架支承D處的各個反力，並取這些反力作爲賸餘力。僅考慮撓曲變形的影響，並採用下列諸數據：$P_1 = 72$ kN，$P_2 = 0$，$b = 6$m，$L = 18$m，$H = 6$ m，$E = 200$ kN / mm^2，$I_1 = 270 \times 10^6$ mm^4 及 $I_2 = 460 \times 10^6$mm^4。



習題圖 11・6-10，11・6-11 及 11・6-13

第11・7節內的各習題，應用勁性法解出。

11.7－1 示於習題圖 11・7－1內的AB樑，具有一個固定支承A點，及一個導溝支承B點。試求，向下變位D，及在支承B處的反力矩M_b（取反時針走向者爲正）。

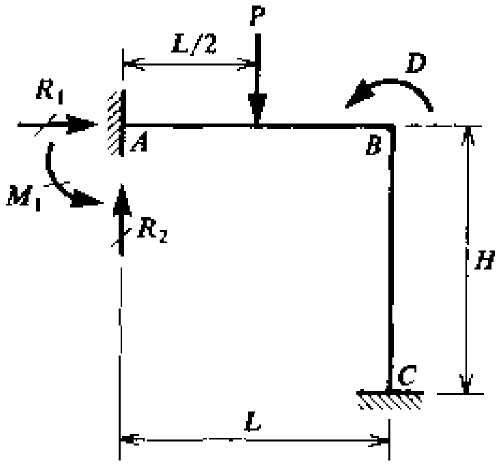


習題圖 11・7-1

11.7－2 一座雙孔連續梁ABC，在A點具有一個固定支承，並在B與C兩點各具一個輥軸支承，如圖 11－26 a 所示之情形。在樑上的載重如下：$P_1 = P$，$M_1 = PL$，$P_2 = 0$，及$P_3 = 0$。同時，AB孔的長度爲L，BC孔的長度爲 1.5 L。試決定在接頭B及C上的旋轉角D_1及D_2（取反時針走向者爲正）。並再求出支承A處的反力R_a及M_a。

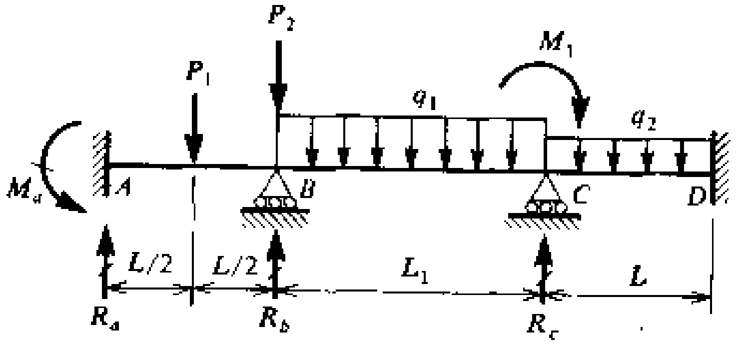
11.7－3 若$P_1 = P$，$P_2 = P/3$，$L_1 = L$及$L_2 = 2L$。試分析圖11-27a所示之ABC樑。求出未知變位D_1及D_2，及兩端反力矩M_a及M_c。

11.7－4 示於習題圖11.7－4內的平面構架ABC，具有兩個固定支承A、C。構材AB的長度爲L，構材BC的長度爲H。兩個構材均具相同的撓曲剛度EI。僅考慮撓曲變形的影響。試求在接頭B處的旋轉角D。（取反時針走向爲正）。另外再決定在支承A處的反力R_1、R_2及M_1。



習題圖 11.7-4

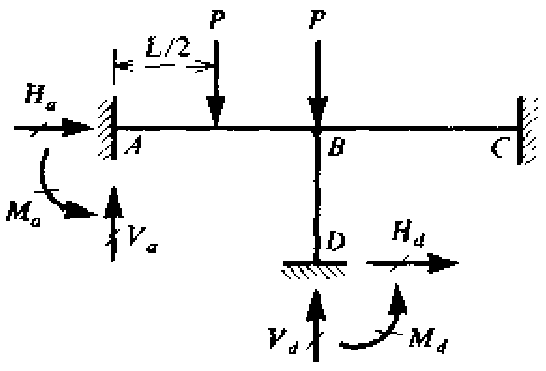
11.7－5 示於習題圖11.7－5內的三孔連續樑，具有兩個固定支承A及D，與輥軸支承B及C。所有三孔均具有相同長度（$L_1 = L$）。在樑上的載重如下：$P_1 = P$，$P_2 = 0$，$M_1 = 0$，$q_1 = 0$，及$q_2 = P/L$。試決定該樑之反力R_a、R_b、R_c及M_a。



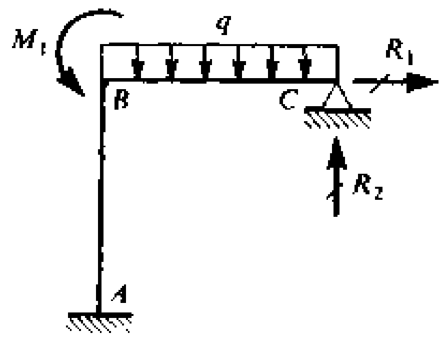
習題圖 11.7-5 及 11.7-6

11.7－6 當中間一孔的長度爲兩個端孔長度的1.5倍（$L_1 = 1.5L$），在樑上的載重分別爲：$P_1 = P_2 = P$，$q_1 = P/L$，$q_2 = P/L$及$M_1 = PL$。試就此種情況，解上列的習題。

11.7－7 試求示於習題圖11.7－7內平面構架的兩個支承A與D處的反力。僅考慮撓曲變形的影響。所有一切構材均具相同的撓曲剛度。構材AB及BC的長度爲L，構材BD的長度爲$2L/3$。



習題圖 11.7-7



習題圖 11.7-6

11.7－8　平面構架 ABC（見習題圖 11.7－8）具有一個固定支承 A 一個樞接支承 C。構材 AB 及 BC 均具相同的撓曲剛度，及相同的長度 L。載重爲強度 q 的均佈載重，作用在構材 BC 上，另一個力偶 $M_1 = 2qL^2$ 作用在接頭 B 上。僅考慮撓曲變形的影響，試決定在支承 C 處的反力 R_1 及 R_2。

11.9－1　圖 1－14 a 所示的對稱桁架，係由三根桿件相交於接頭 D 所組成。所有三根桿件，均具相同的軸向剛度 EA，在中間的桿件則具有長度 L。在桁架上僅有的載重是作用在 D 點的垂直力 P。(a)試將該結構的應變能 U，用接頭 D 處的垂直變位 δ 的一個函數，(b)利用卡氏第一原理獲得一個勁性法的平衡方程式。並解此方程式求得撓度 δ，(c)利用這個 δ 值，以獲得在該桁架各桿件內的軸向力 N_{ad}、N_{bd} 及 N_{cd}。

11.9－2　一架支承載重 P 的簡支桁架如圖 1－10 a 所示。這個桁架的兩根桿件，均具相同的軸向剛度 EA，而構材 AB 的長度爲 L。將接頭 B 處向右爲正的水平變位用 D_1 代表，並將向下爲正的垂直變位用 D_2 代表。(a)試將結構的應變能 U 用變位 D_1 及 D_2 的一個函數來表示，(b)利用卡氏第一原理解出 D_1 及 D_2，(c)利用這兩個 D_1 及 D_2 值，求出各桿件內的軸向力 N_{ab} 及 N_{bc}。

11.10－1 試利用位能法求圖 11－34 a 所示平面構架的接頭旋轉角 D 及 D_2。

11.10－2 試用位能法解習題 11.9－1。

11.10－3 試用位能法解出習題 11.9－2。

第 11.11 節內的各習題，試應用端－李法解出。

11.11－1 在下列各種情形下，試求圖 11－36 所示簡支樑中間撓度 δ 的近似值。(a)採用具一個變位參數的二次多項式形式作爲形狀函數，(b)採用具一個變位參數的三次多項式形式作爲形狀函數，（樑之一半方程式）將所得的結果與正確值作比較。

11.11－2 試決定一根長度為 L 的簡支樑，負強度 q 的均佈載重，在其中點的撓度 δ 的近似值。假設該樑具固定不變的撓曲剛度 EI。(a)採用具一個變位參數的三角式作為形狀函數，(b)採用具兩個變位參數的三角式作為形狀函數〔參閱 11.11節方程式(d)〕。將所得的結果與正確值比較。

P，在其中點的撓度 δ 的近似值。（見圖 7－3）。假設該樑具有固定不

11.11－3 試求一根長度為 L 的固定端樑，在其中點負荷一個集中載重

變的撓曲剛度 EI。採用只具一個變位參數的三角式作為形狀函數，如下：

$$v = \frac{\delta}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

將答案與該撓度的正確值作一比較。

11.11－4 一根具兩種不同慣性矩的簡支樑如圖 6－15 a 所示。試獲得該樑中點撓度的近似值如下：(a)採用具一個變位參數的二次多項式作為形狀函數，(b)採用具一個變位參數的三次多項式作為形狀函數（為樑之一半方程式）。將所得的結果與正確的撓度值作比較。

11.11－5 試為一個具固定底部的理想立柱，求其臨界屈挫載重 P_{cr}。假設該立柱具有固定不變的撓曲剛度 EI。採用只具一個變位參數的三角式作為形狀函數如下：

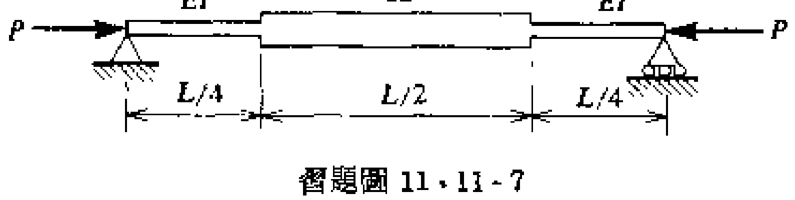
$$v = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

11.11－6 試為一個具簡支端狀況的理想立柱，求其臨界屈挫載重 P_{cr} 的近似值（見圖 10－6 a）。假設該立柱具固定不變的撓曲剛度 EI。(a)採用具一個變位參數的二次多項式作為假設的形狀函數，(b)採用具一個變位參數的四次多項式作為形狀函數，將所得結果與正確的臨界載重作比較。

11.11－7 試為一根理想立柱，其兩端為簡支支承，而具兩種不同的慣性矩。計算其臨界屈挫載重 P_{cr} 的近似值（見習題圖 11.11－7）。採用只有一個變位參數的三角式形狀函數如下：

$$v = \delta \sin\frac{\pi x}{L}$$

（注意：正確的屈挫載重為 $P_{cr} = 1.68\pi^2 EI / L^2$）

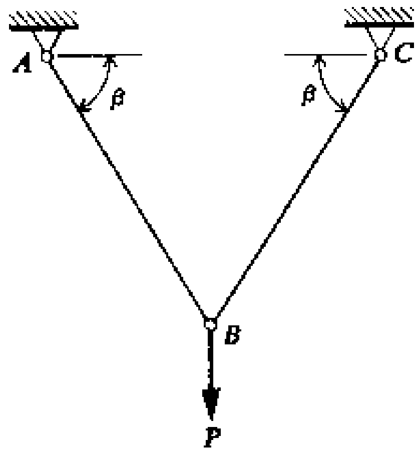


習題圖 11.11－7

11.12－1 承受載重P的某一非直線型結構，儲存於內的餘能U^*如11.8節內的例題1所例（見方程式11－46）。試用克 安原理證明這個結構撓度δ的式子。

11.12－2 一個非直線型結構，係由兩根水平桿件所構成，已敘述於第11.8節的例題2內。該結構的餘能，將由方程式（11－49）提供。試用克－安原理證明這個結構撓度δ的式子。

11.12－3 一個由完全一樣的兩根桿件AB及BC所構成的桁架（見習題圖11.12－3）支承一個垂直載重P。每根桿件均具有截面積A及長度L。應力－應變關係爲$\sigma^n = B\epsilon$，式中的B及n爲常數。試由計算得出



習題圖 11．12－3

該結構的餘能，並應用克－安原理以決定接頭B的撓度δ，(b)試用單位載重法以決定撓度δ。

11.12－4 示於圖11－32的桁架接頭B上支承一個垂直載重P。應力應變圖提供在圖(b)部份。試用下列各方法決定接頭B的水平撓度δ_H：(a)計算該結構的餘能，並應用克－安原理，及(b)用單位－載重法。

11.12－5 試求一個懸掛在頂端的垂直桿，因其本身重量而起的伸長量δ，若材料的應力－應變關係爲$\sigma^n = B\epsilon$，式中B及n爲常數。桿件具有長度L及單位體積之重量γ。(a)試計算該桿件的餘能，並應用克－安原理求其撓度。(b)用單位－載重法求其撓度。

11.14－1 試決定繪於圖11－40內的懸臂樑中點的撓度δ。(a)由加一個假想載重Q在樑中點求得撓度，計算應變能，然後應用卡氏第二原理，(b)用單位－載重法求得撓度。

參考資料與發展簡史

1-1. Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1953.

1-2. Todhunter, I., and Pearson, K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Vols. I and II, Dover Publications, Inc., New York, 1960 (originally published by the Cambridge University Press in 1886 and 1893).

1-3. Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Ed., Dover Publications, Inc., New York, 1944 (originally published by the Cambridge University Press in 1927); see "Historical Introduction," pp. 1-31.

1-4. See Ref. 1-2, Vol. I, pp. 10, 533, and 873.

（註：Jacob Bernoulli （1654 - 1705）又名James, Jacques 及Jacob；參考書1-2中用James 名。彼爲瑞士Basel 郡著名數學及科學家家族的一員。在梁的彈性曲線方面作了很多重要工作。又發展極坐標、或然率、及解析幾何等工作而出名。Jean Victor Poncelet,（1788-1867）曾參加拿破崙軍隊對俄作戰被俘，戰後回法繼續在數學方面工作。他對數學貢獻在幾何方面，至於在力學著名工作是材料性質及動力學）。

1-5. See Ref. 1-1, pp. 90-98 and Ref. 1-2, Vol. I, pp. 80-86.

（註：Thomas Young 爲一傑出科學家，在光學、聲學、衝擊及其它方面，作了很多先驅性的工作）。

1-6. Young, Thomas, *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, Vols. 1 and 2, London, 1807.

1-7. See Ref. 1-1, pp. 17-20 and Ref. 1-2, Vol. I, p. 5.

（註：Robert Hooke 曾完成很多種有關彈性體的實驗，並隨時改進他的實驗方法。他亦導出引力定律，但與牛頓無關，他與牛頓爲同時代人。1662年倫敦皇家學會（Royal Society of London）成立，任爲第一任會長）。

1-8. Hooke, Robert, *De Potentiâ restitutiva*, London, 1678.

1-9. See Ref. 1-1, pp. 111-114; Ref. 1-2, Vol. I, pp. 208-318; and Ref. 1-3, p. 13.

（註：Simeon Denis Poisson 對數學有很多貢獻，除了卜桑（Poisson）比外，他的名字亦在其它方面出現甚多。例如，偏微分方程式中有"卜桑方程式"，在或然率中有"卜桑分佈"。根據其理論材料行態，他

算出受拉桿件的側向應變，其值約爲縱向應變的四分之一）。

1-10. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1970, p. 110.

1-11. See Ref 1-1, p. 314.

1-12. See Ref. 1-1, p. 36 and Ref. 1-13, p. 650.

1-13. Oravas, G. A., and McLean, L., "Historical development of energetical principles in elastomechanics," *Applied Mechanics Reviews*, Part I, vol. 19, no. 8, August 1966, pp. 647-658 and Part II, vol. 19, no. 11, November 1966, pp. 919-933.

1-14. See Ref. 1-1, p. 75; Ref. 1-2, Vol. I, p. 146; and Ref. 1-13, p. 652.
（註：Louis Marie Henri Navier（1785-1836）爲彈性數學理論創造者之一。他的貢獻在梁、板與殼理論，振動理論，以及粘性流體理論等方面）。

1-15. See Ref. 1-1, p. 88.

1-16. Timoshenko, S. P., and Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, 3rd Ed., D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1955.
（註：桿上縱向衝擊在 24 - 26 及 312 - 314 頁中討論。梁上側向衝。則在 26 - 29 及 412 - 413 頁中討論）。

1-17. Goldsmith, W., *Impact*, Edward Arnold Ltd., London, 1960, 379 pages.

2-1. Piobert, G., Morin, A.-J., and Didion, I., "Commission des Principes du Tir," *Mémorial de l'Artillerie*, vol. 5, 1842, pp. 501-552.
（註：該文敍述砲彈射向鐵板的實驗。在 505 頁上，該文曾描述滑動帶的痕跡。但非常簡短，未指明固定材料性質是痕跡的結果。Guillaume Piobert，（1793 - 1871）爲法國將軍及數學家，彼對彈道學（ballistics）作了很多研究，此文發表時，正任砲兵隊隊長）。

2-2. Lüders, W., "Ueber die Äusserung der elasticität an stahlartigen Eisenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biegen solcher Stäbe beobachtete Molecularbewegung," *Dingler's Polytechnisches Journal*, vol. 155, 1860, pp. 18-22.
（註：該文很清晰的敍述並解說當材料降伏時呈現於磨光鋼料試驗表面的條紋。當然，這些條紋只在變形三度區域的表面上出現。所以，這等區域依其特性可爲"楔形"而非條紋。不過對此痕跡，通常仍稱爲 Luder 條紋，有時亦稱爲 Piobert 條紋。在參考書 2 - 3及 2 - 4 中已提示有關條紋的更多相片及文獻）。

2-3. Fell, E. W., "The Piobert effect in iron and soft steel," *The Journal of the Iron and Steel Institute*, vol. 132, no. 2, 1935, pp. 75-91.

2-4. Turner, T. H., and Jevons, J. D., "The detection of strain in mild steels," *The Journal of the Iron and Steel Institute*, vol. 111, no. 1, 1925, pp. 169-189.

2-5. See Ref. 1-1, p. 216.

2-6. See Ref. 1-1, pp. 285-286 and Refs. 2-7 and 2-8.
（註：Otto Christian Mohr（1835 - 1918）對於結構理論具有很多貢獻。尤其是圖解法，更爲著名。這些圖解法包括莫氏應力圖，Williot-Mohr

歸，以及力矩－面積法。此外，他曾導出一分析靜不定結構的方法，常稱為Maxwell－Mohr 法）。

2-7. Mohr, O., "Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes," *Zivilingenieur*, 1882.
2-8. Mohr, O., *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Wilhelm Ernst and Sohn, Berlin, 1906.
2-9. See Ref. 1-1, p. 109.
（註：Augustin Louis Cauchy，（1789－1857）在彈性數學理論的歷史中為另一卓越人物。他明晰的介紹應力觀念；見參考書 1-1 第 108 至 115 頁。在參考書 1-2 中，有一整章介紹他的成就；見卷 I，319－376 頁）。
2-10. See Ref. 1-2, Vol. II, Part I, pp. 86 and 296.
（註：William John Macquorn Rankine，（1802－1872）在 1852 年曾導出應力轉變方程式。他對彈性理論及結構理論亦有很多貢獻。如導出拱的行態及擋土牆理論。他亦因在流體、光、聲、晶體行態等方面之工作而出名；見參考書 1-1, 197－202 頁及參考書 1-2, 卷 II, 第一部分，287－322 頁。Barre de Saint－Venant，（1797－1886），為整個時代所公認的最傑出彈性專家。最有名的貢獻為創立彈性基本方程式，與導出梁彎曲的準確理論及扭轉理論。他又發展出塑性變形、振動理論。有關他生平及成就資料，見參考書 1-1，229－242頁，參考書 1-2，卷 I，833－872 頁，卷 II，部分 I，1－286 頁）。
2-11. See Ref. 1-10, pp. 219-226.
2-12. Hetényi, M., Editor, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.
2-13. Dally, J. W., and Riley, W. F., *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1965.
3-1. See Ref. 1-1, pp. 51-53 and 92, and Ref. 1-2, Vol. I, p. 69.
（註：著名的法國科學家，Charles Augustin Coulomb 於 1784 年最先正確的建立圓形桿件扭轉與扭轉角間的關係。Coulomb 的貢獻包括有電磁、流體粘滯性、摩擦、梁彎曲、擋土牆與拱、扭轉與扭轉振動以及其它；見參考書 1-1，47－54 頁。Thomas Young 在 1807 年出版的書中（參考書 1-6），作用扭矩與截面上的剪應力成平衡，且剪應力與至中和軸距離成正比）。
3-2. See Ref. 1-1, pp. 233-237 and Ref. 1-2, Vol. II, Part II, pp. 1-51.
（註：Saint－Venant 有關扭轉的劃時代傳記刊行於 1855 年，已在這些參考書中敘述）。
3-3. Bredt, R., "Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, vol. 40, 1896, pp. 813-817.
3-4. Flügge, W., Editor, *Handbook of Engineering Mechanics*, 1st Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc, New York, 1962, p. 36-13.
3-5. Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd Ed.,

McGraw-Hill Book Co., Inc., 1961, pp. 500-509.
5-1. Fazekas, G. A., "A note on the bending of Euler beams," *Journal of Engineering Education*, vol. 57, no. 5, January 1967, pp. 393-394.
5-2. See Ref. 1-10, pp. 42, 48.
5-3. See Ref. 1-1, pp. 11-47, 135-141, and Ref. 1-2.
5-4. *Handbook on Structural Steelwork*, published jointly by the British Constructional Steelwork Association Ltd. and the Constructional Steel Research and Development Organization, London, 1971.
5-5. *Aluminum Construction Manual*, published by the Aluminum Association, 420 Lexington Avenue, New York, N.Y., 1959, 389 pages, and "Section A." 1963, 96 pages.
5-6. See Ref. 3-5, Chapter 6.
5-7. See Ref. 1-1, pp. 141-144 and Ref. 1-2, Vol. II, Part I, pp. 641-642.
(註：D. J. Jourawski, (1821-1891) 爲蘇俄的橋梁及鐵路工程師。導出現今廣泛使用的梁中剪應力的近似理論。至於梁中剪應力的準確理論係由 Saint-Venant 提出。但準確理論僅在少數實際始有用處，所以由 Todhunter 及 Pearson 所作有關 Jourawski 理論的批評(見參考書 1-2，642 頁)似欠公允。在參考書 5-8 中已引用 Jourawski 的梁中剪力論文)。
5-8. Jourawski, D. J., "Sur la résistance d'un corps prismatique . . . ," *Annales des Ponts et Chaussées*, Mémoires et Documents, 3rd Series, vol. 12, Part 2, 1856, pp. 328-351.
5-9. See Ref. 1-10, pp. 358-9.
5-10. See Ref. 1-1, pp. 194-195.
(註：Karl Culmann, (1821-1881) 爲德國工程師，他創出很多圖解方法，且刊行第一本圖解靜力學書籍)。
5-11. Ranov, T., and Wolko, H. S., "The location of maximum principal stresses," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Structural Division, vol. 84, ST3, Paper No. 1629, May 1958.
5-12. Maki, A. C., and Kuenzi, E. W., "Deflection and stresses of tapered wood beams," Research Paper FPL 34, U.S. Forest Service, Forest Products Laboratory, Madison, Wisconsin, September 1965, 54 pages.
5-13. See Ref. 1-10, pp. 110-111.
5-14. Plantema, F. J., *Sandwich Construction*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
5-15. See Ref. 1-1, p. 147. (註：J. A. C. Bresse, (1822-1883) 法國工程師，他在曲桿及拱方面工作而著名)。
6-1. See Ref. 1-1, pp. 27, 30-36.
(註：Jacob Bernoulli, Euler 及很多其它學者對於彈性曲線的研究工作已在參考書 1-2 中討論過。Daniel Bernoulli. (1700-1782)爲 Bernoulli 家族中的另一位，他對 Euler 建議，可利用使應變能爲極小而求得撓曲線微分方程式。此事 Euler 已經做到。Daniel Bernoulli乃Jacob Bernoulli 之侄，在流體動力學、氣體動力學、與梁振動以及其它方面等工作而著名。他的父親 John Bernoulli, (1667-1748) 乃 Jacob 的幼弟，亦爲有名的數學家及科學家。他最先創出虛位移原理，解 brachys-

tochrone 問題，並建立當分數中的分子分母皆趨近於零時，求分數極限值的法則。他將此新法通知G. F. A. L′Hopital, (1661 - 1704)，L Hopital 寫第一本微積分時，即將此定理包括在內，此一定理今日稱爲 "L′Hopital 法則" ，見參考書 6-2。Daniel 的侄子 Jacob Bernoulli (1759 - 1789)，亦稱 James 或 Jacques，爲板彎曲及板理論的先知者。在很多有關數學史中，多半記載有關 Bernoulli 家族中各傑出家人以及力學及數學等其它先賢等事蹟及資料，例如，見參考書 6-3，6-4 及 6-5)。

6-2. Struik, D. J., "The origin of L'Hôpital's rule," *The Mathematics Teacher*, vol. 56, no. 4, April 1963, pp. 257-260.

6-3. Newman, J. R., *The World of Mathematics*, Vols. 1-4, Simon and Schuster, New York, 1956.

6-4. Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, 3rd Ed., Dover Publications, Inc., New York, 1967.

6-5. Cajori, F., *A History of Mathematics*, 2nd Ed., The Macmillan Co., New York, 1919.

6-6. See Ref. 1-1, p. 137.

6-7. Saint-Venant, Barré de, notes and appendices to third edition of the book by Navier, *Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 1st Part, "De la Résistance des corps solides," Paris, 1864, p. 72.

6-8. See Ref. 1-1, p. 284.

6-9. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen," *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, vol. 14, 1868, pp. 19-51.

6-10. Greene, Charles E., "Graphical Method for the Analysis of Bridge Trusses," D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1875.

(註：力矩 - 面積法乃由 Michigan 大學教授 Greene 氏於 1873 年獨自發現。他在該年即對學生教授此法。在該書 35 - 40 頁中，即敍述此法，並稱爲 "面積 - 力矩法")。

6-11. Hildebrand, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956.

6-12. Salama, A. E., and Moody, M. L., "Analysis of beams and plates for ponding loads," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Structural Division, vol. 93, no. ST1, February 1967, pp. 109-126.

6-13. Sawyer, D. A., "Roof-structure roof-drainage interaction," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Structural Division, vol. 94, no. ST1, January 1968, pp. 175-198.

6-14. See Ref. 1-10, p. 49.

6-15. See Ref. 1-10, p. 121.

6-16. See Ref. 1-1, p. 89.

6-17. Cowper, G. R., "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, no. 2, June 1966 (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, vol. 88, Series E), pp. 335-340.

6-18. Gere, J. M., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1963, pp. 212-220.
6-19. See Ref. 1-1, pp. 25, 30-36, 39-40.
（註：表示曲率及彎力矩間關係的基本方程式，首先由Jacob Bernoulli導出，但其算得的比例常數並不正確。但他的工作仍應認爲是解大撓度梁問題的第一貢獻人。其後，由於Daniel Bernoulli 的建議，Euler再導出撓曲線微分方程式，並繼續解出各種彈性體問題；見參考書 1-1 ，27 頁；參考書 1-2 ，卷 I, 30及34 頁；及參考書 1-3，第3 頁。Euler著名彈性曲線論文乃由參考書 6-20所引用。Joseph Louis Lagrange, (1736-1813）乃一著名的意大利數學家，他最先導出虛功原理，且對動力學有重大貢獻。很明顯地，他爲研究彈性體的第二人。他考慮一載重作用於懸臂梁端點處；見參考書 1-1 ，39-40 頁及參考書 1-2 卷I中之 58-61 頁。Lagrange 的論文已在參考書 6-21 引用，在參考書 6-4 中132 頁，參考書 6-5 中 250頁皆記載他的小傳。另一早期研究彈性理論是Giovanni Antonio Amaedo Plana,（1781-1864）乃Lagrange 的侄子，他改正了 Lagrange 彈性體研究中的錯誤；見參考書 1-2, 卷 I，89-90 頁。參考書 6-22 引述了Plana的論文，參考書 6-5 記述了他傳記資料。應用各種方法研究彈性體者，由 Max Born 在他的論文中載着；見參考書 1-13 ，927-928 及 932 頁；參考書 6-23, 及參考書 6-24, xxviii 頁。Max Born，（1882-1970）爲最偉大物理學家之一，他首創現代波動力學，且在量子力學及相對論中有重大貢獻。在他的論文中，他建立了新的彈性變動原理）。
6-20. Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes . . . ," Appendix I, "De curvis elasticis," Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744. (English translation: Oldfather, W. A., Ellis, C. A., and Brown, D. M., *Isis*, vol. 20, 1933, pp. 72-160. Also, republished in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 1, vol. 24, 1952.)
6-21. Lagrange, J. L., "Sur la force des ressorts pliés," *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, vol. 25, 1771. (Reprinted in "Oeuvres de Lagrange," Gauthier-Villars, Paris, vol. 3, 1869, pp. 77-110.)
6-22. Plana, G. A. A., "Équation de la courbe formée par une lame élastique," *Memoirs of the Royal Society of Turin*, vol. 18, 1809-1810, pp. 123-155.
6-23. Born, M., "Untersuchungen über der Stabilität der elastichen Linie in Ebene und Raum unter verschiedenen Grenzbedingungen," Dissertation, Göttingen, 1906.
6-24. Oravas, G. A., "Historical Review of Extremum Principles in Elastomechanics," an introductory section (pp. xx to xlvi) of the book *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, by C. A. P. Castigliano, translated by E. S. Andrews, Dover Publications, Inc., New York, 1966.
（註：Castigliano的著作最先於 1879 年刊行於 Turin，其後於 1886 年譯成德文，於 1919 年譯成英文。英文本由E.S. Adrews 翻譯，其英文名稱爲"結構彈性應力學"（Elastic Stresses in Structures）由倫敦Scott, Greenwood, 及Son 出版發行。Dover 版乃英文譯本的翻版，但包

含了由 Oravas 所著歷史性質的介紹材料）。

6-25. See Ref. 1-3, pp. 401-412.

6-26. See Ref. 3-5, pp. 76-82.

6-27. Southwell, R. V., *An Introduction to the Theory of Elasticity*, 2nd Ed., Oxford University Press, London, 1941, pp. 429-436.

6-28. Frisch-Fay, R., *Flexible Bars*, Butterworth and Co., Ltd., 1962, 220 pages.

6-29. Eisley, J. G., "Nonlinear deformation of elastic beams, rings, and strings," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 16, no. 9, September 1963, pp. 677-680.

6-30. Reddick, H. W., and Miller, F. H., *Advanced Mathematics for Engineers*, 3rd Ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955, 548 pages.

6-31. Jahnke, E., and Emde, F., *Tables of Functions*, 4th Ed., Dover Publications, New York, 1945.

6-32. Belyakov, V. M., Kravtsova, P. I., and Rappoport, M. G., *Tables of Elliptical Integrals*, Part I, translated by P. Basu, The Macmillan Co., New York, 1965, 647 pages.

6-33. Fettis, H. E., and Caslin, J. C., *Tables of the Elliptic Integrals of the First, Second and Third Kind*, ARL 64-232, Aerospace Research Laboratories, Office of Aerospace Research, United States Air Force, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, December 1964, 93 pages.

6-34. Rojahn, C., "Large deflections of elastic beams," thesis for the degree of Engineer, Stanford University, June 1968.

6-35. Bisshopp, K. E., and Drucker, D. C., "Large deflection of cantilever beams," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 3, 1945, pp. 272-275.

6-36. Barten, H. J., "On the deflection of a cantilever beam," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 2, 1944, pp. 168-171, and *ibid.*, vol. 3, 1945, pp. 275-276.
（註：第二篇係改正第一篇中的錯誤）。

6-37. Rohde, F. V., "Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 11, 1953, pp. 337-338.

6-38. Kirchhoff, G. R., "Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 56, 1859, pp. 285-313.
（註：Gustav Robert Kirchhoff,（1824 - 1887） 爲一著名的德國物理學家，以電路網及版彎曲理論工作而著名於世）。

6-39. See Ref. 3-5, p. 77; Ref. 1-3, pp. 23-24 and 399-402; Ref. 1-2, Vol. II, Part II, pp. 65-66; and Ref. 6-27, p. 431.

7-1. Navier, L. M. H., *Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 1st Ed., 1826, 2nd Ed., 1833, 3rd Ed. (with notes and appendices by Saint-Venant), Paris, 1864.
（註：Navier 出版了前兩版本，第三版乃在 Navier 死後，由 Saint-Venant 完成。Saint-Venant 增加的材料，幾有 10倍原書之多。此一名著的討論見參考書 7-2）。

7-2. See Ref. 1-1, pp. 73-77, 232-233, and Ref. 1-2, Vol. I, pp. 144-146, Vol. II, Part I, pp. 105-135.

7-3. See Ref. 6-18, pp. 269-272.

7-4. See Ref. 1-1, pp. 144-146.

（註：B. P. E. Clapeyron,（1799 - 1864）爲法國工程師，他導出三力矩方程式以配合他的橋梁方面工作。在功及應變能方面的工作亦甚出名。三力矩方程式的Clapeyron 論文係在參考書 7 - 5 中引述。Bertot 爲一法國工程師，他是第一個用現代形式寫出三力矩方程式；見由參考書7-6 所引述的論文。Bertot 的論文刊行於 Clapeyron 之前，但Clapeyron 用此方法似乎早了幾年，實爲該方程式的眞正創始者，在參考書 1-1 中已經指出）。

7-5. Clapeyron, B. P. E., "Calcul d'une poutre èlastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés," *Comptes Rendus*, vol. 45, 1857, pp. 1076-1080.

7-6. Bertot, H., *Mémoires et compte-rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils*, vol. 8, 1855, p. 278.

7-7. Zaslavsky, A., "Beams on immovable supports," *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, vol. 25, 1965, pp. 353-362.

8-1. Timoshenko, S. P., "Use of stress functions to study flexure and torsion of prismatic bars," (in Russian), St. Petersburg, 1913 (reprinted in Vol. 82 of the *Memoirs of the Institute of Ways of Communication*).

（註：在該論文中，可求得梁截面中，一個集中力作用點，力作用在該點將不會產生旋轉。因之，此一工作先求剪力中心特殊梁乃爲實心半圓剖面；見參考書 8 - 2 。在 1909 年 C. Bach 作槽形梁試驗，發現，當作用於梁上的載重與梁腹平面平行時，扭轉卽會發生（參考書 8 - 3 及 8 - 4）。他亦觀察得當載重作側向移動時，旋轉卽會改變，但他顯然未定出剪力中心的位置。在 1917 年，A. A. Griffith 及 G. I. Taylor 使用肥皂 - 膜法（soap - film method）來硏究彎曲；他們定出幾種結構形狀截面上的剪力中心位置，但稱爲撓曲中心（flexural center）（參考書 8 - 5）。R. Maillart 導出開口截面薄壁構件剪力中心的一般近似解法，他亦解說了剪力中心的實際意義；見參考書 8 - 6 。此時 Maillart 亦曾介紹 "剪力中心" 的名字。對剪力中心觀念的發展作更進一步貢獻者，見參考書 8 - 7 至 8 - 16 所載。剪力中心以及梁彎曲及扭轉等問題的一般性說明及詳細討論見參考書 8 - 17 。對剪力中心的若干史跡可在參考書 8 - 18 至 8 - 19 中查出）。

8-2. See Ref. 1-10, pp. 371-373.

8-3. Bach, C., "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balkan mit [-förmigem Querschnitt," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, vol. 53, no. 44, 1909, pp. 1790-1795.

8-4. Bach, C., "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Trägern mit [-förmigem Querschnitt," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, vol. 54, no. 10, 1910, pp. 382-387.

8-5. Griffith, A. A., and Taylor, G. I., "The problem of flexure and its solution by the soap-film method," *Technical Report of the Advisory Committee for Aero-*

nautics, 1917-18, vol. 3, published in 1921 by His Majesty's Stationery Office, London, (Reports and Memoranda, No. 399, November 1917), pp. 950-969.
8-6. Maillart, R., "Zur Frage der Biegung," *Schweizerische Bauzeitung*, vol. 77, 1921, pp. 195-197; "Bemerkungen zur Frage der Biegung," *Ibid.*, vol. 78, 1921, pp. 18-19; "Ueber Drehung und Biegung," *Ibid.*, vol. 79, 1922, pp. 254-257; "Der Schubmittelpunkt," *Ibid.*, vol. 83, 1924, pp. 109-111; "Zur Frage des Schubmittelpunktes," *Ibid.*, vol. 83, 1924, pp. 176-177.
8-7. Weber, C., "Biegung und Schub in geraden Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 4, 1924, pp. 334-348.
8-8. Weber, C., "Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 6, 1926, pp. 85-97.
8-9. Schwalbe, W. L., "Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 15, 1935, pp. 138-143.
8-10. Trefftz, E., "Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 15, 1935, pp. 220-225.
8-11. Hill, H. N., "Torsion of flanged members with cross sections restrained against warping," *National Advisory Committee for Aeronautics*, Technical Note No. 888, March 1943.
8-12. Osgood, W. R., "The center of shear again," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 10, no. 2, June 1943, pp. A-62 to A-64 (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, vol. 65, 1943).
8-13. Mandel, J., "Détermination du centre de torsion à l'aide du théorème de réciprocité," *Annales des Ponts et Chaussées*, vol. 118, 1948, pp. 271-290.
8-14. Jacobs, J. A., "The centre of shear of aerofoil sections," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, vol. 57, 1953, pp. 235-237.
8-15. Duncan, W. J., "The flexural centre or centre of shear," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, vol. 57, 1953, pp. 594-597.
8-16. Koiter, W. T., "The flexural centre or centre of shear," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, vol. 58, 1954, pp. 64-65.
8-17. Timoshenko, S. P., "Theory of bending, torsion, and buckling of thin-walled members of open cross section," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 239, no. 3, March 1945, pp. 201-219, no. 4, April 1945, pp. 249-268, and no. 5, May 1945, pp. 343-361.
8-18. See Ref. 1-1, p. 401.
8-19. Nowinski, J. L., "Theory of thin-walled bars," *Applied Mechanics Surveys*, edited by Abramson, H. N., et al., Spartan Books, Washington, D.C., 1966, pp. 325-338.
9-1. Beedle, L. S., *Plastic Design of Steel Frames*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958, 406 pages.
9-2. Massonnet, C. E., and Save, M. A., *Plastic Analysis and Design*, Vol. 1, Blaisdell Publishing Co., New York, 1965, 379 pages.
9-3. Phillips, A., *Introduction to Plasticity*, Ronald Press Co., New York, 1956, 230 pages.
9-4. Phillips, A., "Bending of Beams," Chapter 47 of *Handbook of Engineering*

Mechanics, edited by W. Flügge, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962.

9-5. Hodge, P. G., Jr., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959, 364 pages.

9-6. Neal, B. G., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, Inc , New York, 1963, 358 pages.

9-7. Heyman, J., *Plastic Design of Portal Frames*, Cambridge University Press, 1957, 104 pages.

9-8. Symonds, P. S., "Limit Analysis," Chapter 49 of *Handbook of Engineering Mechanics*, edited by W. Flügge, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962.

9-9. Smith, J. O., and Sidebottom, O. M., *Inelastic Behavior of Load-Carrying Members*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965, 447 pages.

9-10. Symonds, P. S., and Neal, B. G., "Recent progress in the plastic methods of structural analysis," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 252, no. 5, November 1951, pp. 383-407, and no. 6, December 1951, pp. 469-492.

9-11. Beedle, L. S., et al., *Structural Steel Design*, Ronald Press Co., New York, 1964, 829 pages.

9-12. *Plastic Design in Steel*, published by the American Institute of Steel Construction, Inc., 101 Park Avenue, New York, N.Y., 10017, 1959.

9-13. Nadai, A., *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. 1, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1950, 572 pages.

9-14. *Commentary on Plastic Design in Steel*, Manuals of Engineering Practice, No. 41, American Society of Civil Engineers, 1961, 173 pages.

9-15. Baker, J. F., Horne, M. R., and Heyman, J., *The Steel Skeleton*, Vol. II, "Plastic Behavior and Design," Cambridge University Press, 1956, 408 pages.

9-16. Baker, J. F., "A review of recent investigations into the behaviour of steel frames in the plastic range," *Journal of the Institution of Civil Engineers*, vol. 31, no. 3, January 1949, pp. 188-224.

9-17. Baker, J. F., "The design of steel frames," *Structural Engineer*, vol. 27, no. 10, October 1949, pp. 397-431.

9-18. Greenberg, H. J., and Prager, W., "Limit design of beams and frames," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 117, 1952, pp. 447-458.

9-19. Beedle, L. S., and Tall, L., "Basic column strength," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 127, part II, 1962, pp. 138-172.

9-20. Huber, A. W., and Beedle, L. S., "Residual stress and the compressive strength of steel," *Welding Journal*, vol. 33, no. 12, December 1954, pp. 589-s to 614-s.

9-21. Yang, C. H., Beedle, L. S., and Johnston, B. G., "Residual stress and the yield strength of steel beams," *Welding Journal*, vol. 31, no. 4, April 1952, pp. 205-s to 229-s.

9-22. Horger, O. J., "Residual Stresses," Chapter 11 in *Handbook of Experimental Stress Analysis*, edited by M. Hetényi, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.

9-23. Barrett, C. S., "A critical review of various methods of residual stress measurement," *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, vol. II, no. 1, 1944, pp. 147-156.

10-1. Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd Ed.,

McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1961.

10-2. Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.

10-3. Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes . . . ," Appendix 1, "De curvis elasticis," Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744. (English translation: Oldfather, W. A., Ellis, C. A., and Brown, D. M., *Isis*, vol. 20, 1933, pp. 72-160. Also, republished in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 1, vol. 24, 1952.)

註：Leonhard Euler,（1707-1783）對數學及力學有很多價值的貢獻。也是一位空前多產數學家（參考書 6-4,120 頁），Newman稱他爲"數學界的英雄"（參考書 6-3,150 頁）。他的姓名常出現於現代教科書中；在力學方面，已讀到過Euler 剛體運動方程式，Euler角，Euler流動方程式，柱屈挫的Euler 載重等等。在數學方面，亦常讀到著名的Euler 常數，Euler 數，Euler 恒等式（$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 等），Euler 公式（$e^{i\pi}+1=0$），Euler 微分方程式，變分問題中的Euler 方程式，Euler 求積法公式，Euler 求和公式，Euler 齊次函數定理，Euler 積分，以及 Euler 方陣（具有某一性質的數字方陣排列）。

在應用力學中，Euler 是第一個導出理想細長柱的臨界挫屈載重公式，又爲第一個解得彈性體問題。他著有很多書，包括有天體力學、動力學、水力學等。他的論文亦包括有樑版振動等題目。

在數學方面，Euler 對於三角學、代數學、數論、微分及積分學、無窮級數、解析幾何、微分方程、振動微積分，以及其它題目，均有卓越的貢獻。他最先想出三角函數爲數的比值，第一個提出公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。有關數學著作中，全都是後幾代所據以參考的古典名著，他第一個發展出變分學以及解答甚多迷人問題如證明 n＝3 及 n＝4 時的 Fermat "最後定理"（last theorem）。他也解得很有名的Konigsberg 七橋問題（problem of seven bridges），該問題爲一拓樸學（topology）問題，所以在此一領域他亦爲其先知者。

Euler 生於瑞士的Basel附近，就讀於 Basel 大學，隨 John Bernoulli（1667-1748）作研究。從 1727 至 1741，他移居俄國聖彼得堡（St. Petersburg），在該處他獲得偉大數學家的美譽。1741年受到普魯士王佛萊杜克（Frederick）大帝的邀請前往柏林，直至 1766 年接受俄皇凱瑟琳（Catherine）二世邀請返回聖彼得堡繼續他的多產工作，死於聖彼得堡，享年 76歲。在他最後一段時間中，寫出論文超過400 篇。在他一生，寫作的書及論文總共有 886 篇；死後他留下很多手稿，這些手稿繼續由俄國科學院印行，共印了 47 年。Euler 於 1735 年一眼瞎去，另一眼瞎於 1766 年。在參考書 1-1，28-30 頁；參考書 6-3，148-151

頁中記述 Euler 一生小傳，他對力學的貢獻在參考書 1-1，30 - 36 頁有較詳的敍述。

10-4. Euler, L., "Sur la force des colonnes," *Histoire de L'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, 1757, published in *Memoires* of the Academie, vol. 13, Berlin, 1759, pp. 252-282.
（註：此一論文之翻譯及討論見參考書 10 - 5 ）。
10-5. Van den Broek, J. A., "Euler's classic paper 'On the strength of columns,'" *American Journal of Physics*, vol. 15, no. 4, July-August 1947, pp. 309-138.
10-6. Hoff, N. J., "Buckling and Stability," The Forty-First Wilbur Wright Memorial Lecture, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, vol. 58, January 1954, pp. 3-52.
10-7. Young, D. H., "Rational design of steel columns," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 101, 1936, pp. 422-451.
10-8. Johnston, B. G., editor, *Guide to Design Criteria for Metal Compression Members*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
10-9. *Manual of Steel Construction*, 7th Ed., published by the American Institute of Steel Construction, Inc., 101 Park Avenue, New York, N.Y., 10017, 1970, pp. 5-16 and 5-17.
10-10. *ALCOA Structural Handbook*, published by the Aluminum Company of America, Pittsburgh, Pennsylvania, 1960.
11-1. Maxwell, J. C., "On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames," *Philosophical Magazine*, series 4, vol. 27, 1864, pp. 294-299. (Republished in *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge University Press, Vol. 1, 1890, pp. 598-604; see Ref. 11-3.)
（註：James Clerk Maxwell，(1831 - 1879) 在此論文中，他導出求彈性桁架撓度的單位 - 載重法。此法亦包括求靜不定桁架中贅餘力交互位移定理及韌性法。十年後，Otto Mohr 再發現求撓度 Maxwell 法，參考書 11-4，亦發現 Maxwell 求靜不定桁架中贅餘力方法，參考書 11-13。在結構力學中，Maxwell 完成了其它很重要的工作，包括有應力分析用光彈性法的發展。他在彈性理論中亦作了很多研究。有關他工作敍述及小傳見參考書 1-1，202 - 208 與 268 - 275 頁。當然，Maxwell 對光學、氣體動力學、電學及磁學等科學方面的工作，極為出名。此一著名數學及物理學家的傳記見參考書 11 - 2 ）。
11-2. Campbell, L., and Garnett, W., *The Life of James Clerk Maxwell*, Macmillan and Co., London, 1882.
11-3. Maxwell, J. C., *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Vols. 1 and 2, edited by W. D. Niven, Cambridge University Press, 1890.
11-4. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger," *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, vol. 20, no. 2, 1874, pp. 223-238.
（註：本論文是介紹求桁架撓度的單位 - 載重法）。
11-5. Betti, E., "Teoria della Elasticita," *Il Nuovo Cimento*, series 2, vols. 7 and 8,

1872.
（註：Enrico Betti,（1823-1892）爲意大利數學家及工程師）。
11-6. Rayleigh, Lord, "Some general theorems relating to vibrations," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 4, 1873, pp. 357-368. (Republished in *Scientific Papers*, by John William Strutt, Vol. 1, Cambridge University Press, 1899, pp. 170-181.)
註：該論文中萊利（Rayleigh）爵士使用作用於兩不同點的諧和變力的振動系統，介紹交互定理。他利用兩力，且使各力的作用時間變成無限大時，求得了靜力交互功定理。在 1874 及 1875 年刊行的論文中（參考書 11-7），Rayleigh 得到了韌性及勁性兩者的交互定理，但他未使用此一名詞。其後他在 1877 年出版的"聲學"（The theory of sound）一書中（參考書 11-8），作了明白的敍述，並導出兩組相應力及位移的交互功定理，每一組力包括了任意力數。

Rayleigh 爵士（1842-1919）乃 John William Strutt 之子，爲一著名的英國物理學家。他最有名的是聲、光及電學方面的研究。聲學爲其名著，亦爲至今仍廣泛使用的古典著作。他的科學論文計有六册，且已發行兩次（參考書 11-9 及 11-10）。Rayleigh爵士曾就讀於劍橋大學的三一學院，受到數學家 E. J. Routh 及 G. G. Stockes 的指導。除理論研究外，他又完成很多實驗工作。1879 年，他成爲劍橋凱文廸希實驗所教授，其後擔任英國皇家學院自然哲學教授，並協助創立國立物理實驗所。於1908年航空顧問委員會成立時，擔任委員會終生主席。此外，Rayleigh 爵士於 1905 年至 1908 年擔任英國皇家學會會長。從 1908 年任劍橋大學校長終生。他獲得很多勳獎，包括在 1902 年的有功勳章、1904 年得諾貝爾物理獎。在他許多很重要發現中，第一個解釋爲什麼天空是藍色的。Rayleigh 曾兩次訪問美國，第二次是在 1844 年，參加Kelvin 爵士的著名"Baltimore 講座"。參考書1-1，11-8，11-11及11-12 皆記載有 Rayleigh 爵士的生平傳記。

Biographies of Lord Rayleigh can be found in Refs. 1-1, 11-8, 11-11, and 11-12.)
11-7. Rayleigh, Lord, "A statical theorem," *Philosophical Magazine*, 4th series, vol. 48, 1874, pp. 452-456; 4th series, vol. 49, 1875, pp. 183-185. (Republished in *Scientific Papers*, by John William Strutt, Vol. 1, Cambridge University Press, 1899, pp. 223-229.)
11-8. Strutt, John William (Baron Rayleigh), *The Theory of Sound*, Vols. 1 and 2, 2nd Ed., Dover Publications, Inc., 1945.
（註：此一著作包括有 Robert Bruce Lindsay 所作的歷史介紹及生平小傳。原本第一卷第一版係在 1877 年發行，卷2 在 1878 年發行。原本第二版卷 1 在 1894 年發行，卷 2 在 1896 年發行；皆由倫敦Macmillan 公司出版）。
11-9. Strutt, John William (Baron Rayleigh), *Scientific Papers*, Cambridge University

Press, Vol. 1, 1899; Vol. 2, 1900; Vol. 3, 1902; Vol. 4, 1903; Vol. 5, 1912; Vol. 6, 1920. (Republished in 1964 by Dover Publications, Inc.; see Ref. 11-10.)

11-10. Rayleigh, Lord, *Scientific Papers*, Dover Publications, Inc., New York, 1964.
(由劍橋大學出版社於 1899 年至 1920 年出版共六卷，複印本僅裝訂成三本)。

11-11. Strutt, Robert John (Fourth Baron Rayleigh), *John William Strutt, Third Baron Rayleigh*, Edward Arnold and Co., London, 1924, 403 pages. (A biography of Lord Rayleigh by his eldest son.)

11-12. Strutt, Robert John (Fourth Baron Rayleigh), *Life of John William Strutt, Third Baron Rayleigh*, University of Wisconsin Press, 1968, 439 pages.
(係根據 Edward Arnold 公司於 1924 年發行原版傳記的複印本，包括了很多作者註解及 John N. Howard 前言)。

11-13. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie des Fachwerks," *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, vol. 20, no. 4, 1874, pp. 509-526, and vol. 21, no. 1, 1875, pp. 17-38.
(註：此篇論文介紹靜不定桁架的韌性法)。

11-14. Gere, J. M., and Weaver, W., Jr., *Analysis of Framed Structures*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1965, 475 pages.

11-15. Timoshenko, S. P., and Young, D. H., *Theory of Structures*, 2d Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1965, 629 pages.

11-16. Norris, C. H., and Wilbur, J. B., *Elementary Structural Analysis*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960, 651 pages.

11-17. Hall, A. S., and Woodhead, R. W., *Frame Analysis*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967, 329 pages.

11-18. Borg, S. F., and Gennaro, J. J., *Modern Structural Analysis*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969, 455 pages.

11-19. Martin, H. C., *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1966, 331 pages.

11-20. Gere, J. M., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1963, 378 pages.

11-21. Weaver, W., Jr., *Computer Programs for Structural Analysis*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1967, 300 pages.

11-22. Clebsch, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, 1862, 424 pages.
(註：Alfred Clebsch, (1833 - 1872) 爲一德國數學家，對力學發展，頗多貢獻)。

11-23. Bendixen, A., *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*, Berlin, 1914.
(註：在本書裡，Axel Bendixen介紹應用於平面構架的勁性法，即傾角撓度法。以節點旋轉爲未知量)。

11-24. Ostenfeld, A., *Die Deformationsmethode*, Springer, Berlin, 1926, 118 pages.

11-25. Castigliano, A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, published by A. F. Negro, Turin, 1879, 480 pages.
(註：這本書裡，Castigliano 很完整的介紹許多結構分析觀念及原理。Castigliano 爲義大利人，但用法文寫出，爲了能獲得讀他著作的更多讀者。此書後譯成德文與法文，參考書 11 - 26 及 11 - 27。英文版於 1

966 年由Dover 公司復印發行，因加入Gunnard A. Oravas 的介紹資料而更具價值，見參考書 11-28 及 6-24 。

Castigliano 第一及第二定理載於該書 1966 年版中的 15-16 頁。他稱為"內功微分係數定理（Theorem of the differential coefficien of the internal work）"第一部分及第二部分。他解釋該等定理如下：

"第一部分：如一構架的內功可以作用於構架各節點處的各外力的相對變位函數表示，該式對該等變位微分係數示出相應各個力值。"

"第二部分：就反向觀點，一構架的內功，可用各外力的函數表示，該式所示出的微分係數為各力作用點處的相對位移"。

這些建議，通常稱為Castigliano 第一及第二定理，陳述此一定理後，Castigliano 繼續他的工作，應用到很多情況。在數學形式，該等定理在其書中出現的樣式是

$$F_p = \frac{dW_i}{dr_p} \quad 及 \quad r_p = \frac{dW_i}{dF_p}$$

式中 W_i 表內功（或應變能）。F_p 表示各外力中的任一個力，r_p 為 F_p 作用點的位移。

Castigliano 的第一定理並不能稱為純粹原版，雖然在他原著前言中所陳述，他的貢獻及證明較以往所刊行者更具一般性。第二定理則完全由他導出。當時他在 1873 年時，在 Turin 工技學院（Polytechnic Institute）得土木工程師學位論文的一部分；見參考書 11-29 。

"最小功原理"乃由 Castigliano 在 1873年刊行的論文中證明，亦載於該書中。有關 Castigliano 及 Menabrea 間對此原理的爭論故事，係由 Oravas 於 1966版中的導言中敍述，參考書 11-28 。

Carlo Alberto Pio Castigliano 於 1847 年生於 Asti 地方一貧窮家庭中。死於早期肺炎，其時為1884 年，享年僅 37 歲，生平故事由Oravas 於 1966 年版導言中予以介紹，該書又記載Castigliano 的傳記及其所獲榮譽及獎賞表。他的貢獻亦在參考書 1-13, 1-1 及 11-30 等書中表明。

11-26. Hauff, E., *Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und deren Anwendung*, published by Carl Gerold's Sohn, Vienna, 1886. (A translation of Castigliano's book, Ref. 11-25.)

11-27. Andrews, E. S., *Elastic Stresses in Structures*, Scott Greenwood and Son, London, 1919. (A translation of Castigliano's book, Ref. 11-25.)

11-28. Castigliano, C. A. P., *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, translated by E. S. Andrews with a new introduction and biographical portrait section by G. A. Oravas, Dover Publications, Inc., New York, 1966. (A republication of Ref. 11-27.)

11-29. Castigliano, A., "Intorno ai sistemi elastici," thesis presented to the Reale Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino for the civil engineering degree in 1873, published by Vincenzo Bona, Turin, 1873, 52 pages.

11-30. Grüning, M., "Theorie der Baukonstruktionen," *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaft*, Leipzig, Vol. 4, Part 4, 1907-1914, pp. 419-534.

11-31. Kirchhoff, G. R., "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, 1850, pp. 51-88.

(註：Kirchhoff 在此論文中，使用固定位能觀念導出板的彎曲基本微分方程式。在後一論文中，參考書 6-38 ，他更發展出固定位能觀念。有關其傳記資料，見參考書1-1 ，252-255 頁)。

11-32. Au, T., *Elementary Structural Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963, 521 pages.

11-33. Hoff, N. J., *The Analysis of Structures*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1956, 493 pages.

11-34. Oden, J. T., *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1967, 381 pages.

11-35. Ritz, W., "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 135, 1908, pp. 1-61.

(註：Walther Ritz, (1878-1909)爲瑞士物理學家，但不幸享年僅31歲。他的論文在參考書11-36 中複印，並包含他的傳記)。

11-36. Ritz, W., *Gesammelte Werke*, Gauthier-Villars, Paris, 1911, 541 pages.

11-37. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., London, 1967, 272 pages.

11-38. Crotti, F., "Esposizione del Teorema Castigliano e suo raccordo colla teoria dell' elasticità," *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Milano*, vol. 11, sect. 4, part 2, 1878, p. 225. (Also published in *Il Politecnico*, vol. 27, 1879, p. 45.)

(註：Francesco Crotti, (1839-1896)爲義大利的鐵路工程師，爲Castigliano 之友。在此論文中，他首先導出Crotti－Engesser定理，以後關於補能研究更較廣泛。Crotti 於 1877 年開始，在一連串的論文中，大部屬於補能的基本定理及原理的系統化，見參考書 11-39。Crotti 的工作係在參考書 1-13 之 922-925 頁及參考書 6-24中敘述。有關Crotti 的簡短生平係由Oravas 在參考書 6-24 中，略有敘述。

11-39. Crotti, F., *La Teoria dell' elasticita né suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*, Ulrico Hoepli, Milan, 1888.

11-40. Engesser, F., "Ueber statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungs—Gesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit," *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, vol. 35, 1889, pp. 733-744.

（註：在此論文中，Friedrich Engesser,（1848 - 1931）介紹"補功"名詞及導出Crotti - Engesser 定理，他顯然未得出Crotti 的更一般性方法；見參考書1-3。參考書6-24。Engesser為德國鐵路工程師，其後作了Karlsruhe Polytechnic Institute 教授。他對結構力學作了很多貢獻，尤其是對柱非彈性挫屈之功的研究，更為有名。他的傳記資料見參考書1-1）。

11-41. Westergaard, H. M., "On the method of complementary energy," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 107, 1942, pp. 765-793.

11-42. Langhaar, H. L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962, 350 pages.

11-43. Argyris, J. H., and Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth and Co., Ltd., London, 1960, 85 pages.

11-44. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1968, 468 pages.

11-45. Charlton, T. M., "Analysis of statically-indeterminate structures by the complementary energy method," *Engineering*, vol. 174, 1952, pp. 389-391.

11-46. Brown, E. H., "The energy theorems of structural analysis," *Engineering*, vol. 179, 1955, pp. 305-308, 339-342, and 400-403.

11-47. Libove, C., "Complementary energy method for finite deformations," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 90, no. EM6, December 1964, pp. 49-71.

11-48. Oran, C., "Complementary energy method for buckling," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 93, no. EM1, February 1967, pp. 57-75.

11-49. Oran, C., "Complementary energy concept for large deformations," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Structural Division, vol. 93, no. ST1, February 1967, pp. 471-494.

11-50. Westergaard, H. M., *Theory of Elasticity and Plasticity*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1952, 176 pages.

11-51. Westergaard, H. M., "One hundred fifty years advance in structural analysis," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 94, 1930, pp. 226-240.

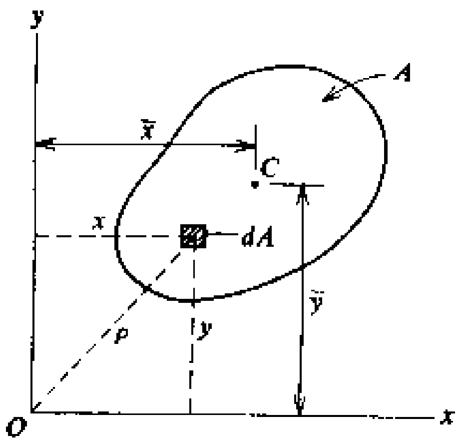
11-52. Ménabréa, L. F., "Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques," *Comptes Rendus*, vol. 46, 1858, pp. 1056-1060.

（註：在此篇論文中，Menabrea 公開陳述，桁架桿件贅餘力具有使應變能為極小值的觀念，但他未正確證明此一觀念。見參考書6-24，參考書1-13及參考書1-1。Luigi Frederico Menabrea,（1809 - 1896）為義大利的貴族、將軍及工程師。參考書6-24記載有他的傳記）。

附錄A　平面面積諸性質

A.1 面積之形心

爲決定面積之形心坐標，先設定其面積爲 A，與 x，y 坐標制如圖A



圖A・1　含重心 C 之平面

－1所示。取一面積元件爲 dA 。其坐標爲 x，y 如圖。總面積 A 可用下列之積分式求得之

$$A=\int dA \tag{A-1}$$

該面積之形心，距離 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$，可用下列兩式定得

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{\int dA} \qquad \bar{y}=\frac{\int y\,dA}{\int dA} \tag{A-2a,b}$$

需要知道，這些積分的運算一定要用全部的面積 A。

在（$A-2\cdot a$，b）式中的分子是表示該面積的「一次矩」（first moment），用 Q 來代表。如是，我們可得

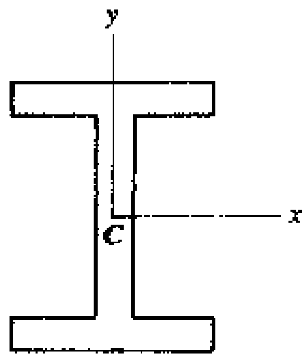
$$Q_x=\int y\,dA \qquad Q_y=\int x\,dA \tag{A-3a,b}$$

此處 Q_x 爲對 x 軸所起的一次矩 Q_y，爲對 y 軸所起的一次矩。用這

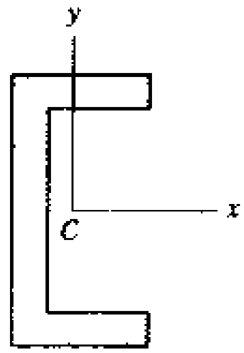
種記號，吾們可將重心的坐標公式改寫成

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A} \qquad \bar{y}=\frac{Q_x}{A} \tag{A-4a,b}$$

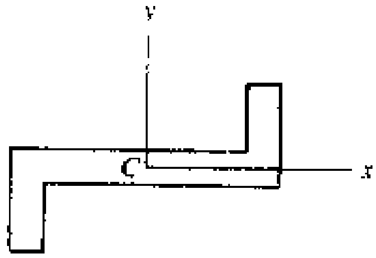
不論何時，若面積的周圍能用簡單的分析式來表示，我們可用（ A–1 ）和（ A－3 ）的諸式來求閉合圖形的積分值，再用（ A－4 ）諸式以定形心的位置。



圖A・2



圖A・3



圖A・4

有若干種情形，其形心位置可用觀察法定出。例如，一個具有兩根對稱軸的面積（見圖A－2 ），其形心就在兩軸的交點上。若僅有一軸成對稱的面積（見圖A－3 ），該形心在軸上的某點，其另一坐標距離C，要用算式來推求。最後，若該面積對某一點成對稱（雖無對稱軸），則該點就是該面積的形心。（見圖A－4 ）

在附錄B中，附有一張表，臚列所有各種形狀的平面圖形的形心位置諸算式。

若平面圖，是由不規則的曲線所圍成，吾們可將面積劃分成若干小的面積元件ΔA，而以總和代替積分：即

$$A=\sum\Delta A \qquad Q_x=\sum y\,\Delta A \qquad Q_y=\sum x\,\Delta A \tag{A-5a,b,c}$$

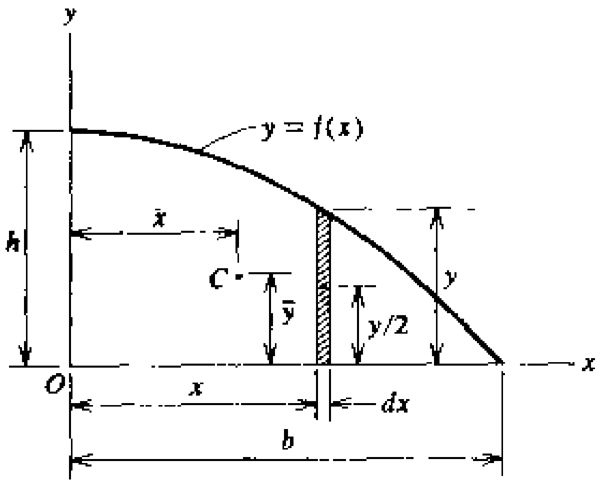
將（ A－5，a，b，c ）諸式中所得的總和，分別代入（ A－4 ）諸式，即可求得$\bar{x}$與$\bar{y}$。用以上的方法算得的結果，若所取的面積元件ΔA不過大時，將得一良好的近似值。

【例題】 試求圖A－5所示的拋物線與兩軸圍成的面積A，一次矩Q_x與Q_y，和形心C。拋物線的公式是

$$y=f(x)=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

圖上一條用斜線來表示的面積元件dA，其面積為

$$dA=y\,dx=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx$$



圖A・5 例題

總面積爲

$$A=\int dA=\int_0^b h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{2bh}{3}$$

用斜線來表示的面積元件的形心坐標爲 x 和 $\frac{y}{2}$ 。故對兩軸的一次矩分別爲

$$Q_x=\int\frac{y}{2}dA=\int_0^b\frac{h^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^2dx=\frac{4bh^2}{15}$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int_0^b xh\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{b^2h}{4}$$

最後得形心的坐標

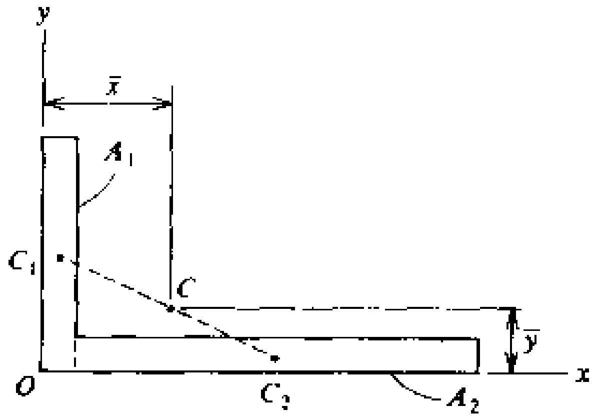
$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{3b}{8}\qquad\bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{2h}{5}$$

A.2 組合面積之形心

在工程實用上，吾們時常遇到由若干個面積組合而成的組合面積，各個面積具有常遇的幾何圖形，故其面積與形心位置均爲已知。例如圖 $A-2$ ，$A-3$ ，$A-4$ 等所示，均爲組合面積，每個組合面積均由各種矩形所合成。要計算其面積和形心位置，只需將組合面積分成若干個適宜的分面積，然後用求和法來代替積分法。

爲說明此種方法，取如圖 $A-6$ 所示之組合面積。此組合面積可分成兩個矩形，其面積分別爲 A_1 與 A_2 ，其形心分別爲 C_1 與 C_2 ，其位置假定爲已知，以 x_1 ，y_1 表示 C_1 的坐標，以 x_2 ，y_2 表示 C_2 的坐標，我們由此可得該組合面積之形心 C 的坐標列式如下

$$\bar{x}=\frac{x_1A_1+x_2A_2}{A_1+A_2}\qquad\bar{y}=\frac{y_1A_1+y_2A_2}{A_1+A_2}$$



圖A・6 組合面積之重心

將上列改成一般化，可用下列諸式中的分面積性質求任何組合面積諸性質的數值：

$$A=\sum A_i \qquad Q_x=\sum y_i A_i \qquad Q_y=\sum x_i A_i \qquad \text{(A-6a,b,c)}$$

上式中的 A_i 表示某一分面積，其形心坐標爲 x_i 與 y_i ，而其總和包括所有該組合面積中的一切分面積。這些公式對不拘數量的分面積，均屬正確有效。如圖 $A-6$ 所示的兩個分面積組成的一種情形，其全面積的形心 C 常在兩個分面積重心 C_1 與 C_2 連成的直線上。

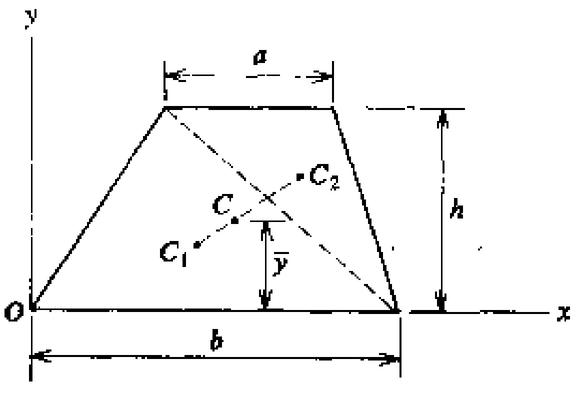
【例題】 求梯形之重心 C 的 $\bar{y}$ 的座標，已知底寬爲 b ，頂寬爲 a ，高度爲 h（見圖 $A-7$ ）。

將梯形劃分成兩個三角形，其重心分別爲 C_1 與 C_2 。吾們可知此兩個形心的 y 坐標分別爲

$$y_1=\frac{h}{3} \qquad y_2=\frac{2h}{3}$$

又，這兩個三角形的面積分別爲

$$A_1=\frac{bh}{2} \qquad A_2=\frac{ah}{2}$$



圖A・7 例題

由公式（ $A-6$ ）得

$$A=\frac{h}{2}(b+a) \qquad Q_x=\frac{h^2}{6}(b+2a)$$

最後得

$$\bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{h(b+2a)}{3(b+a)}$$

若 $a=b$，則梯形成爲矩形，由上式得 $\bar{y}=h/2$ 若 $a=0$，則梯形成爲三角形，由上式得 $\bar{y}=h/3$

A.3 面積之慣性力矩

平面面積（見圖 $A-1$ ）對 x 及 y 軸之慣性力矩（ moment of inertia ），分別定義如下列之積分式

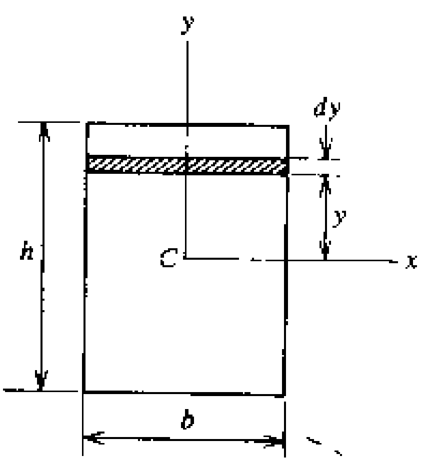
$$I_x=\int y^2\,dA \qquad I_y=\int x^2\,dA \tag{A-7a,b}$$

在上列兩式中，取面積元件 dA 乘對應軸距離之平方，再求其全面積 A 的積分。慣性力矩有時稱爲面積之二次矩（ second moment ）。

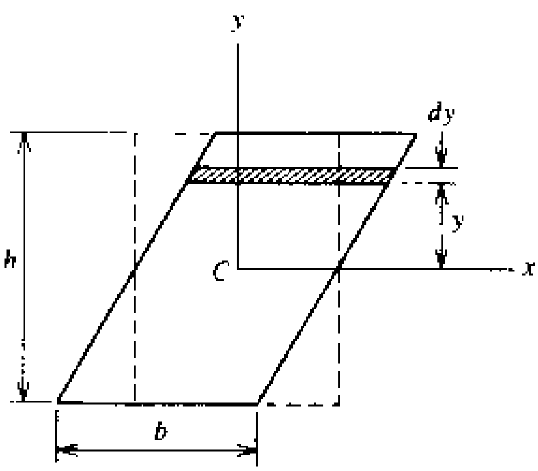
有若干簡單圖形，其慣性矩可用分析法算得。例如以矩形面積（圖 $A-8$ ）爲例，求對 x 軸所起之慣性力矩，此時 x 軸是通過對稱軸上之形心 C 點。我們將矩形分切成若干微小面積元件如圖上所示的斜線部分面積。由此可得 $dA=b\,dy$ ，與

$$I_x=\int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\,dy=\frac{bh^3}{12} \tag{A-8}$$

同樣，可求該矩形面積對 y 軸所起之慣性力矩 $I_y=hb^3/12$

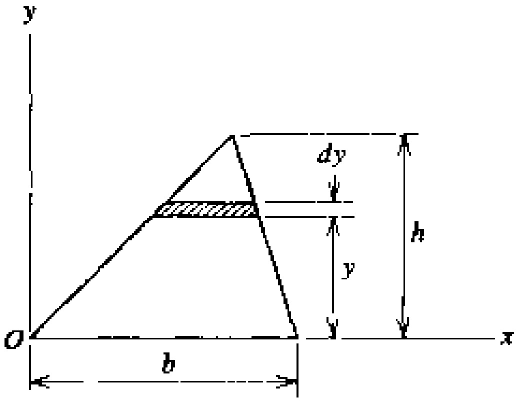


圖A・8



圖A・9

公式（$A-8$），亦可適用於計算平行四邊形之I_x如圖$A-9$所示。此平行四邊形對x軸作平行移動改成虛線的矩形。此時，圖上有斜線部分的面積元件，雖經移動但其面積與對x軸的距離並無改變，因之該平行四邊形的I_x與改換成矩形後的相同。



圖A·10

在計算三角形對其底邊所起的慣性力矩（圖$A-10$），吾們可同樣將面積細分成若干條面積元件，每一元件的面積為

$$dA=\frac{b(h-y)\,dy}{h}$$

由（$A-7a$）式得

$$I_x=\int_0^h\frac{b(h-y)}{h}y^2\,dy=\frac{bh^3}{12}\qquad\text{(A-9)}$$

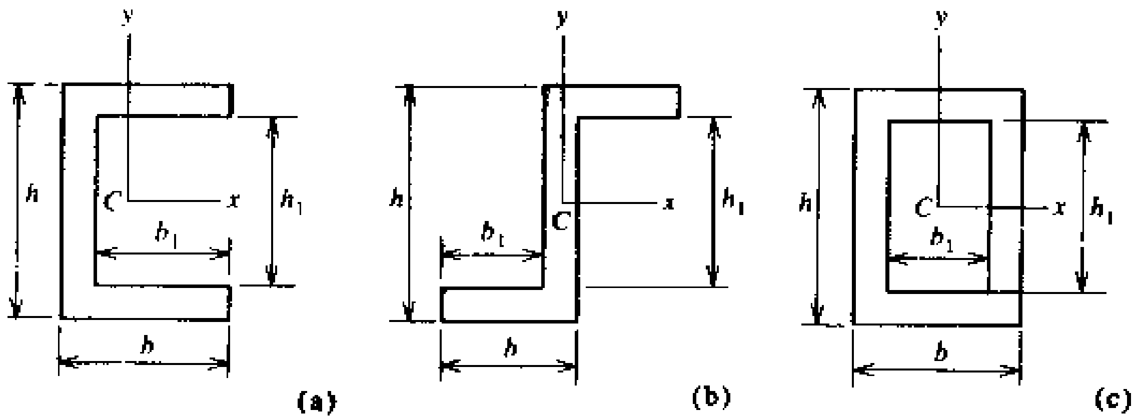
以上所示各例中的計算方法，在理論上可適用在大多數的一般情況。慣性力矩是將面積先分成若干條與軸平行的面積元件，然後求其積分。若積分工作不能用分析方式求出時，可將面積先分成若干小面積，再將該小面積至某軸距離的平方相乘積分別求出而總和之，即得其近似的慣性力矩

若干常見的面積的慣性力矩分別列表如附錄B所示，以供參考。

對某軸所起的慣性力矩的計算，若該面積能分成若干個已知慣性力矩式的分面積，則計算將甚簡單。例如圖$A-11a$之槽形斷面，求對x軸所起的慣性力矩，此x軸乃為經過形心C的對稱軸，故等於兩個矩形慣性力矩之差。由此得

$$I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{b_1h_1^3}{12}$$

同樣的公式，顯然的亦能適用於Z形斷面（圖$A-11b$）和中空箱形斷面（圖$A-11C$）的計算。



圖A・11

由慣性力矩之定義（$A-7$）式。吾們可知，爲其長度單位之四次幕。因之當面積的慣性力矩被面積所除，其商將爲長度單位之二次幕。將商開方得方根值，稱爲該面積之旋轉半徑（radius of gyration），簡稱爲旋徑。以 r 來代表得

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{A-10a,b}$$

上式中之 r_x 與 r_y 分別代表對 x 軸與 y 軸之旋轉半徑。

A.4 極慣性力矩

對平面成垂直之軸的平面慣性力矩，謂之極慣性力矩（polar moment of inertia）。被定義爲下列的積分式。

$$J = \int \rho^2 \, dA \tag{A-11}$$

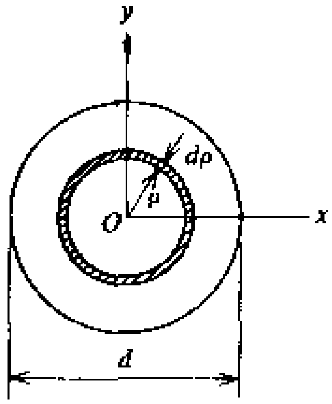
其中每一面積元件 dA（圖 $A-1$）對軸與平面相交點 O 之距離的平方相乘積。此時（$A-11$）式是按整個面積 A 而積分的。

依圖 $A-1$，吾們可得　$\rho^2 = x^2 + y^2$，因之由（$A-11$）式得

$$J = \int (x^2 + y^2) \, dA = I_x + I_y \tag{A-12}$$

上式說明了，對任一點 O 的極慣性力矩，是等於以交點 O 的 xy 兩軸所起之各慣性力矩和。

茲就一圓面積對其中心所起的極慣性力矩（圖 $A-12$）之計算。設將圓面積分成若干微小圓環，其寬度爲 $d\rho$，半徑爲 ρ。由此可知圓環的面積爲 $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$，依極慣性力矩之定義，對其中心所起者爲 $2\pi\rho^3 d\rho$。求整個面積對其中心所起之極慣性力矩，可就整個面積積分之即得。



圖A・12

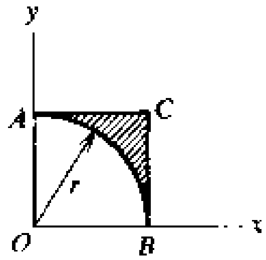
$$J = \int_0^{d/2} 2\pi\rho^3\, d\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \qquad \text{(A-13)}$$

上式中之 d 爲圓的直徑，r 爲圓的半徑。

已知圓面積對其中心所起之極慣性力矩，我們將很容易得到對其直徑所起的慣性力矩。因爲對其所有直徑的慣性力矩均爲相等，故從（$A-12$）式得

$$I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} \qquad \text{(A-14)}$$

四分一圓的（圖$A-13$之OAB面積）極慣性力矩，是等於全圓所起



圖A・13

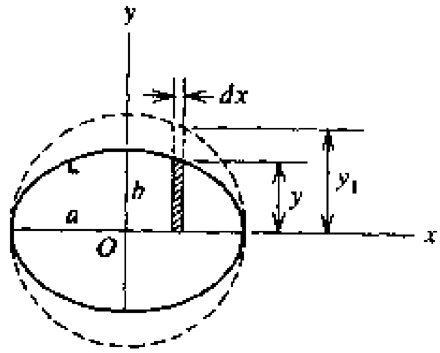
的四分之一，即$\pi r^4/8$。而四分一圓對 x 或 y 軸所起的慣性力矩，由此可得各爲

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$$

此外如圖$A-13$所示之圓拱腔ACB，對 x 軸（或 y 軸）之慣性力矩，可由正方形$OACB$的慣性力矩減去四分一圓的慣性力矩之差，即

$$I_x = I_y = \frac{r^4}{3} - \frac{\pi r^4}{16} = \frac{r^4}{48}(16 - 3\pi) = 0.137r^4$$

該圓拱腔對O點的極慣性力矩，將等於I_x或I_y的兩倍。



圖A-14

橢圓對其重心主軸 x（見圖 $A-14$）的慣性力矩，可較比圖上虛線圓求得之。此時橢圓上附有斜線的面積元件之高度爲 y，可由其相當的虛線圓之高度減去高度 y，而得 b/a 之比，此處 a 與 b 分別爲橢圓的長短半徑之長度。由（$A-8$）式，此兩種面積單元對 x 軸所起的慣性力矩比爲 b^3/a^3。

故橢圓與正圓的慣性力矩，很顯然的是具有以上所得的相同比例。因之橢圓對 x 軸的慣性力矩式爲

$$I_x = \frac{\pi a^4}{4}\left(\frac{b^3}{a^3}\right) = \frac{\pi ab^3}{4} \tag{A-15a}$$

同樣，我們可求得對 y 軸的慣性力矩式爲

$$I_y = \frac{\pi ba^3}{4} \tag{A-15b}$$

最後，橢圓面積對其重心 O 所起的極慣性力矩爲

$$J = I_x + I_y = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2) \tag{A-16}$$

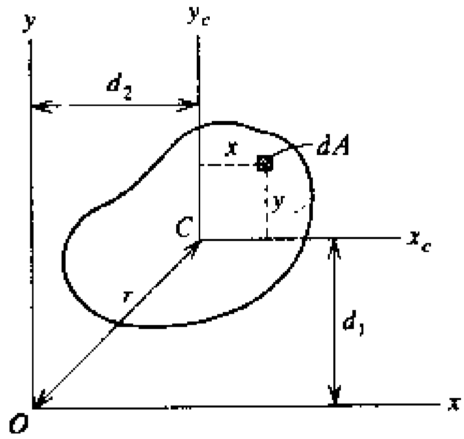
A.5 平行軸定理

平面面積對某軸所起的慣性力矩，可由對其形心的平行軸之慣性力矩，依平行軸定理（parallel axis theorem）定得之。

爲求證該定理，先取圖 $A-15$ 之面積。假定 C 點爲該面積的形心，並爲 x_c 與 y_c 軸的交點。另外的 x 與 y 軸分別與 x_c 與 y_c 軸平行相交於原點 O。依慣性力矩之定義，該面積對 x 軸所起的慣性力矩式爲

$$I_x = \int (y + d_1)^2\, dA = \int y^2\, dA + 2d_1 \int y\, dA + d_1^2 \int dA$$

右側第一個積分式爲對 x_c 軸的慣性力矩 I_{x_c}，第二個積分式，因 x_c 軸是經過形心其值爲零，第三個積分式是等於該圖的面積。由上式可簡化成



圖A・15 平行軸定理

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2 \tag{A-17a}$$

同樣手續可得

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2 \tag{A-17b}$$

此（$A-17a$）式，是表示求慣性力矩用的平行軸定理。這定理是說：一個面積對該平面內任一軸所起的慣性力矩，等於經過該面積形心的平行軸之慣性力矩，加上該面積與兩軸間距離的平方和。

次將（$A-17a$）與（$A-17b$）兩式相加，並由觀察可得 $r^2 = d_1^2 + d_2^2$（見圖$A-15$）

$$I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} + A(d_1^2 + d_2^2)$$

或

$$J_0 = J_c + Ar^2 \tag{A-18}$$

這是極慣性力矩的平行軸定理：這定理是說：某面積對同平面上任一點O所起的極慣性力矩，等於該面積對其形心C的極慣性力矩加該面積乘OC間距離的平方積。

利用平行軸定理，吾們可求得各種平面圖形的慣性力矩。例如，求矩形對其底邊所起的慣性力矩（見圖$A-8$）

$$I_{base} = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

同樣，求圓對其切線所起的慣性力矩

$$I_t = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{5\pi d^4}{64}$$

圓對其圓周上任一點所起的極慣性力矩

$$J = \frac{\pi d^4}{32} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3\pi d^4}{32}$$

三角形（見圖$A-10$），由（$A-9$）式可得對其底邊所起的慣性力矩

$$I_{x_c}=\frac{bh^3}{12}-\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2=\frac{bh^3}{36}$$

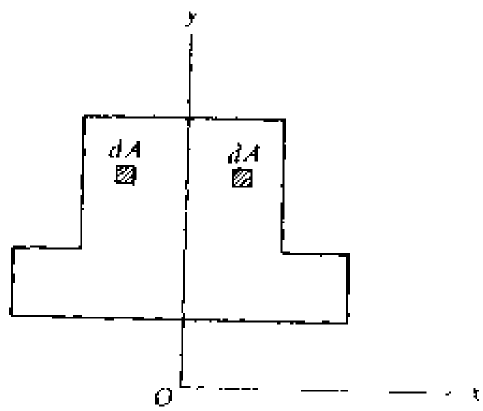
此平行軸定理，最適宜用於求出組合面積如圖$A-6$與$A-11$諸圖形。假定圖$A-11\ b$之面積的形心C已定出，求該面積對其重心所起的慣性力矩I_x。吾們先將原圖分成三個矩形，然後將各個矩形的形心定出，次用（$A-8$）式分求各矩形與x軸成平行的形心軸之慣性力矩，再用平行軸定理分別計算諸矩形對x軸所起的慣性力矩而求其總和，即得整個面積的慣性力矩I_x。

A.6 慣性積

平面面積對x與y軸（見圖$A-1$）的慣性積（product of inertia），依下列之積分式定義之。

$$I_{xy}=\int xy\,dA \tag{A-19}$$

上式中每一面積單元dA乘該單元的坐標之積，復按其總面積積分之。雖然，慣性力矩全是正值，但由（$A-19$）式可知，慣性積可能為正，或為負，或為零。將依其面積所處於xy軸的坐標而定。若面積全在坐標軸的第一象限內，如圖$A-1$之情形，則其慣性積為正，因所有面積元件ΔA的xy坐標地為正數。若面積落在第二象限，則慣性積將為負值。因所有面積元件的y坐標均為正，x坐標均為負。同樣，落在第三象限及第四象限的面積，其慣性積將分別為正及負。若面積佔在一個象限以外，則依面積的分佈在那個象限而定其慣性積為正或為負。



圖A・16

一種特殊情形，當兩軸中的任一軸爲該面積之對稱軸，如圖 $A-16$所示。該面積以 y 軸爲其對稱軸。如是每一面積元件 ΔA 各有正的 y 坐標存在着相等而對稱，但 x 爲負的坐標。由此 $xydA$之積，均被對消而致 $A-19$式爲零。由此可得一結論。凡面積對兩軸中的任一軸成對稱者，其慣性積爲零。

參閱圖 $A-11\,a$，c，可見這些面積對 x，y軸的慣性積均爲零。但圖 $A-11\,b$之圖形，上述的結論是不成立的。

茲假定一對重心軸 x_c，y_c的慣性積 $I_{x_cy_c}$（見圖 $A-15$）爲已知，則對另一組平行軸 x，y所起的慣性積，可用下式求得之。

$$I_{xy}=\int(x+d_2)(y+d_1)\,dA$$

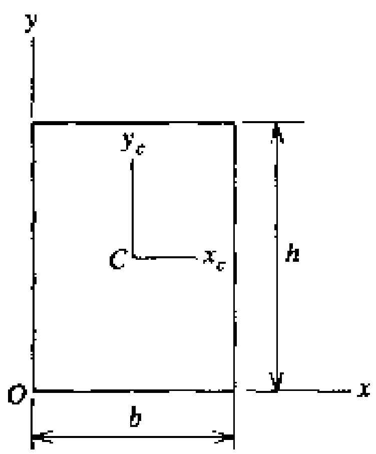
$$=\int xy\,dA+d_1\int x\,dA+d_2\int y\,dA+d_1d_2\int dA$$

最後式中的第一個積分是對其自身形心軸所起的慣性積爲 $I_{x_cy_c}$，第二項與第三項均爲零，因兩軸均經過其重心，最後一項積分是面積。由此得上式可改寫成

$$I_{xy}=I_{x_cy_c}+Ad_1d_2 \tag{A-20}$$

上式中之 d_1 與 d_2 是重心 C 的 x 與 y 軸的坐標。公式（$A-20$）稱爲慣性積的平行軸定理。

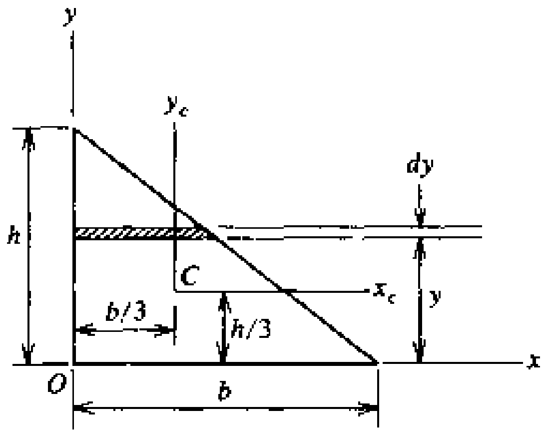
茲舉例說明如何應用平行軸定理。我們假設一個矩形的一隅置於兩軸



圖A-17

之交點 O 上（如圖 $A-17$），求其慣性積。已知矩形面積對其形心軸 x_c，y_c 的慣性積爲零，因之，對 x，y 軸的慣性積爲

$$I_{xy}=bh\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{b^2h^2}{4} \tag{A-21}$$



圖A・18

設一直角三角形的底長爲 b ，高爲 h ，取出深 dy 寬爲

$$\frac{(h-y)b}{h}$$

的附有斜線之面積元件（見圖 $A-18$ ）。該面積元件對其形心具對稱性，故其慣性積爲零。由平行軸定理，得該面積元件對 x , y 軸所起的慣性積爲

$$\left[\frac{(h-y)b\,dy}{h}\right]\left[y\right]\left[\frac{(h-y)b}{2h}\right]=\frac{b^2}{2h^2}(h-y)^2y\,dy$$

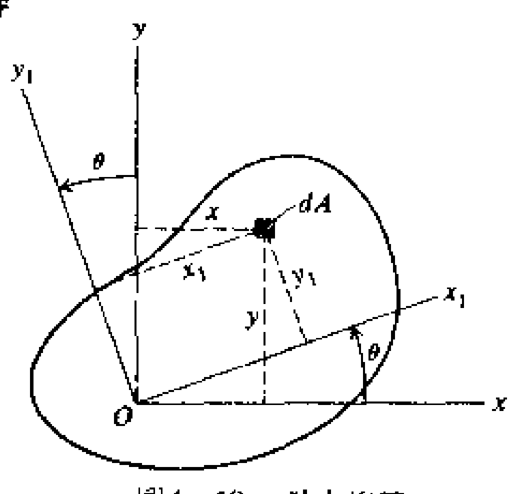
整個三角形的慣性積，用積分求得

$$I_{xy}=\frac{b^2}{2h^2}\int_0^h(h-y)^2y\,dy=\frac{b^2h^2}{24} \tag{A-22}$$

已知，對 xy 軸所起的慣性積，我們很容易定出與之平行的三角形形心軸的慣性積

$$I_{x_cy_c}=I_{xy}-Ad_1d_2=\frac{b^2h^2}{24}-\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)=-\frac{b^2h^2}{72} \tag{A-23}$$

A.7 軸之旋轉



圖A・19 軸之旋轉

假定任一平面（圖 $A-19$ ）中的慣性力矩與慣性積均爲已知

$$I_x=\int y^2\,dA \qquad I_y=\int x^2\,dA \qquad I_{xy}=\int xy\,dA \tag{a}$$

求兩軸旋轉成 x，y，位置如圖的諸相當慣性力矩 I_{x_1} ，I_{y_1}與慣性積 $I_{x_1y_1}$。

設面積單元 ΔA之原軸坐標制爲 x，y。經旋轉後的新軸坐標制爲

$$x_1=x\cos\theta+y\sin\theta \qquad y_1=y\cos\theta-x\sin\theta$$

但 θ 爲原軸旋轉成新軸的夾角。由此得慣性力矩 I_{x_1} 式爲

$$I_{x_1}=\int y_1^2\,dA=\int(y\cos\theta-x\sin\theta)^2\,dA$$

$$=\cos^2\theta\int y^2\,dA+\sin^2\theta\int x^2\,dA-2\sin\theta\cos\theta\int xy\,dA$$

將(a)式諸值代入上式寫成

$$I_{x_1}=I_x\cos^2\theta+I_y\sin^2\theta-2I_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{A-24a}$$

依三角恒等式，代入上式而整理之得

$$I_{x_1}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta-I_{xy}\sin 2\theta \tag{A-24b}$$

同樣辦法可求得慣性力矩 I_{y_1} 爲

$$I_{y_1}=I_x\sin^2\theta+I_y\cos^2\theta+2I_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{A-25a}$$

或

$$I_{y_1}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta+I_{xy}\sin 2\theta \tag{A-25b}$$

此（ $A-24$ ）與（ $A-25$ ）諸式，乃表示對旋轉軸上的慣性力矩，用對原軸諸慣性力矩及慣性積來表示之式。

將 I_{x_1} 與 I_{y_1} 兩式求其和，得

$$I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+I_y \tag{A-26}$$

上式係說明，兩軸雖經旋轉，但其慣性力矩之和仍與原軸慣性力矩之和爲相等。而兩者之和，自然即爲其對原點的極慣性力矩。

關於旋轉軸上的慣性積，其式如下：

$$I_{x_1y_1}=\int x_1y_1\,dA=\int(x\cos\theta+y\sin\theta)(y\cos\theta-x\sin\theta)\,dA$$

或

$$I_{x_1y_1}=I_x\sin\theta\cos\theta-I_y\sin\theta\cos\theta+I_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \tag{A-27a}$$

利用三角恒等式將上式整理之，得

$$I_{x_1y_1}=\frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta+I_{xy}\cos 2\theta \tag{A-27b}$$

由上式可計算任何一組軸旋轉一 θ 角的慣性積。

由上式又可找出一些比較有興趣的事實。當一組軸旋轉 θ 角度時對慣性積所起的影響。當 $\theta=0$ 時，由（$A-27b$）式得 $I_{x_1y_1}=I_{xy}$，這是必然的道理。若 $\theta=90°$ 時，由（$A-27b$）式得 $I_{x_1y_1}=-I_{xy}$。亦即當旋轉 90° 角時，其慣性積只改變爲負號。由於慣性積是隨着所旋轉的角度 θ 而隨着變更，其中必有一個角度可使慣性積爲0。此時旋轉 θ 角後的兩軸，稱爲該面積的主軸（principal axes）。若面積的形心爲坐標之原點，則該主軸稱爲形心主軸（centroidal principal axes）。

以上各節所述，慣性積是對兩軸而言，若其中一軸爲該面積的對稱軸則其慣性積將爲0。因之，凡是面積圖形具一對稱軸者，則該對稱軸與其垂直的另一軸，成爲一組主軸。

若將轉軸的面積慣性力矩公式和轉軸的平面應力公式（2－5）相比較，結果是完全相當的。若在平面應力公式中，將 σ_x，σ_y，τ_{xy}，τ_θ 與 d_θ 代以 I_x，I_y，$-I_{xy}$，I_{x_1} 與 $I_{x_1y_1}$，所得的公式將與上列的慣性力矩公式完全一樣。故在任一種情形所得的一般結論，將完全適用於另一種情形。例如，吾們可利用「莫爾」圖來定轉軸的慣性力矩，及求主要慣性力矩等。

A.8 主 軸

上節中所述的主軸，被定義爲－在這一對軸上所起的慣性積爲零的兩軸。於是，要決定此一對軸，可在（$A-27b$）式中置 $I_{x_1y_1}$ 爲0以求其所轉之角 θ，即由

$$\tan 2\theta_p=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x} \tag{A-28}$$

此 θ_p 符號是用來表示這 θ 角，以定義其主軸的。由（$A-28$）式可得兩種 $2\theta_p$ 值；兩值相差爲 π。兩個 θ_p 值相差爲 $\pi/2$，用來決定兩個相互正交的主軸方向。

吾們更可深入探求 θ 值，如何可使慣性力矩成爲最大或最小的情形。參照（$A-24$）式可知，I_{x_1} 值隨着 θ 角而變，求使 I_{x_1} 值爲最大或最小之 θ 角，可將（$A-24b$）式右側各項對 θ 角求其微分而置之零，則得

$$(I_y-I_x)\sin 2\theta-2I_{xy}\cos 2\theta=0$$

解上式之 θ，所得的結果與（$A-28$）式完全相同。更進一步而言，若用（$A-25b$）式以求 I_{y_1} 之最大與最小值，仍得相同的結果。因之，

吾們又可得一結論。凡具最大慣性力矩與最小慣性力矩之軸，稱謂主軸。

茲再就主軸作一扼要的說明。(1)主軸是一對互成正交之軸，其方位則依θ角決定之，用（$A-28$）式；(2)對主軸所起的慣性積爲零；(3)在一組主軸中的任一軸，其慣性力矩爲最大時，則另一軸的爲最小；(4)對稱之軸，常爲主軸之一。

求主慣性力矩的公式，可由（$A-28$）式先求得θ_p，再代入（$A-24b$）式即得。今由（$A-28$）式得

$$\sin 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

與

$$\cos 2\theta_p = \frac{\frac{I_y - I_x}{2}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

將以上二值代入（$A-24b$）式，則得

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{A-29}$$

上式中的I_1係代表兩個主慣性力矩中之大者，I_2代表其中之小者。

兩主軸的旋轉半徑（見$A-10$）式稱爲主旋轉半徑（principal radii of gyration）簡稱爲主旋徑。主旋徑有最大與最小之別。

如何決定主軸之法，以及如何計算主慣性力矩，將在下列諸舉例中說明之。

【例題】 求圖$A-20$所示Z形斷面的主軸方向與主慣性力矩。坐標的原點，設在該斷面的形心C，並已知下列諸數值。$h=400$mm，$b=175$ mm，$t=30$mm。

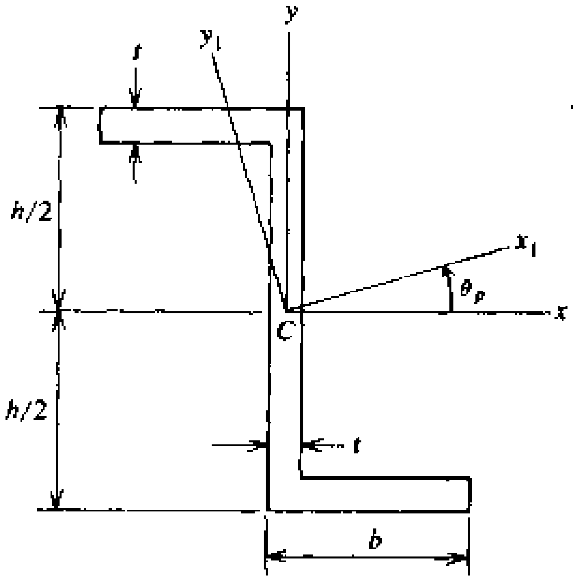
將Z形斷面劃分成三個矩形，並利用平行軸定理，分別求出對經過重心之x，y軸的慣性力矩，及慣性積諸值如下：

$I_x = 458.41 \times 10^6$ mm

$I_y = 94.76 \times 10^6$ mm

$I_{xy} = -155.4 \times 10^6$ mm

將諸值代入（$A-28$）式，得



圖A・20 例題

$$\tan 2\theta_p = 0.855 \qquad 2\theta_p = 40°\,32' \text{ 及 } 220°\,32'$$

由此得兩個 θ_p 值爲 20°16′與110°32′。將第一 θ 值代入（ $A-24b$ ）式，得 $I_{x1} = 515.78 \times 10^6 \text{mm}^4$，次將第二 θ 值代入得 $I_{x1} = 37.40 \times 10^6 \text{mm}^4$。若用（ $A-29$ ）式來計算，仍得同樣兩個 I_{x1} 值。由此可得兩個主慣性力矩分別爲

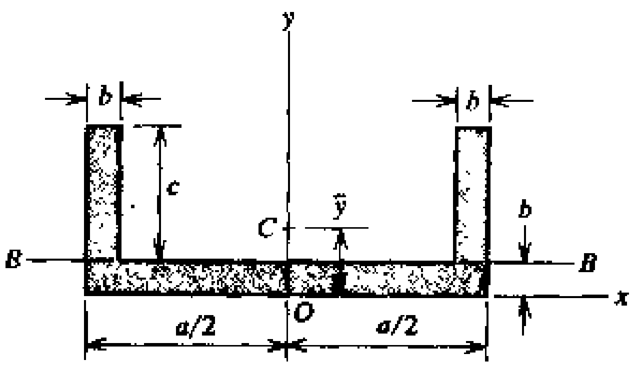
$$I_1 = 515.78 \times 10^6 \text{mm}^4 \qquad I_2 = 37.40 \times 10^6 \text{mm}^4$$

以上所得大的慣性力矩是由轉軸 $\theta_p = 20°16'$ 的結果，小的慣性力矩是由轉軸 $\theta_p = 110°16'$ 的結果。

習 題

A.1－1　檢算附錄 B 第八種圖形之半圓面積的形心位置 $\bar{y}$ 的距離公式。

A.1－2　檢算附錄 B 第十一種圖形之拋物線控形的面積，及其形心坐標 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 的公式。

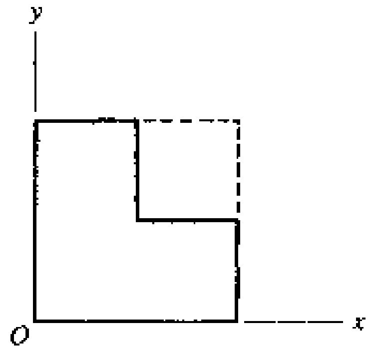


習題圖A2・1 與 A2・2

A．2－1　定出圖$A-2-1$所示槽形斷面之形心C的坐標。假定$a=150$ mm，$b=25$ mm與$c=50$ mm。

A．2－2　設圖$A-2-2$所示槽形斷面之重心C適在$B-B$線上時。試求a，b與c等三個尺寸間的關係。

A．2－3　若將邊長為a的正方形割成四分面積，如（圖$A-2-3$）所示。求該留存面積之形心坐標。



習題圖A．2－3

A．2－4　設圖$A-6$所示之三角形斷面中，A_1的面積為100mm乘12mm，A_2的面積為138mm乘12mm。求該斷面形心C的坐標。

A．3－1　設圖$A-8$所示之矩形，求對其底邊所起的慣性力矩。

A．3－2　設圖$A-10$所示之三角形，求對經過頂點與x軸平行之軸所起的慣性力矩。

A．3－3　求邊長a之正方形，對其對角線所起的慣性力矩。

A．3－4　設圖$A-7$所示之梯形，求對x軸所起的慣性力矩。

A．3－5　求寬a長b之矩形，對其對角線所起的慣性力矩。

A．3－6　設圖$A-8$所示之矩形，求其旋徑r_x與r_y。

A．4－1　設圖$A-8$所示之矩形，求對其形心的極慣性力矩。

A．4－2　設等邊三角形之底邊為b，高為h。求對其頂點之極慣性力矩。

A．4－3　求寬a長b之矩形，對其中之一隅的極慣性力矩。

A．5－1　設圖$A-7$所示之梯形，求對經過形心C與x軸平行之軸所起的慣性力矩。

A．5－2　設圖$A-14$所示之橢圓，求對該橢圓長徑之一端所起的極慣性力矩。

A．5－3　設圖$A-11$所示之中空箱形斷面，求對其底邊所起的慣性力

矩。已知 $b=h$，與 $b_1=h_1$ 。

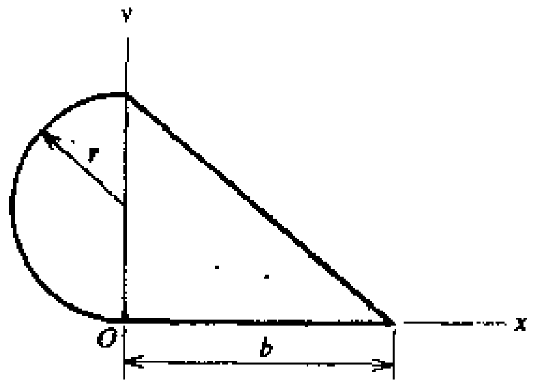
A.5－4　求附錄C中（C－1表）之305×165×40 kgUB斷面，對其底邊所起的慣性力矩。

A.5－5　求附錄C中（C－4表）之102×102×11mm斷面，對其任一側邊作爲軸所起的慣性力矩。

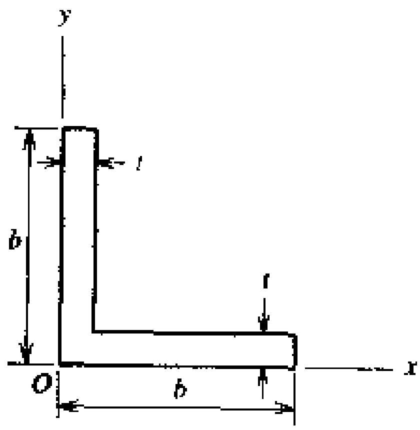
A.6－1　試導出圖A－13所示四分一圓形的慣性積 I_{xy} 公式。

A.6－2　試導出圖A－13所示圓拱腔形的慣性積 I_{xy} 公式。

A.6－3　試求圖A.6－3所示之組合面積中 r 與 b 間的關係，使其慣性積 I_{xy} 爲零。



習題圖A・6－3

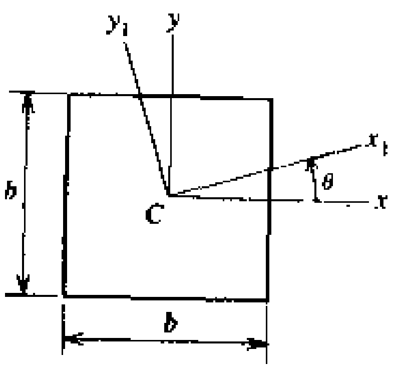


習題圖A・6－4

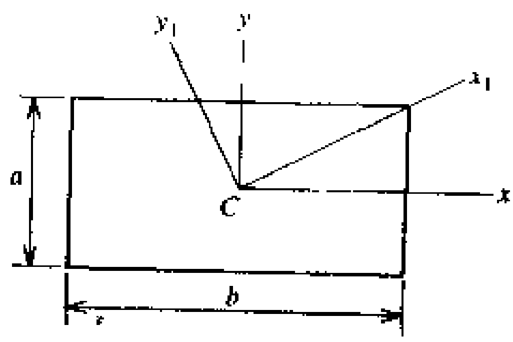
A.6－4　試求圖A.6－4所示 L 形斷面（設 $b=100$ mm，$t=25$mm）的慣性積 I_{xy} 。

A.6－5　試求附錄C表C.4中所列之角鋼斷面152×152×22.1mm，對1－1與2－2軸所起的慣性積 I_{12} 。

A.7－1　試求圖A.7－1所示之正方形的慣性積 $I_{x_1y_1}$ 與慣性力矩 I_{x_1} 與 I_{y_1} 。



習題圖A・7－1

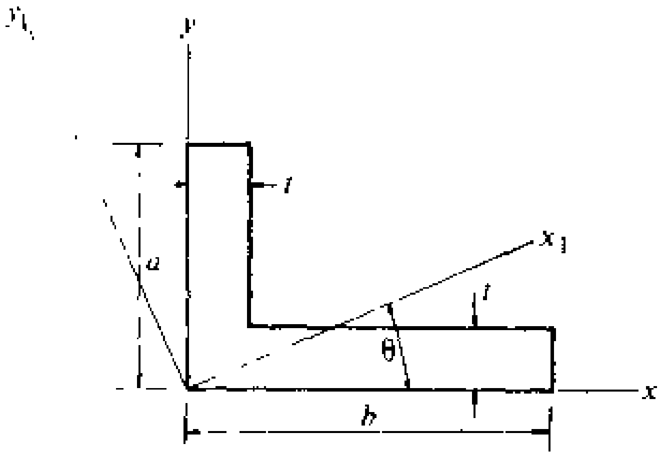


習題圖A・7－2

A.7－2　試用轉軸公式，求出圖A.7－2所示高 a 長 b 的矩形，對 x_1，y_1 軸所起的慣性積。（注意，此 x_1 軸爲矩形的對角線）。

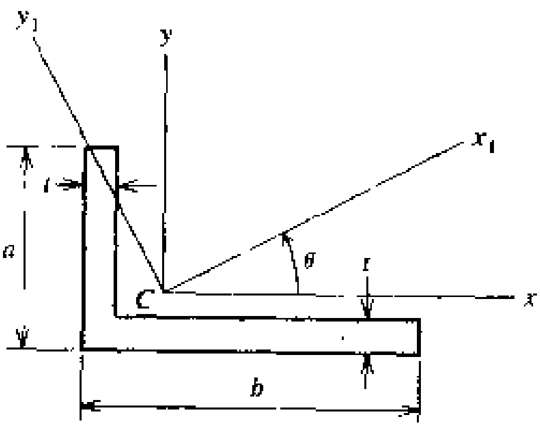
A.8－1　圖 A－18 所示之直角三角形，設 $b=150$mm，$h=200$mm。試定出經過 O 點的主軸，並計算其主慣性力矩。

A.8－2　圖A.8－2之角鋼斷面，設 $a=100$mm，$b=150$mm，$t=25$mm，試定出經過 O 點的主軸，並計算其主慣性力矩。



習題圖A・8－2

A・8－3　圖A.8－3之角鋼斷面，設 $a=100$ mm，$b=150$ mm，$t=25$ mm。試定出經過其形心 C 的主軸，並計算其主慣性力矩。



習題圖A・8－3與A・8－4

A．8－4　圖A．8－4之角鋼斷面，設 $a=60\text{ mm}$，$b=120\text{ mm}$，$t=12\text{ mm}$。試求重心主軸的方向。並計算其慣性力矩。

A．8－5　圖 $A-20$所示之 Z 形斷面，設 $h=250\text{ mm}$，$b=125\text{ mm}$，$t=25\text{ mm}$。試求其形心主軸的方向，並計算其慣性力矩。

A．8－6　解上題，設 $h=120\text{ mm}$，$b=78\text{ mm}$，$t=12\text{ mm}$。

附錄B　平面面積諸性質表

符號

$\bar{x}$，$\bar{y}$＝至形心 C 點距離

A＝面積

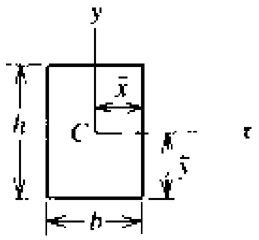
I_x，I_y＝對 x，y 軸所起之慣性力矩

I_{xy}＝對 x，y 軸所起之慣性積

$J = I_x + I_y$＝極慣性力矩

I_{BB}＝對 $B-B$ 軸所起之慣性力矩

1.



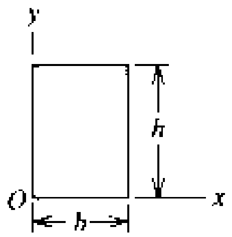
矩形（形心在軸之原點上）

$$A = bh \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad J = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

2.

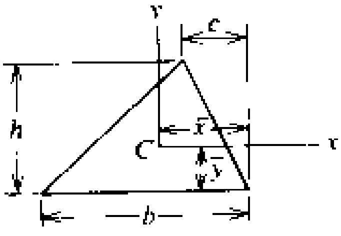


矩形（角隅在軸之原點上）

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \qquad J = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

3.



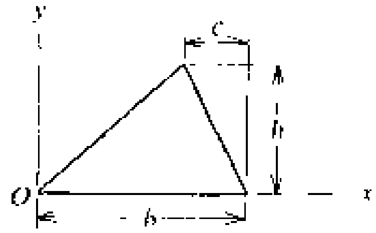
三角形（形心在軸之原點上）

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b+c}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \qquad J = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$$

4.

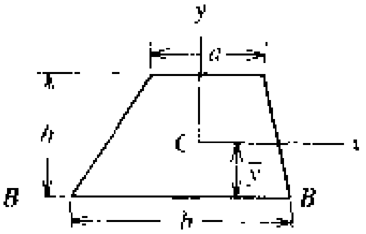


三角形（一角在軸之原點上）

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \qquad J = \frac{bh}{12}(h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$$

5.

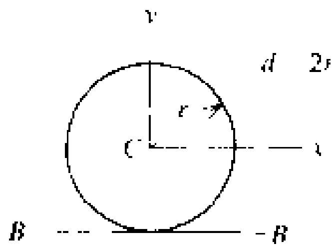


梯形（形心在軸上原點上）

$$A = \frac{h(a+b)}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \qquad I_{BB} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

6.



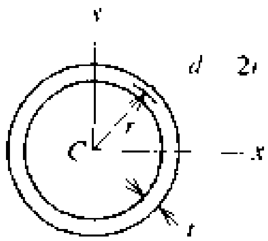
圓（中心在軸之原點上）

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

7.



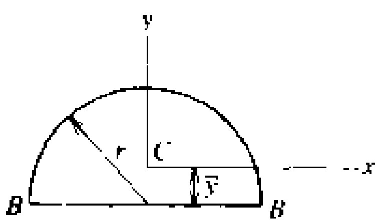
圓環（中心在軸之原點上）

t 值相當小時用近似式

$$A = 2\pi rt = \pi dt \qquad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad J = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

8.



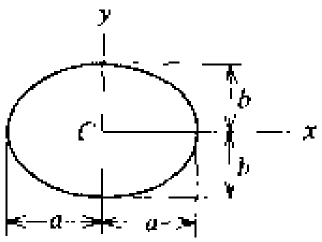
半圓（形心在軸之原點上）

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \qquad I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

9.

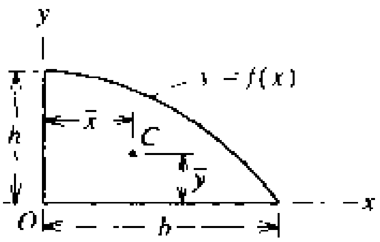


橢圓（形心軸之原點上）

$$A = \pi ab \qquad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \qquad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad J = \frac{\pi ab}{4}(b^2 + a^2)$$

10.

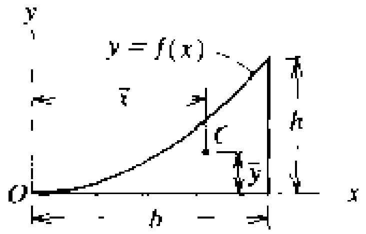


拋物線

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

11.



拋物線拱腔（頂點在軸之原點上）

$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

附錄C 結構用鋼截面性質
（摘　　要）

下列各表擇要列舉若干結構用型鋼斷面性質，作爲讀者解答本書習題之用。

這些表格，是由英國鋼結構協會與鋼構造研究與發展組織在 1971 年出版的“鋼結構手册”所列的擇要列出。

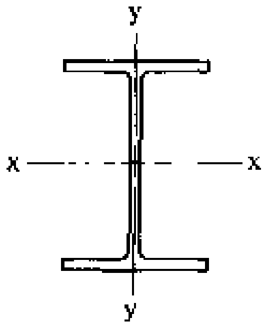
表中所示之符號

I = 慣性力矩

S = 斷面模數

$r = \sqrt{\dfrac{I}{A}}$ = 旋徑

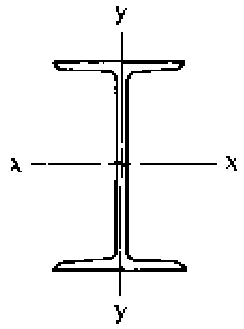
表C－1　寬翼緣截面統一梁截面性質表（摘要）



名稱	每米質量	面積	高度	厚度	寬度		軸 $x-x$			軸 $y-y$		
					腹厚	翼厚	I	S	r	I	S	r
mm	kg	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
914×419	388	493.9	920.5	420.5	21.5	36.6	717325	15586	38.1	42481	2021	9.27
914×305	289	368.5	926.6	307.8	19.6	32.0	503781	10874	37.0	14793	961	6.34
762×267	197	250.5	769.6	268.0	15.6	25.4	239464	6223	30.9	7699	575	5.54
762×267	147	187.8	753.9	265.3	12.9	17.5	168535	4471	30.0	5002	377	5.16
610×305	238	303.5	633.0	311.5	18.6	31.4	207252	6549	26.1	14973	961	7.02
610×305	149	189.9	609.6	304.8	11.9	19.7	124341	4079	25.6	8471	556	6.68
457×191	98	125.2	467.4	192.8	11.4	19.6	45653	1954	19.1	2216	230	4.21
457×152	82	104.4	465.1	153.5	10.7	18.9	36160	1555	18.6	1093	143	3.24
406×178	74	94.9	412.8	179.7	9.7	16.0	27279	1322	17.0	1448	161	3.91
406×140	46	58.9	402.3	142.4	6.9	11.2	15603	776	16.3	500	70.3	2.92
356×171	67	85.3	364.0	173.2	9.1	15.7	19483	1071	15.1	1278	148	3.87
356×171	45	56.9	352.0	171.0	6.9	9.7	12052	685	14.6	730	85.4	3.58
356×127	39	49.3	352.8	126.0	6.5	10.7	10054	570	14.3	333	52.9	2.60
305×165	54	68.3	310.9	166.8	7.7	13.7	11686	752	13.1	988	119	3.80
305×165	40	51.4	303.8	165.1	6.1	10.2	8500	560	12.9	691	83.7	3.67
305×127	48	60.8	310.4	125.2	8.9	14.0	9485	611	12.5	438	69.9	2.68
305×102	25	31.4	304.8	101.6	5.8	6.8	4381	288	11.8	116	22.9	1.92
254×146	43	55.0	259.6	147.3	7.3	12.7	6546	504	10.9	633	86.0	3.39
254×146	31	39.9	251.5	146.1	6.1	8.6	4427	352	10.5	406	55.5	3.19
254×102	28	36.2	260.4	102.1	6.4	10.0	4004	308	10.5	174	34.1	2.19
254×102	22	28.4	254.0	101.6	5.8	6.8	2863	225	10.0	116	22.8	2.02
203×133	30	38.0	206.8	133.8	6.3	9.6	2880	279	8.7	354	52.9	3.05
203×133	25	32.3	203.2	133.4	5.8	7.8	2348	231	8.5	280	41.9	2.94

註：軸 $x-x$ 與軸 $y-y$ 爲形心主軸

表C－2　統一柱截面性質表（摘要）



名稱	每米質量	面積	高度	厚度	寬度		軸 $x-x$			軸 $y-y$		
					腹厚	翼厚	I	S	r	I	S	r
mm	kg	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
356×406	467	595.5	436.6	412.4	35.9	58.0	183118	8388	17.5	67905	3293	10.7
356×406	287	366.0	393.7	399.0	22.6	36.5	99994	5080	16.5	38714	1940	10.3
305×305	240	305.6	352.6	317.9	23.0	37.7	64177	3641	14.5	20239	1273	8.14
305×305	158	201.2	327.2	310.6	15.7	25.0	38740	2368	13.9	12524	806	7.89
254×254	167	212.4	289.1	264.5	19.2	31.7	29914	2070	11.9	9796	741	6.79
254×254	107	136.6	266.7	258.3	13.0	20.5	17510	1313	11.3	5901	457	6.57
203×203	86	110.1	222.3	208.8	13.0	20.5	9462	852	9.27	3119	299	5.32
203×203	60	75.8	209.6	205.2	9.3	14.2	6088	581	8.96	2041	199	5.19
152×152	37	47.4	161.8	154.4	8.1	11.5	2218	274	6.84	709	92	3.87
152×152	23	29.8	152.4	152.4	6.1	6.8	1263	166	6.51	403	53	3.68

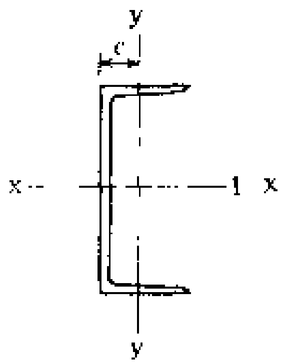
註：軸 $x-x$ 與軸 $y-y$ 爲形心主軸

表C－3　擱柵截面性質表

名稱	每米質量	面積	高度	厚度	寬度		軸 $x-x$			軸 $y-y$		
					腹厚	翼厚	I	S	r	I	S	r
mm	kg	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
203×102	25.3	32.3	203.2	101.6	5.8	10.4	2294	226	8.43	163	32.0	2.25
178×102	21.5	27.4	117.8	101.6	5.3	9.0	1519	171	7.44	139	27.4	2.25
152×89	17.1	21.8	152.4	88.9	4.9	8.3	881.1	116	6.36	86.0	19.3	1.99
127×76	13.4	17.0	127.0	76.2	4.5	7.6	475.9	74.9	5.29	50.2	13.2	1.72
102×64	9.7	12.3	101.6	63.5	4.1	6.6	217.6	42.8	4.21	25.3	8.0	1.43
76×51	6.7	8.5	76.2	50.8	3.8	5.6	82.58	21.7	3.12	11.1	4.4	1.14

註：軸 $x-x$ 與軸 $y-y$ 爲形心主軸

表C－4　槽形截面性質表（摘要）



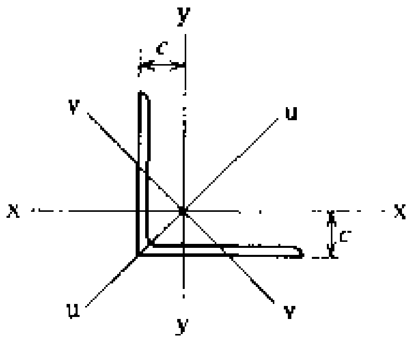
名稱	每米質量	面積	高度	厚度	寬度		軸 x-x			軸 y-y			
					腹厚	翼厚	I	S	r	I	S	r	c
mm	kg	cm²	mm	mm	mm	mm	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm	cm
432×102	65.5	83.5	431.8	101.6	12.2	16.8	21399	991	16.0	629	80.2	2.74	2.32
381×102	55.1	70.2	381.0	101.6	10.4	16.3	14894	782	14.6	580	75.9	2.87	2.52
305×102	46.2	58.8	304.8	101.6	10.2	14.8	8214	539	11.8	500	66.6	2.91	2.66
305×89	41.7	53.1	304.8	88.9	10.2	13.7	7061	463	11.5	325	48.5	2.48	2.18
254×89	35.7	45.5	254.0	88.9	9.1	13.6	4448	350	9.88	302	46.7	2.58	2.42
254×76	28.3	36.0	254.0	76.2	8.1	10.9	3367	265	9.67	163	28.2	2.12	1.86
203×89	29.8	37.9	203.2	88.9	8.1	12.9	2491	245	8.10	264	42.3	2.64	2.65
203×76	23.8	30.3	203.2	76.2	7.1	11.2	1950	192	8.02	151	27.6	2.23	2.13
152×89	23.8	30.4	152.4	88.9	7.1	11.6	1166	153	6.20	215	35.7	2.66	2.86
152×76	17.9	22.8	152.4	76.2	6.4	9.0	852	112	6.12	114	21.1	2.24	2.21
127×64	14.9	19.0	127.0	63.5	6.4	9.2	483	76.0	5.04	67.2	15.3	1.88	1.94
102×51	10.4	13.3	101.6	50.8	6.1	7.6	208	40.9	3.96	29.1	8.2	1.48	1.51

註：1. 軸 x-x 與軸 y-y 爲形心主軸。

2. c 距離是從形心量起至腹背。

3. 表列軸 y-y 的 S 是兩個截面模數中小的一個。

表C－5 等肢角鋼截面性質表（摘要）



名稱 mm	厚度 mm	腹厚 mm	每米質量 kg	面積 cm^2	軸 $x-x$ 與軸 $y-y$				軸 $v-v$	
					I cm^4	S cm^3	r cm	c cm	I_{min} cm^4	r_{min} cm
203×203	25.3	203.2	76.0	96.8	3686	257	6.17	5.99	1527	3.97
	15.8	203.2	48.7	62.0	2455	167	6.29	5.63	1004	4.02
152×152	22.1	152.4	49.3	62.8	1321	124	4.58	4.60	553	2.97
	12.6	152.4	29.1	37.0	819	74.5	4.70	4.24	335	3.01
127×127	19.0	127.0	35.2	44.8	651	73.5	3.81	3.85	273	2.47
	12.6	127.0	24.0	30.6	462	50.8	3.89	3.61	190	2.49
102×102	17.4	101.6	27.6	32.5	317	45.6	3.00	3.22	136	1.97
	11.0	101.6	16.7	21.3	203	28.1	3.09	2.92	83.8	1.99
89×89	12.6	88.9	16.4	20.9	149	23.9	2.67	2.66	62.0	1.72
	6.3	88.9	8.5	10.8	81.0	12.5	2.74	2.41	33.3	1.75
76×76	12.6	76.2	13.9	17.6	90.4	17.1	2.26	2.35	38.2	1.47
	6.2	76.2	7.2	9.1	49.6	9.0	2.33	2.10	20.3	1.49

註：1. 軸 $x-x$ 與軸 $y-y$ 爲形心主軸與兩肢邊平行。

2. c 距離是從形心量起至兩肢外邊。

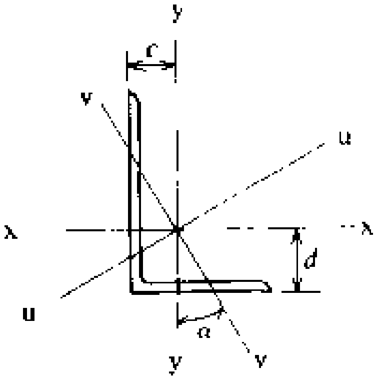
3. 表列軸 $x-x$ 與軸 $y-y$ 的 S，是兩個截面模數中小的一個。

4. 軸 $v-v$ 與軸 $u-u$ 是形心主軸。

5. 對軸 $v-v$ 所起的慣性力矩，是兩個主慣性力矩中小的一個，可由 $I_{v-v}=Ar_{min}^2$ 式求得。

6. 對軸 $u-u$ 所起的慣性力矩，是兩個主慣性力矩中大的一個，可由 $I_{u-u}+I_{vv}=I_{xx}+I_{yy}$ 式求得。

表C－6　不等肢角鋼截面性質表（摘要）



名稱 mm	厚度 mm	每米質量 kg	面積厚度 cm²	軸 *x*－*x* I cm⁴	S cm³	r cm	c_x cm	軸 *y*－*y* I cm⁴	S cm³	r cm	c_y cm	軸 *v*－*v* I_{min} cm⁴	r_{min} cm
203×152	22.1	58.1	74.0	2992	218	6.36	6.59	1439	129	4.41	4.07	783	3.25
	12.6	34.1	43.4	1826	129	6.48	6.22	890	77.1	4.53	3.70	476	3.31
203×102	19.0	42.8	54.5	2277	177	6.47	7.46	386	49.7	2.66	2.41	253	2.15
	12.6	29.1	37.0	1591	121	6.55	7.20	276	34.5	2.73	2.16	177	2.19
152×102	19.0	35.2	44.8	1015	102	4.76	5.25	358	48.2	2.83	2.73	212	2.17
	12.6	24.0	30.6	716	70.0	4.84	5.00	257	33.4	2.90	2.48	148	2.20
127×89	15.8	24.9	31.7	496	59.0	3.96	4.29	198	30.5	2.50	2.40	114	1.90
	7.9	12.9	16.5	271	31.0	4.05	3.98	110	16.2	2.59	2.10	61.7	1.94
127×76	12.6	18.9	24.1	389	46.9	4.02	4.41	105	18.3	2.09	1.89	64.4	1.63
	7.8	12.1	15.4	255	30.1	4.07	4.21	70.2	11.9	2.14	1.70	42.3	1.66

註：1. 軸 *x*－*x* 與軸 *y*－*y* 爲形心主軸與兩肢邊平行。

2. c_x 與 c_y 距離是從形心量起至兩肢外邊。

3. 表列軸 *x*－*x* 與軸 *y*－*y* 的 *S*，是兩個截面模數中小的一個。

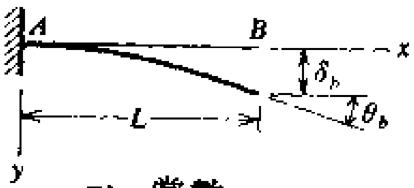
4. 軸 *v*－*v* 與軸 *u*－*u* 是形心主軸。

5. 對軸 *v*－*v* 所起的慣性力矩，是兩個主慣性力矩中小的一個，可由 $I_{vv}=Ar^2_{min}$ 式求得。

6. 對軸 *u*－*u* 所起的慣性力矩，是兩個主慣性力矩中大的一個，可由 $I_{uu}+I_{vv}=I_{xx}+I_{yy}$ 式求得。

附錄 D　梁之撓度與傾斜度

表 D－1　懸臂樑之撓度與斜坡



EI = 常數

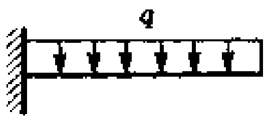
v = y 方向之撓度

$v' = \dfrac{dv}{dx}$ = 撓度曲線之斜坡

$\delta_b = v(L)$ = 樑右端之撓度

$\theta_b = v'(L)$ = 樑右端之斜坡

1.

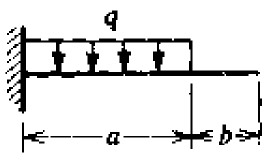


$$v = \frac{q\,x^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_b = \frac{qL^3}{6EI}$$

2.



$$v = \frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

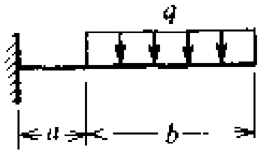
$$v' = \frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \qquad v' = \frac{qa^3}{6EI} \qquad a \le x \le L$$

At $x = a$: $v = \dfrac{qa^4}{8EI}$ $\qquad v' = \dfrac{qa^3}{6EI}$

$$\delta_b = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \qquad \theta_b = \frac{qa^3}{6EI}$$

3.



$$v = \frac{qx^2}{12EI}(3bL + 3ab - 2bx) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v' = \frac{qbx}{2EI}(L + a - x) \qquad 0 \le x \le a$$

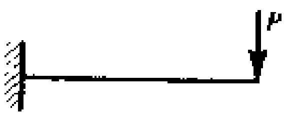
$$v = \frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \qquad a \le x \le L$$

$$v' = \frac{q}{6EI}(x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \qquad a \le x \le L$$

At $x = a$: $v = \dfrac{qa^2b}{12EI}(3L + a) \qquad v' = \dfrac{qabL}{2EI}$

$$\delta_b = \frac{q}{24EI}(3L^4 - 4a^3L + a^4) \qquad \theta_b = \frac{q}{6EI}(L^3 - a^3)$$

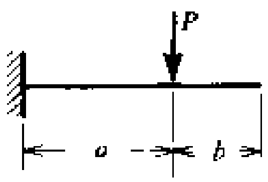
4.



$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = \frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_b = \frac{PL^2}{2EI}$$

5.



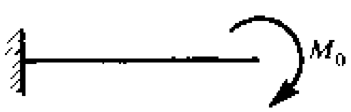
$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \qquad v' = \frac{Px}{2EI}(2a - x) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \qquad v' = \frac{Pa^2}{2EI} \qquad a \le x \le L$$

At $x = a$: $v = \dfrac{Pa^3}{3EI} \qquad v' = \dfrac{Pa^2}{2EI}$

$$\delta_b = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \qquad \theta_b = \frac{Pa^2}{2EI}$$

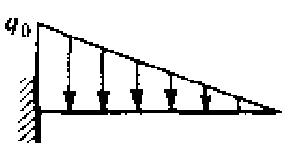
6.



$$v = \frac{M_0x^2}{2EI} \qquad v' = \frac{M_0x}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{M_0L^2}{2EI} \qquad \theta_b = \frac{M_0L}{EI}$$

7.

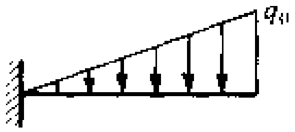


$$v = \frac{q_0x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{q_0x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$\delta_b = \frac{q_0L^4}{30EI} \qquad \theta_b = \frac{q_0L^3}{24EI}$$

8.

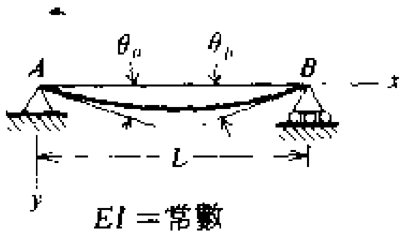


$$v = \frac{q_0 x^2}{120LEI}(20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24LEI}(8L^3 - 6L^2x + x^3)$$

$$\delta_b = \frac{11q_0 L^4}{120EI} \qquad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{8EI}$$

表D－2 簡式樑之撓度與斜坡



$v=$ y 方向之撓度

$v'=\dfrac{dx}{dv}=$ 撓度曲線之斜坡

$\delta_c=v\left(\dfrac{L}{2}\right)=$ 樑中點之撓度

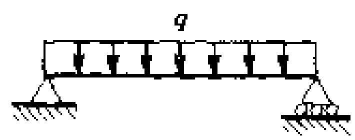
$x_1=$ 由 A 點至最大撓度點距離

$\delta_{max}=v_{max}=$ 最大撓度

$\theta_a=v'(0)=$ 在樑左支端之撓角

$\theta_b=-v'(L)=$ 在樑右支端之撓角

1.

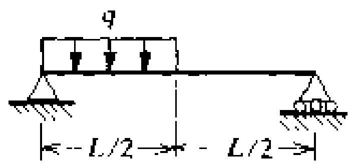


$$v=\frac{qx}{24EI}(L^3-2Lx^2+x^3)$$

$$v'=\frac{q}{24EI}(L^3-6Lx^2+4x^3)$$

$$\delta_c=\delta_{max}=\frac{5qL^4}{384EI}\qquad\theta_a=\theta_b=\frac{qL^3}{24EI}$$

2.



$$v=\frac{qx}{384EI}(9L^3-24Lx^2+16x^3)\qquad 0\le x\le\frac{L}{2}$$

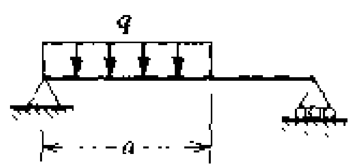
$$v'=\frac{q}{384EI}(9L^3-72Lx^2+64x^3)\qquad 0\le x\le\frac{L}{2}$$

$$v=\frac{qL}{384EI}(8x^3-24Lx^2+17L^2x-L^3)\qquad \frac{L}{2}\le x\le L$$

$$v'=\frac{qL}{384EI}(24x^2-48Lx+17L^2)\qquad \frac{L}{2}\le x\le L$$

$$\delta_c=\frac{5qL^4}{768EI}\qquad\theta_a=\frac{3qL^3}{128EI}\qquad\theta_b=\frac{7qL^3}{384EI}$$

3.



$$v=\frac{qx}{24LEI}(a^4-4a^3L-4a^2L^2+2a^2x^2-4aLx^2+Lx^3)$$

$$0\le x\le a$$

$$v'=\frac{q}{24LEI}(a^4-4a^3L+4a^2L^2+6a^2x^2-12aLx^2+4Lx^3)$$

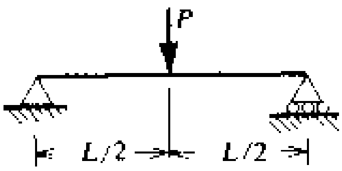
$$0\le x\le a$$

$$v=\frac{qa^2}{24LEI}(-a^2L+4L^2x-a^2x-6Lx^2+2x^3)\qquad a\le x\le L$$

$$v'=\frac{qa^2}{24LEI}(4L^2+a^2-12Lx+6x^2)\qquad a\le x\le L$$

$$\theta_a=\frac{qa^2}{24LEI}(a^2-4aL+4L^2)\qquad\theta_b=\frac{qa^2}{24LEI}(2L^2-a^2)$$

4.

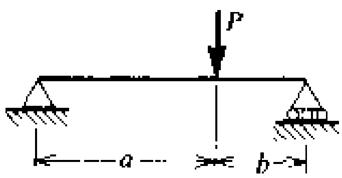


$$v = \frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = \delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI}$$

5.



$$v = \frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

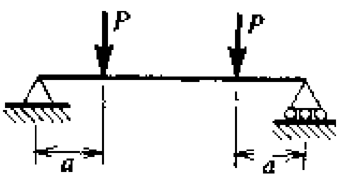
$$v' = \frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$\theta_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad \theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$\text{If } a \ge b,\ \delta_c = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$$

$$\text{If } a \ge b,\ x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad \text{與} \quad v_{max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$$

6.



$$v = \frac{Px}{6EI}(3aL - 3a^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v' = \frac{P}{2EI}(aL - a^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{Pa}{6EI}(3Lx - 3x^2 - a^2) \qquad a \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{Pa}{2EI}(L - 2x) \qquad a \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\theta_a = \frac{Pa(L-a)}{2EI} \qquad \delta_c = v_{max} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2)$$

7.



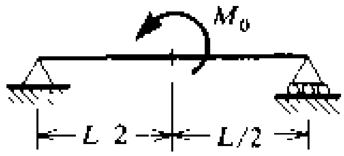
$$v = \frac{M_0 x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_c = \frac{M_0 L^2}{16EI} \qquad \theta_a = \frac{M_0 L}{3EI} \qquad \theta_b = \frac{M_0 L}{6EI}$$

$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{與} \quad \delta_{max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

8.

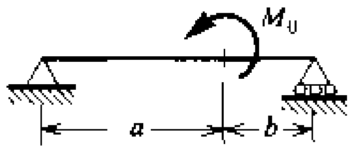


$$v = \frac{M_0 x}{24LEI}(L^2 - 4x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{M_0}{24LEI}(L^2 - 12x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = 0 \qquad \theta_a = \frac{M_0 L}{24EI} \qquad \theta_b = -\frac{M_0 L}{24EI}$$

9.



$$v = \frac{M_0 x}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

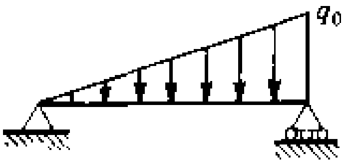
$$v' = \frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

At $x = a$: $\quad v = \dfrac{M_0 a}{3LEI}(3aL - 2a^2 - L^2)$

At $x = a$: $\quad v' = \dfrac{M_0}{3LEI}(3aL - 3a^2 - L^2)$

$$\theta_a = \frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2) \qquad \theta_b = \frac{M_0}{6LEI}(3a^2 - L^2)$$

10.



$$v = \frac{q_0 x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

$$v' = \frac{q_0}{360LEI}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$

$$\delta_c = \frac{5q_0 L^4}{768EI} \qquad \theta_a = \frac{7q_0 L^3}{360EI} \qquad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0.5193L \qquad \delta_{max} = 0.00652\frac{q_0 L^4}{EI}$$

習題答案

1.2-2 $\sigma = 72.2\ \text{N/mm}^2 \qquad \epsilon = 0.000286$

1.3-1 (a) 25,974 m (b) 12,963 m

1.3-2 $d = 104$ mm

1.3-3 $P = 60.2$ kN

1.3-4 $\theta = \arctan\sqrt{2} = 54° \, 44'$

1.3-5 $A = \dfrac{WL\omega^2}{g\sigma_w}$

1.3-6 $A = 2WL\omega^2/(2g\sigma_w - \gamma L^2\omega^2)$

1.4-1 550.36 mm

1.4-2 $d = 10.3$ mm

1.4-3 $P = 134$ kN

1.4-4 (a) $\Delta d = 0.0148$ mm (b) $\Delta V = 354\ \text{mm}^3$

1.5-1 $\delta = \dfrac{PL}{3EA}$（伸長）

1.5-2 (a) $\delta = 0.656$ mm (b) 1.38

1.5-3 (a) 1.805 mm (b) 1.405 mm

1.5-4 $\delta = \dfrac{WL}{2EA}$

1.5-5 0.005 mm

1.5-6 $\Delta V = \dfrac{WL}{2E}(1 - 2\nu)$

1.5-7 $\delta = \dfrac{\omega^2 L^2}{3gEA}(W_1 + 3W)$

1.5-8 $\delta = \dfrac{PL}{Et(b_1 - b_2)} \ln \dfrac{b_1}{b_2}$

1.5-9 $\Delta V = \dfrac{PL}{E}(1 - 2\nu)$

1.5-10 0.688 mm

1.5-11 $r = \left(\dfrac{P}{\pi\sigma_w} e^{\gamma x/\sigma_w}\right)^{1/2} \qquad V = \dfrac{P}{\gamma}\left(e^{\gamma L/\sigma_w} - 1\right)$

1.5-12 $\Delta_{bh} = 0.955\ \text{mm}$ $\Delta_{bv} = 1.47\ \text{mm}$

1.5-13 $\cot 2\theta = \dfrac{A_2\sqrt{2}}{A_1}$

1.5-14 $\theta = 55^\circ 39'$

1.6-2 一半

1.6-3 $x = \dfrac{LE_2}{E_1 + E_2}$

1.6-4 $13.9\ \text{N/mm}^2$

1.6-5 $P = 1050\ \text{kN}$

1.6-6 $e = \dfrac{b}{2}\dfrac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$

1.6-7 $\sigma_{ab} = 66.5\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_{cd} = 133\ \text{N/mm}^2$

1.6-9 $F_{ad} = -\dfrac{P}{2\sin\alpha}$ $\Delta_{dv} = \dfrac{PH}{2EA\sin^3\alpha}$

1.6-10 $F_{ad} = \dfrac{P}{\sqrt{2}}$ $F_{bd} = -P(\sqrt{2} - 1)$ $F_{cd} = -\dfrac{P}{2}(2 - \sqrt{2})$

$\Delta_{dh} = \dfrac{PH}{EA}(\sqrt{2} - 1)$ $\Delta_{dv} = \dfrac{PH}{EA}$

1.7-1 39.7°F 160.9°F

1.7-2 $91\ \text{N/mm}^2$（壓力）

1.7-3 $R = EA\,\Delta L/L$

1.7-4 28.7°F

1.7-5 $\Delta T = \dfrac{P}{E_c A_c(\alpha_c - \alpha_s)}$

1.7-6 $\sigma_{ab} = 35.3\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_{cd} = 148.6\ \text{N/mm}^2$

1.7-7 $\sigma = 102\ \text{N/mm}^2$

1.7-9 $F_1 = -EA\alpha\,\Delta T\sin^2\beta/(1 + 2\cos^3\beta)$ $F_2 = -2F_1\cos\beta$

1.7-10 $n = \dfrac{\sigma_0 L}{2pE}\left(1 + \dfrac{EA}{2E_c A_c}\right)$

1.7-11 $\sigma_s = \dfrac{(\alpha_c - \alpha_s)TE_c E_s}{E_c + 2E_s}$ $\sigma_c = -2\sigma_s$

1.7-12 $79.9\ \text{N/mm}^2$

1.8-1 $\delta_b = 3, 6, 9, 16, 23.5\ \text{mm}$

1.8-2 $\delta_b = \dfrac{L}{B\sin\theta}\left(\dfrac{P}{2A\sin\theta}\right)^n$

1.8-3 $\delta_H = 1.37\ \text{mm}$ $\delta_V = 2.87\ \text{mm}$

1.8-4 $\delta = \dfrac{\gamma^n L^{n+1}}{B(n+1)}$

1.8-5 $\delta = 394.65$ mm

1.8-6 $P_u = 3.73\sigma_y A$

1.8-7 $P_u = 450$ kN

1.8-8 $A_{ab} = 678$ mm^2 $A_{bc} = 783$ mm^2

1.8-9 $P_y = \sigma_y A$ $P_u = 4\sigma_y A/3$

1.9-1 $\tau = 4.5$ N/mm^2

1.9-2 $d = 16$ mm

1.9-3 $\tau = 318$ N/mm^2 $\sigma = 382$ N/mm^2

1.9-4 $\tau = 100$ N/mm^2

1.9-5 $\tau = 44.9$ N/mm^2

1.10-1 $U = 169$ N mm 與 338 N mm

1.10-2 $U = \dfrac{P^2L}{2EA}$

1.10-3 $U = \dfrac{\gamma^2 AL^3}{6E}$

1.10-4 $U = \dfrac{L}{6EA}(3P^2 + 3P\gamma LA + \gamma^2 L^2 A^2)$

1.10-5 $U = \dfrac{W_1^2 L^3 \omega^4}{15EAg^2}$

1.10-7 $\sigma = (2WE/A)^{1/2}$

1.10-8 $\sigma = 14.6$ N/mm^2

1.10-9 $h = 640$ mm

1.10-10 $\sigma = \dfrac{W}{A}\left(1 + \sqrt{\dfrac{v^2}{g\delta_{st}}}\right)$ 但 $\delta_{st} = \dfrac{WL}{EA} + \dfrac{W}{k}$

2.1-1 $\tau_{max} = 127$ N/mm^2

2.1-2 350 kN

2.1-3 $\sigma_\theta = -128$ N/mm^2 $\tau_\theta = -73.2$ N/mm^2

2.1-4 $\sigma_x = 91.25$ N/mm^2 $\theta = 20° 33'$

2.1-5 $\sigma_\theta = 90$ N/mm^2 $\tau_\theta = 52$ N/mm^2

2.1-7 $\tau_\theta = -\tau_\theta = 56.6$ N/mm^2 $\sigma_x = 120$ N/mm^2 $\tau_{max} = 60$ N/mm^2

2.1-8 $\theta = 60°$

2.1-9 $\theta = 26° 34'$ $P = 14.3$ kN

2.2-1 $\sigma_\theta = 50$ N/mm^2 $\sigma'_\theta = -10$ N/mm^2 $\tau_\theta = -\tau'_\theta = 52$ N/mm^2

2.2-2 $\sigma_\theta = \sigma'_\theta = 20$ N/mm^2 $\tau_\theta = -\tau'_\theta = 60$ N/mm^2

2.2-3 $\sigma_\theta = \sigma_0$ 及 $\tau_\theta = 0$ $\dfrac{\Delta V}{V} = 0.0005$

2.2-4 $\sigma_x = 42\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_y = -14\ \text{N/mm}^2$

2.2-6 $\sigma_x = 174\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_y = -87.9\ \text{N/mm}^2$

2.2-7 0.0015 mm

2.2-8 $\Delta V = -400\ \text{mm}^3$

2.2-9 $\epsilon_z = -0.000063$

2.2-10 $\nu = \dfrac{2}{7}$

2.2-11 $\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta$

2.3-1 $\dfrac{\Delta V}{V} = 0$

2.3-2 $\gamma = 0.00175$

2.3-3 $\epsilon_x = -\epsilon_y = 0.00125$ $\gamma = 0.0025$

2.4-4 $\theta = 45°$ $\sigma_\theta = \sigma'_\theta = -4000$ psi $\tau_\theta = -\tau'_\theta = -8000$ psi

2.4-4 $\theta = 45°$ $\sigma_\theta = \sigma'_\theta = -28\ \text{N/mm}^2$ $\tau_\theta = -\tau'_\theta = -56\ \text{N/mm}^2$

2.4-6 $\sigma_\theta = -24.1\ \text{N/mm}^2$ $\tau_\theta = -90\ \text{N/mm}^2$

2.4-10 $\sigma_\theta = 24\ \text{N/mm}^2$ $\tau_\theta = -4\ \text{N/mm}^2$

2.5-1 $\theta_p = 157.5°$ 與 $\sigma_1 = 36.9\ \text{N/mm}^2$; $\theta_p = 67.5°$ 與 $\sigma_2 = 17.1\ \text{N/mm}^2$

2.5-2 $\theta_p = 97°\,17'$ 與 $\sigma_1 = 20.9\ \text{N/mm}^2$; $\theta_p = 7°\,17'$ 及 $\sigma_2 = -34.9\ \text{N/mm}^2$

2.5-3 $\theta_s = 52°\,17'$ $\sigma_\theta = -7\ \text{N/mm}^2$ $\tau_\theta = -27.9\ \text{N/mm}^2$

2.5-4 $\theta = 15°$ $\sigma_\theta = 7\ \text{N/mm}^2$ $\tau_\theta = -12.1\ \text{N/mm}^2$

2.5-5 (a) $\theta_p = 112.5°$ $\sigma_1 = 15.3\ \text{N/mm}^2$
(b) $\theta_s = 67.5°$ $\sigma_\theta = 4\ \text{N/mm}^2$ $\tau_\theta = -11.3\ \text{N/mm}^2$

2.5-6 (a) $\theta_p = 67.5°$ $\sigma_1 = 33.8\ \text{N/mm}^2$
(b) $\theta_s = 22.5°$ $\sigma_\theta = 14\ \text{N/mm}^2$ $\tau_\theta = -19.8\ \text{N/mm}^2$

2.5-7 $\sigma_x = 0$ $\sigma_y = -52\ \text{N/mm}^2$ $\tau_{xy} = -15\ \text{N/mm}^2$

2.7-1 $\sigma_{max} = 140\ \text{N/mm}^2$ $\tau_{max} = 70\ \text{N/mm}^2$

2.7-2 $p = 1.87\ \text{N/mm}^2$

2.7-3 $\Delta V = 0.68\ \text{mm}^3$

2.8-1 $\epsilon_1 = 575 \times 10^{-6}$ $\theta_p = -22.5°$

2.8-2 $\epsilon_1 = -65 \times 10^{-6}$ $\theta_p = -22.5°$

2.8-3 $\epsilon_1 = 934 \times 10^{-6}$ $\theta_p = 39.6°$

3.1-1 $L = 2.33$ m

3.1-2 $\frac{L}{d} = \frac{\phi G}{2\tau} = 698$

3.1-3 $d = 5.69$ mm

3.1-4 $T = 123$ N m

3.1-5 $G = \frac{8T}{\pi d^3 \epsilon}$

3.1-6 $\frac{T_1}{8}$

3.1-7 $d = 14.5$ mm

3.1-8 $T = \frac{fPd}{4}$

3.1-9 $\phi = \frac{qL^2}{2GJ}$

3.1-10 $\frac{d_b}{d_a} = 1.39$

3.1-11 $\sigma_1 = 59.1$ N/mm^2 $\quad \sigma_2 = -19.3$ N/mm^2 $\quad \tau_{max} = 39.2$ N/mm^2

3.2-1 (a) 0.51 (b) 1.19

3.2-2 (a) $\phi = 0.10$ rad (b) $d = 70.1$ mm

3.2-3 $d = 470$ mm

3.2-4 $\frac{a}{L} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$

3.3-1 $U = 616$ N mm

3.3-2 $U = \frac{19T_1^2 L}{128GJ}$

3.3-3 $U = \frac{q^2 L^3}{6GJ}$

3.3-4 $\frac{U_1}{U_2} = \frac{A_2^2}{A_1^2}$

3.3-5 $U = \frac{G\beta^2}{2} \frac{J_a J_b}{L_a J_b + L_b J_a}$

3.3-6 $\tau = 152$ N/mm^2

3.4-1 (a) 56.5 N/mm^2 (b) 62.2 N/mm^2

3.4-2 (a) $t = 3.93$ mm (b) $t = 4.07$ mm

3.4-3 2

3.4-4 $\tau = 50.9$ N/mm^2 $\quad \theta = 10.7 \times 10^{-6}$ rad/mm

3.4-5 $\tau \propto (\beta + 1)^2/\beta \quad J \propto \beta^2/(\beta + 1)^4$

3.4-6 $\phi = \frac{2TL}{G\pi t d_a^3} \frac{d_a}{d_b} \left(\frac{d_a}{d_b} + 1 \right)$

3.5-2 (a) $\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \frac{3n+1}{4n}$ $\quad T_u = \frac{2n\pi r^3 \tau_u}{3n+1}$

3.5-3 $T = \frac{T_y}{3} \left[4 - \left(\frac{\gamma_y}{\gamma_{max}} \right)^3 \right]$

3.5-4 $\frac{T_u}{T_y} = \frac{4(1-\beta^3)}{3(1-\beta^4)}$ 但 $\beta = \frac{r_1}{r_2}$

4.2-1 $V = -12$ kN $\quad M = 36$ kN m
$V_{max} = 24$ kN $\quad M_{max} = 48$ kN m

4.2-2 $V = qb \quad M = -\frac{qb^2}{2}$

4.2-3 $V = 1.25$ kN $\quad M = 7.5$ kN m

4.2-4 $V = -12.48$ kN $\quad M = -1.44$ kN m

4.2-5 $V = -15.2$ kN $\quad M = -46.4$ kN m

4.2-6 $V_b = 40$ kN $\quad M_b = 40$ kN m $\quad V_m = 0 \quad M_m = 80$ kN m

4.2-7 $|M_{max}| = Pa$

4.2-8 $\frac{a}{L} = \frac{1}{4}$

4.2-9 $N = P \sin\theta \quad V = P\cos\theta \quad M = Pr\sin\theta$

4.2-10 $V_{max} = \frac{44wL^2\alpha}{15g} \quad M_{max} = \frac{517wL^3\alpha}{180g}$

4.4-15 $a = 0.586L$

4.4-17 $M_{pos} = 2.25$ kN m $\quad M_{neg} = -2.15$ kN m

4.4-18 $q_a = \frac{3P}{4L} \quad q_b = \frac{9P}{4L} \quad M_{max} = \frac{17PL}{64}$

4.4-19 (a) $M_{max} = \frac{PL(n+2)}{8(n+1)}$ n 爲偶 ; $M_{max} = \frac{PL(n+1)}{8n}$ n 爲奇

4.4-20 $x = 6.67$ m $\quad M_{max} = 1300$ kN m

5.1-1 $\sigma = 320$ N/mm^2

5.1-2 $\sigma = 419$ N/mm^2

5.1-3 $P = 60.8$ kN $\quad \delta = 2.80$ mm

5.1-4 $\sigma_{max} = 62.1$ N/mm^2 $\quad \delta = 3.02$ mm

5.1-5 (a) $M_{max} = \frac{b^3\sigma_w}{32}$ (b) $M_{max} = \frac{13bh^2\sigma_w}{60}$ (c) $M_{max} = \frac{15\pi d^3\sigma_w}{64}$

5.1-6 $\kappa = \alpha(T_2 - T_1)/h \quad \delta = \alpha L^2(T_2 - T_1)/8h$

5.1-7 $\sigma = 10\ N/mm^2$

5.1-8 $\sigma = 9.06\ N/mm^2$

5.1-9 $\sigma = 76.6\ N/mm^2$（拉力）

5.1-10 $P = 278\ kN$

5.1-11 $\sigma_{max} = 210\ N/mm^2$

5.2-1 $d = 216\ mm$

5.2-2 $b = 296\ mm$

5.2-3 $h = \sqrt{2}b \qquad b = d/\sqrt{3}$

5.2-4 $t = 6\ mm$

5.2-5 356 × 127 × 39 kg UB

5.2-6 (a) $S = 273\ cm^3$ (b) 254 × 102 × 28 kg UB

5.2-7 (a) $S = 63.8\ cm^3$ (b) 127 × 76 × 13.4 kg RSJ

5.2-8 $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{2d_2}{d_1} - \dfrac{d_1}{d_2}$

5.2-9 $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{2\beta - 1}{2 - \beta}$

5.2-10 $\delta = 0.011d$

5.2-11 $\beta = 0.130$

5.3-2 $\tau = 0.45\ N/mm^2$

5.3-3 $P = 43.8\ kN$

5.3-4 $\tau_{max} = 0.588\ N/mm^2$

5.3-5 $P = 3.94\ kN \qquad \sigma = 10.5\ N/mm^2$

5.3-6 $\tau = 42.7\ N/mm^2 \qquad \tau_{approx} = 40.1\ N/mm^2$

5.3-7 $\tau_{max} = 28\ N/mm^2$

5.3-8 $\tau_{max} = 1.92\ N/mm^2$

5.5-1 503 N/mm

5.5-2 69.7 mm 34.8 mm

5.5-3 $s = 136\ mm$

5.5-4 $V = 14.9\ kN$

5.6-1 $\sigma_1 = 0.039\ N/mm^2 \qquad \sigma_2 = -0.687\ N/mm^2 \qquad \theta_p = 76° 39'$ to σ_1

5.6-2 $\sigma_1 = 6.285\ N/mm^2 \qquad \sigma_2 = -0.035\ N/mm^2 \qquad \theta_p = 4° 19'$ to σ_1

5.6-3 (a) $\sigma_1 = 1.05\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = -1.05\ \text{N/mm}^2$ $\theta_p = 45°$ to σ_2
(b) $\sigma_1 = 0.168\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = -3.71\ \text{N/mm}^2$ $\theta_p = 12°$ to σ_2
(c) $\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = -7.09\ \text{N/mm}^2$ $\theta_p = 0°$ to σ_2

5.6-4 (a) $\sigma_1 = 145\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = 0$ $\theta_p = 0°$ to σ_1
(b) $\sigma_1 = 132\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = -0.82\ \text{N/mm}^2$ $\theta_p = -4°30'$ to σ_1
(c) $\sigma_1 = 13.6\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = -13.6\ \text{N/mm}^2$ $\theta_p = -45°$ to σ_1

5.7-1 $\sigma_{max} = 2\sigma_b = \dfrac{64PL}{27\pi d_a^3}$ 在 $x = \dfrac{L}{4}$

5.7-2 $\dfrac{d_b}{d_a} \leq 1.5$

5.7-3 $\sigma_{max} = \dfrac{8PL}{9h^3}$ 在 $x = \dfrac{L}{2}$

5.7-4 (a) $\sigma_{max} = 8.73\ \text{N/mm}^2$ 在 $x = 100\ \text{mm}$
(b) $\tau_{max} = 0.203\ \text{N/mm}^2$ $\tau_{min} = 0.063\ \text{N/mm}^2$

5.7-5 $b = \dfrac{6Px}{h^2\sigma_w}$

5.7-6 $h = x\sqrt{\dfrac{3q}{b\sigma_w}}$

5.7-7 $h = \left[\dfrac{3PL}{2b\sigma_w}\left(1 - \dfrac{4x^2}{L^2}\right)\right]^{1/2}$

5.8-1 $\sigma_w = -5.22\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_s = 68\ \text{N/mm}^2$

5.8-2 $M = 14.4\ \text{kN m}$

5.8-3 $M = 98.3\ \text{kN m}$

5.8-4 $M = 20.8\ \text{kN m}$

5.8-5 $t = 20\ \text{mm}$

5.8-6 $S = 49.5\ \text{mm}^3$

5.9-1 $\sigma_1 = 50.2\ \text{N/mm}^2$ $\tau_{max} = 25.2\ \text{N/mm}^2$

5.9-2 $\sigma_1 = 106\ \text{N/mm}^2$ $\tau_{max} = 73.6\ \text{N/mm}^2$

5.9-3 $\sigma_1 = 12.8\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = -0.032\ \text{N/mm}^2$

5.9-4 $\sigma_1 = 104\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = -3.8\ \text{N/mm}^2$ $\tau_{max} = 53.8\ \text{N/mm}^2$

5.9-5 $\tau_a = 47.9\ \text{N/mm}^2$ $\tau_b = 16.2\ \text{N/mm}^2$ $\tau_c = 18.4\ \text{N/mm}^2$

5.9-6 $\sigma_1 = 57.3\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_2 = -31.7\ \text{N/mm}^2$

5.9-7 $M = qR^2(1 + \cos\theta)$ $V = qR(\pi - \theta)$ $T = qR^2(\pi - \theta - \sin\theta)$

5.10-1 $\sigma_t = \dfrac{8P}{a^2}$ $\sigma_c = -\dfrac{4P}{a^2}$

5.10-2 $\sigma_t = \dfrac{9.11P}{a^2}$ $\sigma_c = -\dfrac{6.36P}{a^2}$

5.10-3 $\alpha = \dfrac{d_1^2 + d_2^2}{4hd_2}$

5.10-4 25.3 N/mm²; −26.1 N/mm²

5.10-5 $P = 80.5$ kN

5.10-6 $s = \dfrac{h^2}{12(L-x)}$

5.10-7 (a) 0.161 N/mm²; −0.216 N/mm² (b) $d = 0.63$ m

5.10-8 $d = 65$ mm

5.10-9 $s = \dfrac{L}{2} + \dfrac{d \tan \alpha}{8}$

5.10-10 142 N/mm²

5.10-11 70 N/mm²; −103 N/mm²

5.10-14 一個正三角形具有同一形心，邊長爲 $b/4$。

5.10-15 一個正三角形與原斷面作 45° 的傾斜，其對角線長度爲 $2b/3$。

5.10-16 一個菱形，其對角線長度等於 153.3 mm 與 31.4 mm。

6.2-2 $\delta = 7.33$ mm

6.2-3 $h = 102$ mm

6.2-4 $h_2/h_1 = 2.02$

6.2-5 $a = 5L/7$

6.2-6 1.0098

6.3-1 $\theta = 4\beta/3$

6.3-2 $\delta/L = 0.0035$

6.3-6 $\delta_c = \dfrac{7qL^4}{192EI}$ $\delta_b = \dfrac{41qL^4}{384EI}$

6.3-7 $y = -Px^3/3EI$

6.4-7 $\theta_a = \dfrac{Pa(L-a)(L-2a)}{6LEI}$ $\delta_1 = \dfrac{Pa^2(L-2a)^2}{6LEI}$ $\delta_2 = 0$

6.5-1 $\delta = \dfrac{97qL^4}{768EI}$ $\theta = \dfrac{85qL^3}{192EI}$

6.5-2 $\theta_a = \dfrac{qL(L^2-2a^2)}{24EI}$

6.5-3 $\delta_b = \dfrac{2PL^3}{9EI}$

6.5-4 $\delta = \dfrac{19PL^3}{384EI}$

6.5-5 (a) $M_0 = \dfrac{PL}{2}$　　(b) $\delta = \dfrac{PL^3}{12EI}$

6.5-6 $a/L = 2/3$

6.5-7 $\delta_2/\delta_1 = n^2$

6.5-8 $\delta_{max} = \dfrac{39PL^3}{1024EI}$

6.5-9 $\delta = \dfrac{3q_0L^4}{1280EI}$

6.5-10 $\theta_{max} = \dfrac{q_0L^3}{10EI}$

6.5-11 $\delta_c = \dfrac{PaL^2}{16EI}$（向上）　$\delta_d = \dfrac{Pa^2(L+a)}{3EI}$（向下）

6.5-12 $\theta_a = \dfrac{PL^2}{24EI}$

6.5-13 $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{3L^2}{16a(a+L)}$

6.5-14 $\delta = \dfrac{5PL^3}{2EI}$

6.5-15 $\delta_b = \dfrac{Pcb^2}{2EI}$　　$\delta_c = \dfrac{Pc^2(c+3b)}{3EI}$

6.6-1 $v = \dfrac{Px}{384EI}(15L^2 - 32x^2) \qquad 0 \le x \le \dfrac{L}{4}$

$v = \dfrac{P}{768EI}(L^3 + 24L^2x - 32x^3) \qquad \dfrac{L}{4} \le x \le \dfrac{L}{2}$

6.6-2 $\theta = \dfrac{5PL^2}{16EI}$

6.6-3 $\delta_c = \dfrac{PL^3}{384EI_1}\left(1 + \dfrac{7I_1}{I_2}\right)$

6.6-4 $\delta_a = \dfrac{qL^4}{128EI_1}\left(1 + \dfrac{15I_1}{I_2}\right)$

6.6-5 $\delta = \dfrac{11PL^3}{64Ebh^3}$

6.6-6 $\delta_b = \dfrac{6.54PL^3}{Ebd_a^3}$

6.6-7 $\delta_b = \dfrac{1.39PL^3}{Etd_a^3}$

6.7-1 $\delta = 0.01331\dfrac{qL^4}{EI}$

6.7-2 $\delta = 0.02344 \dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-3 $\delta = 0.0137 \dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-4 $\delta = 0.352 \dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-5 $\delta = 0.1328 \dfrac{qL^4}{EI}$

6.7-6 $\delta_b = 0.0368 \dfrac{q_0 L^4}{EI}$

6.7-7 $\delta_c = 0.0122 \dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-8 $\delta_b = 0.548 \dfrac{PL^3}{EI_a}$

6.8-1 $U = \dfrac{bhL\sigma_{max}^2}{6E}$

6.8-2 $U = \dfrac{P^2L^3}{96EI}$

6.8-3 $U = \dfrac{\pi^4 EI\,\delta^2}{4L^3}$

6.8-4 $U = \dfrac{P^2L^3}{48EI}$

6.8-5 $U_1/U_2 = 1/8$

6.8-6 $U = 9$ N m

6.8-7 $\sigma_{max} = \left(\dfrac{18WhE}{AL}\right)^{1/2}$

6.8-8 152 × 89 × 17.1 kg RSJ

6.9-1 $\delta_b = \dfrac{qL^4}{8EI}\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right)$ 但 $\beta = \dfrac{kL^3}{3EI}$; 穩定，當 $\beta < 1$.

6.9-2 $\delta = \dfrac{\delta_0}{1-\gamma}$ 但 $\gamma = \dfrac{kL^3}{48EI}$; 穩定，當 $\gamma < 1$.

6.9-3 在中心處的撓度 $= \dfrac{PL^3}{48EI}\psi_2$ 但 $\psi_2 = \dfrac{12}{a^3L^3}\left(\tan\dfrac{aL}{2} - \tanh\dfrac{aL}{2}\right)$;

穩定，當 $\dfrac{a^4L^4}{\pi^4} < 1$.

6.10-1 $v = \dfrac{\alpha(T_2 - T_1)(x)(L-x)}{2h}$

6.10-2 $\delta = \dfrac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2h}$ $\theta = \dfrac{\alpha(T_1 - T_2)L}{h}$

6.10-3 $v_{max} = \frac{\alpha T_0 L^3}{9\sqrt{3}h}$

7.2-2 $\delta_{max} = 0.00542 \frac{qL^4}{EI}$ 在 $x = 0.5785L$

7.2-5 $v = \frac{qx^2(L-x)^2}{24EI}$

7.2-6 $R_a = -R_b = \frac{3M_0}{2L}$ $M_a = \frac{M_0}{2}$ $v = \frac{M_0 x^2(L-x)}{4LEI}$

7.2-7 $v = \frac{q_0 x^2}{120LEI}(4L^3 - 8L^2x + 5Lx^2 - x^3)$ $R_a = \frac{2q_0 L}{5}$

$R_b = \frac{q_0 L}{10}$ $M_a = \frac{q_0 L^2}{15}$

7.2-8 $R_a = R_b = \frac{q_0 L}{4}$ $M_a = M_b = \frac{5q_0 L^2}{96}$

$v = \frac{q_0 x^2}{960LEI}(25L^3 - 40L^2x + 16x^3)$ $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

7.2-9 $v = \frac{q_0 x^2}{120LEI}(3L^3 - 7L^2x + 5Lx^2 - x^3)$ $R_a = \frac{7q_0 L}{20}$

$R_b = \frac{3q_0 L}{20}$ $M_a = \frac{q_0 L^2}{20}$ $M_b = \frac{q_0 L^2}{30}$

7.3-3 $R_a = \frac{9q_0 L}{40}$ $R_b = \frac{11q_0 L}{40}$ $M_a = \frac{7q_0 L^2}{120}$

7.3-4 $R_a = \frac{P}{16L}(11L - 24a)$ $R_b = \frac{3P}{16L}(7L + 8a)$ $M_a = \frac{P}{16}(3L - 8a)$

7.3-5 $R_a = \frac{qL}{8}$ $R_b = \frac{33qL}{16}$ $R_c = \frac{13qL}{16}$

7.3-6 $T = \frac{3qAL^4}{8AL^3 + 24hI}$

7.3-7 $F = \frac{5PI_2}{2(I_1 + I_2)}$

7.3-8 $R_a = \frac{31qL}{48}$ $R_b = \frac{17qL}{48}$ $M_a = \frac{7qL^2}{48}$

7.3-9 $R_a = R_d = \frac{2qL}{5}$ $R_b = R_c = \frac{11qL}{10}$

7.3-11 $R_a = \frac{13qL}{30}$ $R_b = \frac{13qL}{20}$ $R_c = -\frac{qL}{10}$ $R_d = \frac{qL}{60}$

7.3-12 $\Delta = \frac{7qL^4}{72EI}$

7.3-13 $H_a = qL \qquad V_c = -V_a = \dfrac{qL}{8} \qquad M_a = \dfrac{3qL^2}{8}$

7.3-14 $M_a = \dfrac{4EI\theta}{L} \qquad M_b = \dfrac{2EI\theta}{L} \qquad R_a = -R_b = \dfrac{6EI\theta}{L^2}$

7.3-15 $M_a = M_b = \dfrac{6EI\,\Delta}{L^2} \qquad R_a = -R_b = \dfrac{12EI\,\Delta}{L^3}$

7.4-4 $R_a = \dfrac{4P}{3} \qquad R_b = \dfrac{2P}{3} \qquad M_a = \dfrac{PL}{3}$

7.4-6 $\delta = \dfrac{qL^4}{384EI}$

7.4-7 $R_a = R_b = P \qquad M_a = M_b = \dfrac{Pa(L-a)}{L}$

7.4-8 $M_a = M_b = \dfrac{5PL}{48}$

7.5-1 $R_b = 0.386qL$

7.5-2 $M_a = 0.0540q_0L^2$

7.5-3 $M_a = M_b = \dfrac{PL}{8}$

7.5-4 $R_b = 1.99qL$

7.6-3 $M = -\dfrac{qL^2}{8} + \dfrac{3EI\,\Delta}{L^2}$

7.6-4 $M_2 = M_3 = -\dfrac{3PL}{20} \qquad R_1 = R_4 = \dfrac{7P}{20} \qquad R_2 = R_3 = \dfrac{23P}{20}$

7.6-5 $M_2 = -\dfrac{qL^2}{15} \qquad M_3 = \dfrac{qL^2}{60}$

7.6-6 $M_2 = M_4 = -\dfrac{3qL^2}{28} \qquad M_3 = -\dfrac{qL^2}{14} \qquad R_1 = R_5 = \dfrac{11qL}{28}$

$R_2 = R_4 = \dfrac{8qL}{7} \qquad R_3 = \dfrac{13qL}{14}$

7.6-7 $M_1 = -15$ kN m $\qquad M_2 = -24.9$ kN m $\qquad M_3 = -38.9$ kN m

7.6-8 $M_1 = 3M_2 = -\dfrac{3qL^2}{28}$

7.6-9 $M_2 = M_7 = -\dfrac{qL^2}{284} \qquad M_3 = M_6 = \dfrac{qL^2}{71} \qquad M_4 = M_5 = -\dfrac{15qL^2}{284}$

7.6-10 $M_1 = -277$ kN m $\qquad M_2 = -167$ kN m $\qquad M_3 = 90$ kN m

7.7-1 $M_a = R_aL = -R_bL = \dfrac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2h}$

7.7-2 $R_b = -2R_a = -2R_c = \dfrac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{hL}$

7.7-3 $S = \frac{48EIAH\alpha T}{AL^3 + 48IH}$

7.8-1 $\lambda = \frac{17q^2L^7}{40{,}320E^2I^2}$

7.8-2 $H = \frac{\pi^2 EA\,\delta^2}{4L^2}$

8.1-2 $\beta = 75°\,58'$ $\sigma_{max} = 11.3$ N/mm^2

8.1-3 一個橢圓，其軸半徑爲 $\frac{PL^3}{3EI_z}$ 與 $\frac{PL^3}{3EI_y}$

8.1-4 $\sigma_{max} = 8$ N/mm^2

8.1-5 $\sigma_{max} = 5.09$ N/mm^2

8.1-6 $\sigma_{max} = 105$ N/mm^2 $\delta = 17.3$ mm

8.1-7 $\sigma_{max} = 4.62$ N/mm^2 $\delta_{vert} = 3.41$ mm

8.1-8 $\sigma_{max} = 7.80$ N/mm^2 $\delta_{vert} = 13.6$ mm $\delta_{horiz} = 6.9$ mm

8.2-1 $M_z = \frac{\pi r^3 \sigma_w}{8}$

8.2-2 $\sigma_t = 45.2$ N/mm^2 $\sigma_c = -31.2$ N/mm^2

8.2-3 $\sigma_a = -\sigma_b = \frac{24M_z}{bh^2}$ $\sigma_d = 0$ 直線 CD 爲其中和軸

8.2-4 $\sigma_{max} = 71.1$ N/mm^2

8.2-5 $\sigma_a = 160$ N/mm^2

8.2-6 $M_{max} = 6.32$ kN m

8.2-7 $\sigma_{max} = -23.8$ N/mm^2 at point B

8.4-1 (a) $\tau_{max} = 1.27$ N/mm^2（向上） (b) $\tau_b = 0.112$ N/mm^2（向左）

8.4-3 $\tau_{max} = \frac{3P}{4bt_f}$

8.4-4 $\tau_{max} = \frac{3b_1^2P}{2(t_1b_1^3 + t_2b_2^3)}$

8.4-5 $\tau_{max} = \frac{3P}{2t_1b_1}$

8.5-1 $\tau_1 = 13.7$ N/mm^2 $\tau_2 = 20.4$ N/mm^2 $\tau_{max} = 30.2$ N/mm^2 $e = 31.4$ mm

8.5-3 $e = \frac{2r(\sin\beta - \beta\cos\beta)}{\beta - \sin\beta\cos\beta}$

8.5-4 $e = \frac{3(b_2^2 - b_1^2)}{h + 6(b_1 + b_2)}$

8.5-5 $e = \dfrac{4r^2 + 2b^2 + 2\pi br}{4b + \pi r}$

8.5-6 $e = \dfrac{3b^2(h_1^2 + h_2^2)}{h_2^3 + 6b(h_1^2 + h_2^2)}$

8.5-7 $e = \dfrac{b(2h - 3b)}{2h + 6b}$

8.5-8 $e = \dfrac{b(2h + 3b)}{8h + 6b}$

8.5-9 $e = \dfrac{b(3bh^2 + 6ah^2 - 8a^3)}{h^3 + 6bh^2 + 6ah^2 + 8a^3 - 12a^2h}$

8.5-10 $e = \dfrac{b(3bh^2 + 6ah^2 - 8a^3)}{h^3 + 6bh^2 + 6ah^2 + 8a^3 + 12a^2h}$

8.5-11 $\sigma_t = 57.4\ \text{N/mm}^2$ $\sigma_c = -74.2\ \text{N/mm}^2$

9.3-1 $M_p = 968\ \text{kN m}$

9.3-2 $h_1 = 75\ \text{mm}$ $M_p = 289\ \text{kN m}$

9.3-3 $Z = 329 \times 10^3\ \text{mm}^3$

9.3-4 $M_p = 112\ \text{kN m}$

9.3-5 $f = \dfrac{16}{3\pi} \approx 1.70$

9.3-6 $f = 2$

9.3-7 (a) $f = \dfrac{16r_1}{3\pi}\dfrac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^4 - r_2^4}$ (b) $f = \dfrac{4}{\pi} \approx 1.27$

9.3-8 $f = 1.125$

9.3-9 $e = h\sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{M}{2M_y}}$

9.3-10 (a) $M = 145\ \text{kN m}$ (b) $\kappa = 7.54 \times 10^{-6}/\text{mm}$

9.3-11 $\dfrac{M}{M_y} = 2 - 2\left(\dfrac{\kappa_y}{\kappa}\right)^2 + \left(\dfrac{\kappa_y}{\kappa}\right)^3$

9.4-1 $L_p = L\sqrt{1 - 1/f}$

9.5-1 (a) $P_u = \dfrac{M_p}{L}$ (b) $P_u = \dfrac{3M_p}{L}$

9.5-2 $q_u = 156\ \text{kN/m}$

9.5-3 (a) $\dfrac{d_2}{d_1} = \left(1 - \dfrac{b}{L}\right)^{1/3}$ (b) $b = 0.54L$

9.5-4 (a) $P_u = \dfrac{M_p(2L - b)}{b(L - b)}$ (b) $b = 0.59L$

9.5-5 (a) $P_u = \frac{8M_p}{L}$ (b) $\frac{P_u}{P_y} = \frac{M_p}{M_y}$

9.5-6 (a) $q_u = \frac{16M_p}{L^2}$ (b) $\frac{q_u}{q_y} = \frac{4M_p}{3M_y}$

9.5-7 $P_u = \frac{4M_p}{L}$

9.5-8 (a) For $\beta \geq \frac{1}{4}$, $P_u = \frac{2M_p}{\beta L}$; 當 $\beta \leq \frac{1}{4}$, $P_u = \frac{6M_p}{(1-\beta)L}$

(b) $\beta = \frac{1}{4}$

9.5-9 $P_u = \frac{9M_p}{2L}$

9.5-10 (a) $q_u = \frac{16M_p}{L^2}$ (b) $q_u = \frac{11.66M_p}{L^2}$

9.5-11 $P_u = \frac{16M_p}{3L}$

9.5-12 $P_u = \frac{4M_p}{R}$

9.7-1 $M = 2.77$ kN m

9.7-2 (a) $h_1 = 187.5$ mm; $h_2 = 112.5$ mm (b) $\sigma_1 = 6.4$ N/mm^2; $\sigma_2 = -10.7$ N/mm^2
(c) $\rho = 263.67$ m

9.7-3 $M_{max} = 220$ kN m

9.7-4 $M = \frac{bh^2}{6}(B_1\epsilon_1)\left(1 - \frac{3B_2\epsilon_1}{4B_1}\right)$

9.7-6 $M = \frac{\sigma_1 bh^2}{6}\frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$

9.7-7 $\theta = \frac{50P^2L^3}{3B^2b^2h^5}$ $\delta = \frac{25P^2L^4}{2B^2b^2h^5}$

9.8-1 (b) $\sigma_y/2$ (c) $-\sigma_y$ (d) M_p; 1.5

9.8-2 (a) $M = M_y(1+\beta)$ (b) $0 \leq \beta \leq \frac{M_p}{M_y} - 1$

10.1-2 $\delta = e(\sec kL - 1)$ $M_{max} = Pe \sec kL$

10.1-3 $\sigma_c = 99.4$ N/mm^2

10.1-4 $\sigma_c = 74.0$ N/mm^2

10.1-5 $\delta = 1.51$ mm $\sigma_t = 8.94$ N/mm^2 $\sigma_c = 11.7$ N/mm^2

10.1-6 $P_y = 408$ kN

10.1-7 $P_y = 18.7$ kN

10.2-3 $\dfrac{P_c}{P_s} = \dfrac{3}{\pi} = 0.955$

10.2-4 $P_{cr} = 558$ kN

10.2-5 $P_{cr} = 250$ kN

10.2-6 $P_{cr} = 537$ kN

10.2-7 $\Delta T = \pi^2 I/\alpha A L^2$

10.2-8 254 × 254 × 167 kg UC

10.2-9 102 × 102 × 17.4 mm 角

10.2-10 $t = 4.2$ mm

10.2-11 $Q = 3\pi^2 EI/4H^2$

10.2-12 $P_{cr} = 36.1 EI/L^2$

10.2-13 $\theta = \arctan \cot^2 \beta$

10.3-1 $L = 716$ mm

10.3-2 $\sigma_{cr} = 45.7$ N/mm²

10.3-3 $L = 1.24$ m

10.3-4 $\sigma_{cr} = 137$ N/mm²

10.3-5 51.4 N/mm², 32.9 N/mm², 22.8 N/mm²

10.3-6 $\sigma_{cr} = 85.2$ N/mm² $P = 466$ kN

10.3-7 $L = 5.15$ m

10.4-1 將（10－12）式中的 L 改用 $L/2$

10.4-2 $\sigma_{max} = 107$ N/mm² $n = 2.39$

10.4-3 $P = 44$ kN

10.4-4 $P = 181$ kN

10.4-5 $P = 94.5$ kN

10.4-6 $P_2 = 394$ kN

10.5-2 將（10 - 17）式中的 a/L 改用 $a\sqrt{3}/L$。

10.5-3 $\sigma_{max} = 200$ N/mm² $n = 1.20$

10.5-4 $P = 125$ kN

10.5-5 $P = 73.4$ kN

11.3-1 $\delta_V = \dfrac{2PL}{EA}$（向下） $\delta_H = 0$ $\theta_{ab} = \dfrac{\sqrt{3}P}{EA}$（順時針走向）

11.3-2 $\delta_V = \alpha L(\Delta T)$（向下）　$\delta_H = \dfrac{\alpha L(\Delta T)}{\sqrt{3}}$（向右）

$\theta_{ab} = \dfrac{\alpha(\Delta T)}{\sqrt{3}}$（順時針走向）

11.3-3 $\delta_V = 0.21$ mm（向下）　$\delta_H = 0.12$ mm（向右）

11.3-4 7.20 mm

11.3-5 $\delta_V = 6.22\dfrac{Pb}{EA}$（向下）

11.3-6 $1.85\dfrac{Pb}{EA}$

11.3-7 $\delta_V = 2.33$ mm（向下）　$\delta_H = 0.742$ mm（向右）
$\theta_{bc} = 39.8 \times 10^{-6}$ rad（反時針走向）

11.3-8 0.0375 mm

11.3-11 $\delta = \dfrac{2PL^3}{9EI}$　$\theta = \dfrac{5PL^2}{18EI}$

11.3-12 $\delta_c = \dfrac{Pb^2(L-b)}{3EI}$　$\theta_c = \dfrac{Pb(2L+3b)}{6EI}$

11.3-13 $\delta = \dfrac{PbL^2}{16EI}$　$\theta = \dfrac{PbL}{6EI}$

11.3-14 $\theta = \dfrac{\alpha(T_2-T_1)(L+2b)}{2h}$（反時針走向）

11.3-18 $\delta = \dfrac{2PL^3}{3EI}$

11.3-19 $\delta_H = \dfrac{PHL^2}{8EI_2}$（向左）　$\theta = \dfrac{PL^2}{16EI_2}$（順時針走向）

11.3-20 $\delta_H = \dfrac{2QH^3}{3EI_1} + \dfrac{QLH^2}{EI_2}$　$\theta = \dfrac{QH^2}{2EI_1} + \dfrac{QHL}{2EI_2}$

11.3-21 $\theta = \dfrac{33Pb^2}{2EI}$

11.3-22 $\Delta = \dfrac{2PL^3\sin^2\beta}{3EI} + \dfrac{2PL\cos^2\beta}{EA}$

11.3-23 $\delta_H = \dfrac{\alpha H^2(T_2-T_1)}{2h}$（向左）　$\delta_V = \dfrac{\alpha L(L+2H)(T_2-T_1)}{2h}$（向上）

$\theta = \dfrac{\alpha(H+L)(T_2-T_1)}{h}$（反時針走向）

11.3-24 $\delta = \dfrac{PL^3(n)(4n^2+3n+1)}{6EI}$

11.3-25 $\delta_V = \dfrac{\pi PR^3}{4EI}$ $\theta = \dfrac{PR^2}{EI}$

11.3-26 $\delta_V = \dfrac{3\pi PR^3}{2EI}$

11.3-27 $\Delta = \dfrac{P}{6EI}(4L^3 + 6\pi L^2 R + 24LR^2 + 3\pi R^3)$

11.3-28 $M_{max} = \dfrac{2EIe}{3\pi R^2}$

11.3-29 $\delta_V = \dfrac{\pi PR^3}{4EI} + \dfrac{(3\pi - 8)PR^3}{4GJ}$

11.3-30 $\phi = \dfrac{\pi PR^2}{4EI} + \dfrac{(\pi - 4)PR^2}{4GJ}$

11.3-31 $\delta = 52.2$ mm $\phi = 0.0099$ rad

11.3-32 $\Delta = \dfrac{5PL^3}{6EI} + \dfrac{3PL^3}{2GJ}$

11.6-1 $X_1 = \dfrac{3PL}{28}$ $X_2 = \dfrac{17P}{14}$

11.6-2 $X_1 = -\dfrac{5qL^2}{608}$ $X_2 = -\dfrac{33qL^2}{152}$

11.6-3 $X_2 = 2X_1 = -\dfrac{qL^2}{12}$

11.6-4 $N_1 = N_2 = N_3 = 0.396P$ $N_4 = -0.604P$ $N_5 = 0.854P$
$N_6 = -0.561P$

11.6-5 $N_{ab} = -95.5$ kN

11.6-6 $X_1 = -0.521P$ $X_2 = -0.376P$

11.6-7 $X_1 = 1.76$ kN $X_2 = 0.34$ kN

11.6-8 $R_c = \dfrac{3qL}{8}\dfrac{L+4H}{L+3H}$

11.6-9 $R_1 = R_4 = \dfrac{Pb(L-b)}{2HL}\dfrac{3LI_2}{3LI_2 + 2HI_1}$ $R_2 = \dfrac{P(L-b)}{L}$ $R_3 = \dfrac{Pb}{L}$

11.6-10 $H_a = \dfrac{P}{8}$ $V_a = \dfrac{P}{2}$ $M_a = -\dfrac{PL}{24}$

11.6-11 $H_d = -\dfrac{P}{2}$ $V_d = \dfrac{3P}{14}$ $M_d = \dfrac{PL}{7}$

11.6-12 $M_a = \dfrac{PR}{2}\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right)$ $M_b = \dfrac{PR}{\pi}$

11.6-13 $H_d = 28$ kN $V_d = 22.8$ kN $M_d = 67$ kN m

11.7-1 $D = \dfrac{PL^3}{12EI} \qquad M_b = \dfrac{5PL}{18}$

11.7-2 $D_1 = \dfrac{3PL^2}{16EI} \qquad D_2 = -\dfrac{3PL^2}{32EI} \qquad R_a = \dfrac{13P}{8} \qquad M_a = \dfrac{PL}{2}$

11.7-3 $D_1 = -\dfrac{PL^2}{36EI} \qquad D_2 = -\dfrac{5PL^3}{36EI} \qquad M_a = \dfrac{5PL}{72} \qquad M_c = \dfrac{7PL}{72}$

11.7-4 $D = \dfrac{PL^2H}{32EI(L+H)} \qquad R_1 = \dfrac{3PL^2}{16H(L+H)} \qquad R_2 = \dfrac{P(8L+11H)}{16(L+H)}$

$M_1 = \dfrac{PL(2L+3H)}{16(L+H)}$

11.7-5 $R_a = \dfrac{37P}{60} \qquad R_b = \dfrac{49P}{120} \qquad R_c = -\dfrac{23P}{60} \qquad M_a = \dfrac{59PL}{360}$

11.7-6 $R_a = \dfrac{39P}{64} \qquad R_b = \dfrac{1049P}{576} \qquad R_c = \dfrac{427P}{576} \qquad M_a = \dfrac{31PL}{192}$

11.7-7 $H_a = \dfrac{27P}{448} \qquad V_a = \dfrac{31P}{56} \qquad M_a = \dfrac{PL}{7} \qquad H_d = -\dfrac{27P}{224}$

$V_d = \dfrac{3P}{2} \qquad M_d = \dfrac{3PL}{112}$

11.7-8 $R_1 = \dfrac{45qL}{28} \qquad R_2 = -\dfrac{3qL}{7}$

11.9-1 (a) $U = \dfrac{EA\,\delta^2}{2L}(1 + 2\cos^3\beta) \qquad$ (b) $\delta = \dfrac{PL}{EA}\,\dfrac{1}{1+2\cos^3\beta}$

(c) $N_{ad} = N_{cd} = \dfrac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta} \qquad N_{bd} = \dfrac{P}{1+2\cos^3\beta}$

11.11-1 (a) $\delta = \dfrac{PL^3}{64EI} \qquad$ (b) $\delta = \dfrac{PL^3}{48EI}$

11.11-2 (a) $\delta = \dfrac{4qL^4}{\pi^5 EI} \qquad$ (b) $\delta = \dfrac{968qL^4}{243\pi^5 EI}$

11.11-3 $\delta = \dfrac{PL^3}{2\pi^4 EI}$

11.11-4 (a) $\delta = \dfrac{PL^3}{96EI} \qquad$ (b) $\delta = \dfrac{PL^3}{90EI}$

11.11-6 (a) $P_{cr} = \dfrac{12EI}{L^2} \qquad$ (b) $P_{cr} = \dfrac{168EI}{17L^2}$

11.11-7 $P_{cr} = 1.82\dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

11.12-3 $\delta = \dfrac{L}{B\sin\beta}\left(\dfrac{P}{2A\sin\beta}\right)^n$

11.12-5 $\delta = \dfrac{\gamma^n L^{n+1}}{B(n+1)}$

A.2-1 $\bar{y} = 27.5$ mm

A.2-2 $c^2 = ab/2$

A.2-3 $\bar{x} = \bar{y} = 5a/12$

A.2-4 $\bar{x} = 49.5$ mm $\quad \bar{y} = 24.5$ mm

A.3-2 $I = \dfrac{bh^3}{4}$

A.3-3 $I = \dfrac{a^4}{12}$

A.3-5 $I = \dfrac{a^3b^3}{6(a^2+b^2)}$

A.3-6 $r_x = \dfrac{h}{2\sqrt{3}} \quad r_y = \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$

A.4-2 $J = \dfrac{bh}{48}(b^2 + 12h^2)$

A.5-2 $J = \dfrac{\pi ab}{4}(b^2 + 2a^2)$

A.5-3 $I = (4h^4 - 3h^2h_1^2 - h_1^4)/12$

A.5-4 $I = 204 \times 10^6$ mm^4

A.5-5 $I = 3.85 \times 10^6$ mm^4

A.6-1 $I_{xy} = r^4/8$

A.6-2 $I_{xy} = r^4/8$

A.6-3 $b = 2r$

A.6-4 $I_{xy} = 3.03 \times 10^6$ mm^4

A.6-5 $I_{12} = -7.68 \times 10^6$ mm^4

A.7-1 $I_{x_1} = I_{y_1} = \dfrac{b^4}{12} \quad I_{x_1y_1} = 0$

A.7-2 $I_{x_1} = \dfrac{a^3b^3}{6(a^2+b^2)} \quad I_{y_1} = \dfrac{ab(a^4+b^4)}{12(a^2+b^2)}$

$I_{x_1y_1} = \dfrac{a^2b^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)}$

A.8-1 $\theta_p = 60° 08'$, $I_2 = 34.7 \times 10^6$ mm^4 $\quad \theta_p = 150° 08'$, $I_1 = 122 \times 10^6$ mm^4

A.8-2 $\theta_p = 13° 31'$, $I_2 = 7.79 \times 10^6$ mm^4 $\quad \theta_p = 103° 31'$, $I_1 = 29.71 \times 10^6$ mm^4

A.8-3 $\theta_p = 67° 30'$, $I_1 = 14 \times 10^6$ $\theta_p = 157° 30'$, $I_2 = 2.6 \times 10^6$ mm^4

A.8-4 $\theta_p = 75° 38'$, $I_1 = 3.7 \times 10^6$ $\theta_p = 165° 38'$, $I_2 = 0.39 \times 10^6$ mm^4

A.8-5 $\theta_p = 22° 09'$, $I_1 = 110 \times 10^6$ $\theta_p = 112° 09'$, $I_2 = 9.7 \times 10^6$ mm^4

A.8-6 $\theta_p = 31° 37'$, $I_1 = 9.9 \times 10^6$ $\theta_p = 121° 37'$, $I_2 = 0.11 \times 10^6$ mm^4

人名索引

Andrews, E. S., 528, 538
Argyris, J. H., 539
Au, T., 538

Bach, C., 530
Baker, J. F., 532
Barrett, C. S., 532
Barten, H. J., 529
Basu, P., 529
Beedle, L. S., 531, 532
Belykov, V. M., 529
Bendixen, A., 455, 536
Bernoulli, Daniel, 526, 528
Bernoulli, Jacob (1654–1705), 5, 135, 193, 235, 523, 526, 528
Bernoulli, Jacob (1759–1789), 527
Bernoulli, John, 398, 526–527, 533
Bertot, H., 272, 530
Betti, E., 430, 534–535
Bisshopp, K. E., 529
Bleich, F., 533
Borg, S. F., 536
Born, Max, 528
Bredt, R., 97, 525
Bresse, J. A. C., 177, 526
Brown, D. M., 528, 533
Brown, E. H., 539

Cajori, F., 527
Campbell, L., 534
Caslin, J. C., 529
Castigliano, C. A. P., 468, 507, 528–529, 536–537, 538
Cauchy, A. L., 67, 525
Charlton, T. M., 539
Clapeyron, B. P. E., 272, 530
Clebsch, A., 455, 536
Coulomb, C. A., 87, 135, 525
Cowper, G. R., 527
Crotti, F., 493, 501, 538
Culmann, K., 155, 526

Dally, J. W., 525
da Vinci, Leonardo, 1
Didion, I., 524
Drucker, D. C., 529
Duncan, W. J., 531

Eisley, J. G., 529
Ellis, C. A., 528, 533
Emde, F., 529
Engesser, F., 493, 501, 538–539
Euler, L., 1, 17, 135, 193, 235, 376, 526, 528, 533–534

Fazakas, G. A., 526
Fell, E. W., 524
Fermat, P., 533
Fettis, H. E., 529
Flügge, W., 525, 532
Frisch-Fay, R., 235, 529

Galilei, Galileo, 1, 135
Garnett, W., 534
Gennaro, J. J., 536
Gere, J. M., 526–527, 528, 532–533, 536
Girard, P. S. 135
Goldsmith, W., 524
Goodier, J. N., 524
Greenberg, H. J., 532
Greene, C. E., 202, 527
Griffith, A. A., 530–531
Grüning, M., 538

Hall, A. S., 536
Hauff, E., 537
Hetényi, M., 525, 532
Heyman, J., 532
Hildebrand, F. B., 527
Hill, H. N., 531
Hodge, P. G., Jr., 532
Hoff, N. J., 534, 538
Hooke, Robert, 7, 523
Horger, O. J., 532
Horne, M. R., 532
Howard, J. N., 536
Huber, A. W., 532

Jacobs, J. A., 531
Jahnke, E., 529
Jevons, J. D., 524
Johnston, B. G., 532, 534
Jourawski, D. J., 145, 526

Kelsey, S., 539
Kelvin, Lord (William Thomson), 535
Kirchoff, G. R., 239, 479, 529, 538
Koiter, W. T., 531
Kravtsova, P. I., 529
Kuenzi, E. W., 526

Lagrange, J. L., 235, 528
Langhaar, H. L., 539
L'Hôpital, G. F. A. de, 527
Libove, C., 539
Lindsay, R. B., 535
Love, A. E. H., 523
Lüders, W., 52–53, 524

Maillart, R., 531
Maki, A. C., 526
Mandel, J., 531
Mariotte, E., 135
Martin, H. C., 536
Massonnet, C. E., 531
Maxwell, J. C., 403, 428, 437, 534
McLean, L., 480, 501, 524
Menabrea, L. F., 507, 537, 539
Miller, F. H., 529
Mohr, O. C., 61–62, 202, 403, 43 524–525, 527, 534, 536
Moody, M. L., 527
Morin, A. J., 524

Nadai, A., 532
Navier, L. M. H., 17, 254, 455, 524, 527, 529
Neal, B. G., 532
Newman, J. R., 527, 533
Niven, W. D., 534
Norris, C. H., 536
Nowinski, J. L., 531

Oden, J. T., 538
Oldfather, W. A., 528, 533

Oran, C., 539
Oravas, G. A., 480, 501, 524, 528–529, 537, 538
Osgood, W. R., 531
Ostenfeld, A., 455, 536

Parent, A., 135
Pearson, K., 523, 526
Phillips, A., 531–532
Piobert, G., 52–53, 524
Plana, G. A. A., 235, 528
Plantema, F. J., 526
Poisson, S. D., 9, 61, 523
Poncelet, J. V., 5, 36, 233, 523
Prager, W., 532
Przemieniecki, J. S., 539

Ramsay, Sir William, 535
Rankine, W. J. M. 67, 525
Ranov, T., 526
Rappoport, M. G., 529
Rayleigh, Lord (John William Strutt), 430, 481, 535, 536
Reddick, H. W., 529
Riley, W. F., 525
Ritz, W., 481, 538
Rohde, F. V., 529
Rojahn, C., 236, 529
Routh, E. J., 535

Saint-Venant, Barré de, 67, 87, 135, 202, 525, 526, 527, 529
Salama, A. E., 527
Save, M. A., 531
Sawyer, D. A., 527
Schwalbe, W. L., 531
Sidebottom, O. M., 532
Smith, J. O., 532
Southwell, R. V., 529
Stokes, G. G., 535
Struik, D. J., 527
Strutt, J. W. (*see* Rayleigh Lord)
Strutt, R. J., 535–536
Symonds, P. S., 532

Tall, L., 532
Taylor, G. I., 530–531
Thomson, William (*see* Kelvin, Lord)
Timoshenko, S. P., 523, 524, 525–526, 530, 531, 532–533, 536
Todhunter, I., 523, 526
Treffiz, E., 531
Turner, T. H., 524

Van den Broek, J. A., 534

Weaver, W., Jr., 536
Weber, C., 531
Westergaard, H. M., 501, 539,
Wilbur, J. B., 536
Williot, J. V., 12
Wolko, H. S., 526
Woodhead, R. W., 536

Yang, C. H., 532
Young, D. H., 524, 534, 536
Young, Thomas, 7, 87, 523, 525

Zaslavsky, A., 530
Zienkiewicz, O. C., 538

名詞索引

Allowable loads, 6, 28, 327, 347
Allowable stress design, 6, 137, 347
Allowable stresses, 6, 137
  in columns, 381, 385, 387
  in shear, 30
Aluminium, properties of, 5, 8, 22
Angle of twist, 85, 97
Angle sections, tables of, 568, 569
  shear centre of, 309
Areas, properties of, 540–556
  table of, 561–563
Axial loads, 2, 8, 9
  in beams, 110, 172, 279
  (*see also* Columns)
Axial rigidity, 8

Beam deflections, 190–239
  by complementary energy, 492
  by finite-difference method, 214
  by moment-area, 200
  by Rayleigh-Ritz method, 481
  by strain energy, 503
  by successive integration, 192, 194, 199, 251
  by superposition, 205
  by unit-load method, 405, 412, 497, 505
  due to impact, 220
  due to ponding, 222
  due to shear, 223, 410
  due to temperature, 225, 406
  effect on chord length, 277
  for inelastic beams, 347, 358
  for nonlinear beams, 490, 492, 497
  for nonprismatic beams, 211, 214, 486
  for unsymmetrical bending, 291, 294
  large, 234
  tables of, 571–575
Beams, 108
  built-up, 150
  composite, 163
  design of, 137, 161, 347
  inelastic, 327–360
  lateral strains in, 132
  nonlinear, 465, 490, 493, 498
  nonprismatic, 156, 211, 486
  of thin-walled open section, 300, 307
  of two materials, 163
  principal stresses in, 153, 171
  sandwich, 163, 169, 234
  shapes of, 135, 137
  shear stresses in, 141, 158, 300
  statically determinate, 109
  strains in, 132
  stresses in, 130
  types of, 108, 249
  unsymmetrical, 291, 297
  wedge, 162
  with axial loads, 110, 172, 279
  with immovable supports, 279
  with load proportional to deflection, 222
  with skew loads, 289
  with torsion, 170
  (*see also* Beam deflections; Continuous beams Statically indeterminate beams)
Bearing stresses, 29
Bending, inelastic, 327–360
  nonlinear, 458
  plastic, 329–351
  pure, 130, 291
  unsymmetrical, 289–320
  with axial loads, 172, 279, 368, 416
  with torsion, 170
  (*see also* Beams)
Bending moment, 110–124
  sign convention for, 111
Bending moment diagrams, 116–124
Betti-Rayleigh reciprocal theorem, 430
Biaxial stress, 55
  Mohr's circle for, 61
Bimetallic bars, 46, 91, 163
Brass, properties of, 8
Bredt's formulas, 96–97
Brittle materials, 5, 6
Bronze, properties of, 8
Buckling, 368–391
  in torsion, 98
  inelastic, 373, 378, 381, 390
  lateral, 138
  local, 376
  (*see also* Columns)
Bucking equation, 379

Built-up beams, 151
Bulk modulus of elasticity, 74

Camber, 225, 508
Cantilever beams, 109, 198
large deflections of, 234
table of, 571–572
Cast iron, properties of, 5, 8
Castigliano's first theorem, 467, 537
Castigliano's second theorem, 502, 537
Centre of curvature, 131, 191
Centre of shear (*see* Shear centre)
Centroidal principal axes, 554
Centroids, 540–544
table of, 561–563
Chalk, torsional failure of, 86
Channel beams, 137, 138
shear centre of, 308, 317
shear stresses in, 307, 317
table of, 567
unsymmetrical, 317
Circular beams, 135, 138
shear centre of, 299
shear stresses in, 148
Coefficient of thermal expansion, 22
Collapse mechanism, 340
Column formulas, 388
Columns, 368–390
critical loads for, 369, 373
design of, 381, 385, 388
effective length, 382
failure of, 374, 382
imperfections in, 385
inelastic, 373, 378, 381, 390
Rayleigh-Ritz method for, 488
secant formula for, 382
short, 172
stresses in, 380
with eccentric axial loads, 368
with initial deflections, 385
Compatibility equations, 15, 257, 431, 500, 505
Compatibility method, 437
Complementary energy, 457–466/492–502
deflections found by, 492, 494
minimum, 501
relation to force method, 499
relation to unit-load method, 494
structural analysis by, 499
Complementary work, 460
Composite beams, 163
Compression, 3
hydrostatic, 73
Concrete, properties of, 5, 8, 22
Conjugate beam method, 508
Continuous beams, 251, 258, 268
flexibility method for, 432, 437
stiffness method for, 450, 454
three-moment equation for, 271
Contraflexure, point of, 210
Copper, properties of, 8, 22
Core of a section, 176
Corresponding loads and displacements, 403, 4
Couples, vectorial representation of, 84
Critical loads, 369, 373
by Rayleigh-Ritz method, 488
Critical stresses, 380
Crotti-Engesser theorem, 493
Curvature, 131, 191
due to shear, 228
due to temperature, 226
exact expression for, 193, 234
in inelastic bending, 328, 347, 353
in plastic bending, 335, 337
in unsymmetrical bending, 294
radius of, 131, 191
Curvature-area method, 348
Curved bars, deflection of, 418

Deflection curve, 190
differential equation of, 192, 228, 234
Deflections, 190–239
by complementary energy, 492, 494
by Rayleigh-Ritz method, 480
by strain energy, 503
by unit-load method, 403, 494, 504
due to impact, 34, 220
due to shear, 227, 418
large, 234, 378
of axially-loaded bars, 10
of curved bars, 417
of trusses, 11, 408, 493, 498
reciprocal theorems for, 423
tables of, 570–575
(*see also* Beam deflections)
Degrees of freedom, 444
Degrees of indeterminacy, kinematic, 444
static, 249, 430
Design, elastic, 6, 137, 347
fully-stressed, 161
of beams, 161

of columns, 381, 385, **388**
plastic, 347
Design, elastic (*cont'd*)
ultimate load, 7, **28**, **327**, **347**
Determinacy, kinematic, **444**
static, 12, 109, 249, **430**
Difference formulas, **215**
Dilatation, 73
Displacement method, **17**, **455**, 468, 478
Displacements, 403–418, **493–499**
(*see also* Deflections)
Ductility, 5
Dummy-load method, 403
Dynamic loads (*see* Impact)

Eccentric axial loads, 174, **368**
Eccentricity ratio, 382
Effective length of columns, **382**
Elastic centre method, 507
Elastic design, 6, 138, 347
Elastic limit, 6
Elastica, 235
Elasticity, 6, 7
Elastic-plus material, 6, 7, 27, 101, 229
Elliptic functions, 234
Elongation of bars, 7, 9, 26
Energy methods, 397, 457–507
Equilibrium equations, 17, 449, 452, 468, 478
Equilibrium method, 454
Equivalent length of a column, 381
Euler load, 376
Euler's curve, 381
External work, 400, 404

Factor of safety (*see* Safety factor)
Failure, in torsion, 86
of columns, 373, 381
Failure mechanism, 340
Finite-difference method, 205, 267
Finite-element method, 481
First moment of an area, 540
Fixed-end beams, 250, 253, 446
Fixed-end moments, 262, 446
Flexibilities, 8, 15, 257, 431, 434
reciprocal relation for, 435, 436, 507
relation to strain energy, 506
Flexibility method, 15, 257, 430, 505
Flexural centre (*see* Shear centre)
Flexural rigidity, 134
Flexure (*see* Beams; Bending)
Flexure formula, 134
for nonprincipal axes, 298
for unsymmetrical bending, 290, 294
generalized, 296
Force method, 15, 257, 437, 499
Form factor for shear, 420, 421
Frames, plane, 415, 442, 475
Fully-stressed design, 161
Fundamental case of buckling, 377

Generalized flexure formula, 296
Generalized forces, 403, 467, 491
Generalized shear formula, 314
Geometric nonlinearities, 458
Grooved bar, 33, 36

Hat section, 325, 326
Hooke's law, 7
for biaxial stress, 58
for shear, 31
for triaxial stress, 73
Horizontal displacement of ends of a beam, 27
Horizontal shear in beams, 142
Hydrostatic compression, 73

I beams (*see* Wide-flange beams)
Ideal column, 373
Immovable supports, beams with, 279
Impact, in axial load, 34
in bending, 220
in torsion, 106
Indeterminacy, kinematic, 444
static, 12, 249, 430
Inelastic beams, 327–360
curvature of, 328, 347, 353
deflections of, 314, 347, 358
neutral axis for, 328, 333, 351
of elastic-plastic material, 329
residual stresses in, 358
Inelastic bending, 327–360
(*see also* Plastic bending)
Inelastic buckling, 373, 378, 381, 390
Inelastic torsion, 100
Inflection point, 210
Influence coefficients, flexibility, 433
stiffness, 446
Initial stresses, 360
Instability (*see* Buckling; Columns)
Internal work, 401, 404
Isotropic materials, 9

Kern of a section, 176

Kinematic indeterminacy, 444
Kinematic unknowns, 444
Kirchhoff's dynamical analogy, 239
Kirchhoff's principle, 479

Large deflections, of beams, 234
of columns, 378
Lateral buckling of beams, 138
Lateral contraction, 5, 9
of beams, 132
Least work, principle of, 507
Limit analysis (*see* Plastic analysis)
Limit design (*see* Plastic design)
Linear elasticity, 7
Linear structures, 457
Load factor, 7, 28, 347
Load-deflection diagrams, 27
for columns, 370, 375, 379
for inelastic bending, 352
for nonlinear structures, 458
Local buckling, 376
Lüders' bands, 53, 524

Magnesium, properties of, 8, 22
Material nonlinearities, 458
Materials, properties, of, 3–10
tables of, 8, 22
Matrix methods of structural analysis, 507
Maxwell-Mohr method, 403, 437
Maxwell's reciprocal theorem, 428
Mechanisms, for plastic analysis, 340
Minimum complementary energy, 501
Minimum potential energy, 479
Minimum strain energy, 507
Modular ratio, 166
Modulus of elasticity, 7
bulk, 74
in shear, 8, 31, 61, 87
reduced, 358
relation to shear modulus, 61
table of, 8
Modulus of resilience, 33
Mohr's circle, for moments of inertia, 554
for strains, 79
for stresses, 61, 68, 72
Moment distribution method, 262, 508
Moment of inertia, 544
tables of, 461–570
Moment-area method, 200, 263, 348
Moment-curvature relation, 134, 191, 234
for inelastic bending, 353
for plastic bending, 334, 336
Necking, 4
Neutral axis, 131, 133
for bending combined with axial load, 174
for inelastic bending, 328, 351
for plastic bending, 331
for unsymmetrical bending, 291, 294
Neutral equilibrium, 374, 479
Neutral surface, 131
Nonlinear bending, 236, 327, 458
(*see also* Inelastic bending)
Nonlinear structures, 457
Nonlinear torsion, 100
Nonlinearities, causes of, 457
Nonprincipal axes, bending about, 294, 313
Nonprismatic bars, bending of, 156, 211, 486
elongation of, 10
torsion of, 88, 94
Normal force, 111
Normal stresses, 29, 54, 130

Open cross sections, 300

Parallel axis theorems, 548
Perfectly plastic materials, 26, 102, 329
beams of, 330, 336, 338
Permanent set, 6
Piobert's bands, 53, 524
Plane frames, deflections of, 415
statically indeterminate, 442, 475
Plane of bending, 131, 190
for unsymmetrical beams, 292
Plane strain, 74
Mohr's circle for, 79
Plane stress, 64, 78
Mohr's circle for, 68
principal stresses for, 66
Plastic analysis, of beams, 338
of trusses, 261
Plastic bending, 329–351
deflections due to, 348
residual stresses in, 358
(*see also* Inelastic bending)
Plastic design, 347
Plastic flow, 336
Plastic hinges, 336
Plastic modulus, 332
Plastic moment, 331
Plastic torsion, 101
Plastic zone, 331, 336, 338
Plasticity, 4

Poisson's ratio, 9, 61
Polar moment of inertia, 546
  table of, 561–563
Ponding problem, 222
Potential energy, 477–491
Prestrains, 231
Primary structure, 14, 249, 431
Principal axes, 554
Principal planes, 57, 66, 70
Principal strains, 78
Principal stresses, 57, 66, 70
  in beams, 153, 171
Principle of superposition, 207, 428, 458
Product integrals, 407
  table of, 409
Product of inertia, 550
  table of, 561–563
Profile sections, 300
Properties of areas, 540–556
  table of, 561–563
Properties of materials, 3–10
  tables of, 8, 22
Proportional limit, 3
Propped cantilever beam, 249, 251, 252
Pure bending, 130
  general theory of, 294
  of unsymmetrical beams, 291
Pure shear, 30, 37, 59
Pure torsion, 84

Radius of curvature, 131, 191
Radius of gyration, 546, 555
  tables of, 565–569
Rayleigh-Ritz method, 480–491
Reactions, notation for, 13
Reciprocal displacement theorem, 424
Reciprocal theorems, 423–430
  for flexibilities, 434, 436, 507
  for stiffnesses 451, 453, 470
Reciprocal work theorem, 428
Rectangular beam, 135, 138
  plastic bending of, 332, 335
  principal stresses in, 153
  shear centre of, 299
  shear stresses in, 141
Redistribution of moments, 342
Reduced modulus of elasticity, 358
Redundants, statical, 14, 249, 431
Reinforced concrete beams, 163, 168
Released structure, 14, 249, 431
Residual stresses, in columns, 388
  in elastic bending, 358
  in torsion, 102
Resilience, modulus of, 33
Restrained structure, 447
Rigid frames (*see* Plane frames)
Rigidity, axial, 81
  flexural, 134
  shearing, 228, 420
    torsional, 87
Ritz method, 480–491
Rotation of axes, 553
  (*see also* Transformations)

Safety factor, 6, 327, 347
  for columns, 381, 385, 388
  (*see also* Load factor)
Sandwich beams, 163, 169, 234
Secant formula, 383
Second moment of an area, 544
Section modulus, 134, 137
  tables of, 565–569
Shafts (*see* Torsion)
Shape factor, 332, 341
  of unsymmetrical I beams, 299
Shear, deflections due to, 223, 418
  form factor for, 420, 421
  Hooke's law for, 31
  pure, 30, 37, 59
  strain energy of, 37, 234, 423
Shear-centre, 298, 300, 307, 317, 318
  of angle sections, 310
  of channel beams, 308, 317, 318
  of I beams, 299
  of semicircular beams, 311
  of solid sections, 300
  of symmetrical beams, 299
  of tee beams, 300
  of thin-walled sections, 307
  of unsymmetrical channels, 318
  of unsymmetrical I beams, 299
  of Zee sections, 312
Shear coefficient, 228, 233, 418, 421
Shear deflections of beams, 227, 418
Shear flow, in beams, 151, 303
  in torsion, 95
Shear force, 29, 110, 113
  deflections due to, 227, 418
  sign convention for, *111*
Shear force diagrams, 116–124
Shear formula, 144, 303
  generalized, 314

Shear modulus of elasticity, 8, 31, 61, 87
Shear strains, 31, 60
in beams, 144, 223
in inclined directions, 77
in torsion, 85, 100
Shear stresses, 29
allowable, 30
in a wedge, 162
in angle sections, 309
in beams, 141
in built-up beams, 150
in channel beams, 308, 317
in circular beams, 148
in I beams, 146, 303
in nonprismatic beams, 157
in rectangular beams, 144
in semicircular beams, 311
in thin-walled beams, 300, 307, 313
in torsion, 85, 87, 97
in unsymmetrical beams, 300, 307, 313
in unsymmetrical channels, 317
in Zee sections, 312, 315
on inclined planes, 51–73
on perpendicular planes, 30, 55, 65
sign convention for, 63, 65
Shearing rigidity, 228, 420
Simple beams, 108, 193
table of, 573–575
Skew loads on beams, 289
Slenderness ratio, 380
Slip bands in steel, 52
Slope-deflection method, 508
Stability (*see* Buckling; Columns)
Stable equilibrium, 374, 478, 501, 507
Stairstep frame, 512
Statical indeterminacy, 12, 249, 430
Statical redundants, 14, 249, 430
Statically determinate structures, 12, 109
Statically inderterminate beams, 249–280, 430–508
differential equation for, 251
energy methods for, 467–507
finite-difference method for, 267
flexibility method for, 257, 430
inelastic deflections of, 358
moment-area method for, 263
plastic analysis of, 338
stiffness method for, 443
superposition method for, 254, 257
thermal effects in, 275
types of, 249
with immovable supports, 279
(*see also* Continuous beams)
Statically indeterminate structures, 249–280, 430–
Stationary potential energy, 479
Steel, properties of, 8, 22
slip bands in, 52
stress-strain diagram for, 4
Steel beams, 135, 138
initial stresses in, 360
plastic bending of, 329
tables of, 565–569
Steel columns, 388
Stiffness method, 17, 443, 468, 479
Stiffnesses, 8, 17, 446, 452, 469
reciprocal relation for, 452, 454, 470
relation to strain energy, 470
Strain, 3, 58, 73
in beams, 132
in inclined directions, 77
lateral, 4, 9
Mohr's circle for, 79
plane, 74
principal, 78
(*see also* Shear strains)
Strain energy, 31, 457–466
deflections found by, 503
for linear structures, 461
for nonlinear structures, 459
in bending, 218
in shear, 37, 234, 423
in torsion, 92, 96
in triaxial stress, 75
minimum 507
relation to displacement method, 468
relation to flexibility method, 505
relation to stiffness method, 419, 470
relation to unit-load method, 504
Strain energy methods, 467–491, 502–507
Strain energy per unit volume, 31, 37, 459
Strain gages, 79
Strain hardening, 4
Stress, 2
allowable, 6, 30, 137, 387
biaxial, 55, 61
Mohr's circle for, 61, 68, 72
normal, 29
on inclined planes, 51
plane, 64, 68
principal, 57, 66, 70
sign convention for, 53
triaxial, 71
(*see also* Shear stresses)

Stress concentrations, 156
Stress contours, 155
Stress energy, 460
Stress resultants, 110, 399, 403
Stress trajectories, 153
Stress-strain diagrams, 4
conventional, 5
for shear, 31
nonlinear, 25, 458
true, 5
Structural analysis, 397–508
Structural sections, 135, 138, 300
shear centre, of 307, 314
tables of, 565–570
Struts, 173, 372
(*see also* Columns)
Successive integration method, 192, 193, 198
for inelastic bending, 348
for statically indeterminate beams, 251
Suddenly applied load, 35, 221
Superposition, equations of, 257, 431, 448
principle of, 207, 428, 458
Superposition method, 205, 254
Supports of beams, 108
immovable, 279

Tangential stresses, 301
Tapered bars (*see* Nonprismatic bars)
Tee beams, 148
shear centre of, 300
Temperature changes (*see* Thermal effects)
Tensile test, 3
Tension, 2
Thermal effects, 22
deflections due to, 226, 407
in beams, 225, 275, 407
Thermal expansion, coefficient of, 22
Thin-walled beams, shear centre of, 307, 317
shear stresses in, 300, 307, 313
Thin-walled tubes, torsion of, 94
Three-moment equation, 271
Torsion, 84–107
combined with bending, 170
deflections due to, 404
failure in, 86
horsepower transmitted in, 87
inelastic, 100
of bars of two materials, 91
of hollow bars, 90, 94
of nonprismatic bars, 88, 94
of thin tubes, 94
pure, 84
residual stresses in, 102
strain energy of, 92, 96
strains in, 85, 100
stresses in, 85, 87, 98
Torsion constant, 97
Torsional rigidity, 87
Transformations, for moments of inertia, 5:
for strains, 74–79
for stresses, 51–73
Transformed section method, 166
Triaxial stress, 71
Trusses, deflections of, 11, 408, 493, 498
nonlinear, 25, 470, 479, 493, 501
plastic analysis of, 27
prestrains in, 23
statically indeterminate, 17, 439, 473, 501
thermal stresses in, 24
Williot diagram for, 12
Tungsten, properties of, 8
Twisting (*see* Torsion)

Ultimate load, 7, 27
of beams, 339, 347
Ultimate load design, 7, 28, 327, 347
Ultimate stress, 4, 8
Ultimate torque, 102
Unit-load method, 403–418, 494, 504
for linear structures, 405
for nonlinear structures, 404
product integrals for, 409
relation to complementary energy, 494
relation to strain energy, 504
Unit volume change, 10, 58, 73
Unstable equilibrium, 374, 479
Unsymmetrical beams, 291–320
shear centre of, 297, 307
Unsymmetrical channel beams, 317
Unsymmetrical I beams, 297

Vectors, for couples, 84
Virtual displacements, 398
for plastic analysis, 342
Virtual work, 398, 401, 402
Volume change, 10, 49, 73

Warping of beams, 145, 227, 231
Wedge, stresses in, 162
Wide-flange beams, 135, 138
initial stresses in, 360
plastic bending of, 333

principal stresses in, 155
Wide-flange beams (*cont'd*)
shear centre of, 299
shear stresses in, 145, 303
table of, 565
unsymmetrical, 298
Williot, diagram, 12
Wood, failure of, 52, 86
properties of, 8
Work, complementary, 460
external, 400, 404
internal, 401, 404
of a force, 459
virtual, 398, 401, 402
Working stresses (*see* Allowable stresses)
Yield curvature, 333
Yield loan, for beams, 339
for trusses, 26
Yield moment, 330
Yield stress, 4, 8
Yield torque, 102
Young's modulus, 7

Zee section, bending of, 295
principal axes of, 595
shear centre of, 312
shear stresses in, 315